浮体振荡运动的伽辽金法

数学力学系　周清甫

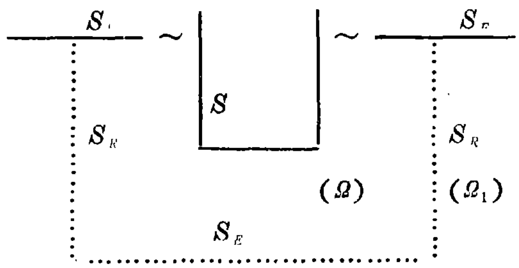
§1 引　　言

无航速浮体在水面作振荡运动的非线性自由边界问题，可以用逐次近似的方法处理，其各级近似的基本方程和边界条件为[1]，找出函数ϕ_1、ϕ_2，分别满足：

$$\Delta\phi_1=0 \qquad \Delta\phi_2=0 \qquad \text{在}\Omega+\Omega_1\text{内} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-K\phi_1=P_1 \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}-K\phi_2=P_2 \qquad \text{在 } S_F\text{上} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-F_1=0 \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}=F_2 \qquad \text{在}S\text{上} \tag{1.3}$$



这个问题不能把ϕ_1、ϕ_2分别求解，因为在无穷远处还有一个使ϕ_1、φ_2关联起来的幅射条件。近年来有限单元法在解决这种带有幅射条件的半无界问题上，已出现了一些工作[2]、[3]，它们使用一个在边界S_R上的限制条件来代替在无穷远处的幅射条件，把问题变为在有界区域Ω中求解。这个条件是：

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-K\phi_2=Q_1, \quad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}+K\phi_1=Q_2; \quad \text{在}S_R\text{上}。 \tag{1.4}$$

此外在 S_E 上要满足$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=0$。其中 n 表示外法线方向。K是确定的正数，P_1、P_2、F_1、F_2、Q_1、Q_2 都是对应边界上的已知函数并且是平方可积的。它是非正定型的混合边界问题。对于橢园型方程的正定边界问题[4]、[5]，中作了详细研究。

本文在于研究(1.1)—(1.4)的适定性。从数学观点看，所解决的问题还只属于

有界区域椭园型方程的非正定问题，而完全半无界的幅射条件问题需要进一步研究。不过〔2〕中计算表明，用条件(1.4)代替幅射条件所得结果同试验值符合较好。本文首先研究了(1.1)—(1.4)所对应的二次汎函驻点的存在性和唯一性，得到了二次汎函存在有孤立的特征值，当K不是特征值时，汎函驻点唯一地存在的，驻点唯一可能的极限点在无穷；驻点值和特征都可以用伽辽金法求解；其次证明了驻点函数满足基本方程(1.1)，并且在一个平均意义下满足边界条件(1.2)—(1.4)。在解决上述问题的过程中，还证明了一个关于逆算子的定理，即如果一个自共轭算子系列收敛于某个自共轭正定算子T，则这个系列算子的每个元素都有有界逆算子，并且这逆算子系列收敛于T^{-1}。

〔3〕〔4〕指出，(1.1)—(1.4)对应的二次汎函为：

$$J(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left\{\phi_{1x}^2+\phi_{1y}^2+\phi_{1z}^2\right\}d\Omega-\frac{K}{2}\int_{s_F}\phi_1^2ds$$

$$-\int_{s_F}P_1\phi_1ds-\int_{S}F_1\phi_1ds-\int_{s_R}Q_1\phi_1ds-\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\phi_{2x}^2\right.\right.$$

$$\left.+\phi_{2y}^2+\phi_{2z}^2\right\}d\Omega-\frac{K}{2}\int_{s_F}\phi_2^2ds-\int_{s_R}Q_2\phi_2ds-\int_{s_F}P_2\phi_2ds$$

$$\left.-\int_{S}F_2\phi_2ds\right\}-K\int_{s_R}\phi_1\phi_2ds \tag{1.5}$$

§2 算子A、B的全连续性

选取实函数空间$W_2^{(1)}(\Omega)$为汎函(1.5)的容许空间。它是一切在Ω上有一阶广义导数，并且函数本身及其一阶广义导数都在Ω上平方可积的函数组成。其内积$(\,,)_*$定义为：如果$u,v\in W_2^{(1)}(\Omega)$，

$$(u,v)_*=\int_{\Omega}\{u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z\}d\Omega+\int_{s_F}uvds \tag{2.1}$$

因此范数定义为：

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}=\left\|u_x\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|u_y\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|u_z\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|u\right\|^2_{L_2(s_F)} \tag{2.2}$$

此处

$$\left\|u_x\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\iint_{\Omega}u_x^2d\Omega,\quad \left\|u\right\|^2_{L_2(s_F)}=\int_{s_F}u^2ds$$

〔6〕中指出，这样定义的内积空间是可分的希尔伯特空间。并且还指出一个嵌入定理：如果$\phi\in W_2^{(1)}(\Omega)$，则$\phi$在$\Omega$的任何一个二维充分光滑曲面（在我们研究的情况，$S_F$，$S_R$就是这样的曲面。）$S_F$上属于$L_2(S_F)$，并且这样定义的由$W_2^{(1)}(\Omega)$到$L_2(S_F)$的嵌入算子是线性全连续算子。记这个算子为$T_F$。像通常一样，把$L_2$中内积记为〔 〕；当$u,v\in L_2(S_i)$，

$$\left[u,v\right]=\int_{S_F}uvds$$

选择$W_2^{(1)}(\Omega)$中的一个完备规范化正交组$\{e_i\}_{i=1,2\cdots}$空间中元素ϕ可表为

$$\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i \tag{2.3}$$

系列$\{\xi_i\}\in\ell_2$。设ϕ，$\psi\in W_2^{(1)}(\Omega)$，

$$\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\ ,\qquad \psi=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i e_i$$

由T_F的有界性有

$$T_F\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i T_F e_i\quad .$$

$$T_F\Psi=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i T_F e_i\quad .$$

$$[T_F\phi.\ T_F\Psi]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i T_F e_i,\ T_F\Psi\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\left[T_F e_i, T_F\Psi\right] \tag{2.4}$$

而

$$[T_F e_i, T_F\Psi]=\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\left[T_F e_i.\ T_F e_j\right]$$

记

$$a_{ij}=[T_F e_i\ .\ T_F e_j] \tag{2.5}$$

则(2.5)可写为

$$[T_F\phi,\ T_F\Psi]=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\eta_j \tag{2.6}$$

由$[T_F\phi,\ T_F\Psi]=[T_F\Psi,\ T_F\phi]$得：

$$[T_F\phi.\ T_F\Psi]=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\eta_j=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j \tag{2.7}$$

显然a_{ij}构成对称矩阵。

$$a_{ij}=a_{ji} \tag{2.8}$$

现在定义算子A：设$\xi(\xi_1,\xi_2\cdots\cdots)\epsilon l_2$，它经过$A$作用变为$l_2$中另一元素$\zeta(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$

$$A\xi=\zeta=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right\}_{i=1,2\cdots\cdots} \tag{2.9}$$

这儿要证明ζ确为l_2中元素。事实上，对l_2任何一个元素η，由(2.7)有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j=[T_F\phi,\ T_F\Psi].$$

由$Landan$定理[7]：如果$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\zeta_i$对一切属于$l_2$中的$\eta$有意义，则$\zeta$必属于$l_2$，可见由(2.9)得到的$\zeta$必属于$l_2$。

下面证明算子A的全连续性。为此要证两件事。设U是l_2中任一有界集，其中元素仍用ξ表示，$\xi\epsilon U$。对于U要证明：

1° 一致有界性，即对U中任何ξ，有不依赖于ξ的常数C存在，使

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2\leqslant C \tag{2.10}$$

2° 任给ε，有一个$N_0(\varepsilon)$存在，当$n>N_0$时，下列关系对U中一切元素一致满足：

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2\leqslant\varepsilon \tag{2.11}$$

先证明(2.10)。设$\eta(\eta_1,\eta_2,\cdots)$是$l_2$任何元素，对应的在$W_2^{(1)}(\Omega)$中有一个确定元素$\Psi=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_ie_i$。仍记$\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i$，有估计式：

$$|[T_F\phi,T_F\Psi]|\leqslant\|T_F\phi\|_{l_2(S_F)}\|T_F\Psi\|_{l_2(S_F)}\leqslant\|T_F\|^2\|\phi\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}\|\Psi\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}=\|T_F\|^2\|\eta\|_{l_2}\|\xi\|_{l_2}$$

因$\xi\epsilon U$，$\|\xi\|_{l_2}\leqslant M_0$，即得到

$$|[T_F\phi,T_F\Psi]|\leqslant\|T_F\|^2\|\eta\|_{l_2}M_0 \tag{2.12}$$

前面已证明$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right\}_{i=1,2\cdots}$是$l_2$中元素，我们取$\eta$为这个元素，则由(2、7)式有：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2=\left|[T_F\phi,\ T_F\Psi]\right|$$

$$\leqslant\left\|T_F\right\|^2 M_0\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

即 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|A\|^2M_0$

(2.10)式得证。

再证明(2.11)式。仍取元素$\eta(\eta_1,\eta_2\cdots)$

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k$$

完全与(2.7)推导相同有关系：

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2=\sum_{i=n}^{\infty}\eta\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)=\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi,\eta_iT_Fe_i] \tag{2.13}$$

既然U是有界集，则在$W_2^{(1)}(\Omega)$中对应的元素集合$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\xi_ie_i\right\}$也是有界的，记为U$_1$，$T_F$把有界集$U_1$变换为$l_2(S_F)$中的列紧集，此列紧集记为$V_1$。$V_1$中存在有限$\varepsilon$一纲，即有有限个元素

$$T_F\phi_1,\ T_F\phi_2,\ \cdots T_F\phi_p \tag{2.14}$$

存在，(其中ϕ_1。$\phi_2,\cdots\phi_p$是$W_2^{(1)}(\Omega)$中元素)。

使对于V_1中的任何一个元素$T_F\phi$，均有某个$T_F\phi_k$存在，$k\leqslant p$，使

$$\|T_F\phi-T_F\phi_k\|_{l_2(S_F)}\leqslant\varepsilon\ . \tag{2.15}$$

因为$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k=[T_F\phi,\ T_Fe_i]$，结合(2.13)式有：

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2=\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi,\ T_Fe_i]^2=\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi,\ \eta_iT_Fe_i] \tag{2.16}$$

因为P是有限数，对于任给的ε，有一个$N_0(\varepsilon)$存在，使对于(2.14)中的任意$T_F\phi_k$，当$\eta>N_0$时有

$$\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi_k,\ T_Fe_i]^2\leqslant\varepsilon \tag{2.17}$$

对于任何一个$T_F\phi\epsilon V_1$，有

$$\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi,T_Fe_i]^2=\sum_{i=n}^{\infty}\left\{[T_F\phi-T_F\phi_k,\ T_Fe_i]+[T_F\phi_k,\ T_Fe_i]\right\}^2$$

$$\leqslant2\sum_{i=n}^{\infty}[T_F\phi-T_F\phi_k,\ T_Fe_i]^2+2\sum_{i=n}^{\infty}\left[T_F\phi_k,\ T_Fe_i\right]^2$$

$$\leqslant 2\sum_{i=n}^{\infty}\left[T_F\phi - T_F\phi_k,\ T_F e_i\right]^2 + 2\varepsilon \tag{2.18}$$

如果记$\phi_k = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(1)} e_i$,则 $\phi - \phi_k = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\xi_i - \xi_i^{(1)}\right)e_i$

令 $$\eta_i' = \sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\left(\xi_i - \xi_i^{(1)}\right).$$

由（2.16）的后两个等式有：

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left[T_F\phi - T_F\phi_k,\ T_F e_i\right]^2 = \sum_{i=n}^{\infty}\left[T_F\phi - T_F\phi_k, \eta_i'\ T_F e_i\right]$$

$$\leqslant \left|\left[T_F\phi - T_F\phi_k,\ \sum_{i=n}^{\infty}\eta_i'\ T_F e_i\right]\right|$$

$$\leqslant \left\|T_F\phi - T_F\phi_k\right\|_{L_2(s_F)}\left\|\sum_{i=n}^{\infty}\eta_i'\ T_F e_i\right\|_{L_2(s_F)}$$

$$\leqslant \varepsilon\left\|T_F\left(\sum_{i=n}^{\infty}\eta_i'\ e_i\right)\right\|_{L_2(s_F)} \leqslant \varepsilon\left\|T_F\right\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i'^2\right)^{1/2} \tag{2.19}$$

但 $$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i'^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k - \sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k^{(1)}\right\}^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi_{ik}^{(1)}\right)^2 \leqslant 4C$$

可见

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left[T_F\phi - T_F\phi_k,\ T_F e_i\right]^2 \leqslant 4\varepsilon(\|T_F\|C)^{\frac{1}{2}}$$

从而有

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ki}\xi_k\right)^2 \leqslant \varepsilon(2 + 4\|T_F\|C^{\frac{1}{2}}).$$

（2.11）式得证。

如果$\phi\epsilon W_2^{(1)}(\Omega)$，根据前面引用的嵌入定理，$\phi$也属于$L_2(S_R)$，这样定义的由$W_2^{(1)}(\Omega)$到$L_2(S_R)$的算子记为$T_R$。完全相同的推导，得到另一个作用在$l_2$中的算子$B$。如果$\xi\epsilon l_2$，$B$定义为：

$$B\xi=\zeta=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_j\right\}_{i=1,2,\cdots\cdots}\quad b_{ij}=[T_Re_i,T_Re_j]=\int_{S_R}(T_Re_i)(T_Re_j)ds\cdots\quad(2.21)$$

并且 $\zeta\epsilon l_2$

§3 泛函驻点的存在性和唯一性

泛函(1.5)可表为：

$$J(\phi_1,\ \phi_2)=\frac{1}{2}\left\|\phi_1\right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}-\frac{\lambda}{2}\left\|\phi_1\right\|^2_{L_2(s_F)}$$

$$-[P_1,\ T_F\phi_1]_{L_2(s_F)}-[F_1,\ T_s\phi_1]_{L_2(s)}-[Q_1,\ T_R\phi_1]_{L_2(s_R)}$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left\|\phi_2\right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}-\frac{\lambda}{2}\left\|\phi_2\right\|^2_{L_2(s_F)}-\left[P_2,T_F\phi_2\right]_{L_2(s_F)}\right.$$

$$\left.-\left[F_2,T_s\phi_2\right]_{L_2(s)}-\left[Q_2,T_R\phi_2\right]_{L_2(s_R)}\right\}$$

$$-K\left[T_R\phi_1,T_R\phi_2\right]_{L_2(s_R)}\qquad(3.1)$$

式中方括号[ ]都是表示对应的 L_2 空间中的内积。$\lambda=K+1$，T_S 是 $W_2^{(1)}(\Omega)$ 嵌入 $L_2(s)$ 的算子。

给 $W_2^{(1)}(\Omega)$ 中函数以变分 $\delta\phi$，等价的是给 l_2 中元素 $\left\{\xi_i\right\}\epsilon l_2$ 以变分 $\left\{\delta\xi_i\right\}\epsilon l_2$。

$$\delta\phi=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\xi_ie_i$$

给 ϕ_1，ϕ_2 以变分，

$$\delta J=(\phi_1,\ \delta\phi_1)_*-\lambda[T_F\phi_1,\ T_F\delta\phi_1]_{L_2(s_F)}$$

$$-[P_1,\ T_F\delta\phi_1]_{L_2(s_F)}-[F_1,\ T_s\delta\phi_1]_{L_2(s)}-[Q_1,\ T_R\delta\phi_1]_{L_2(s_R)}$$

$$-\{(\phi_2,\delta\phi_2)_*-\lambda[T_F\phi_2,T_F\delta\phi_2]_{L_2(s_F)}-[P_2,\ T_F\delta\phi_2]_{L_2(s_F)}$$

$$-[F_2,T_s\delta\phi_2]_{L_2(s)}-[Q_2,T_R\delta\phi_2]_{L_2(s_R)}\}-K\{[T_R\phi_1,T_R\delta\phi_2]_{L_2(s_R)}$$

$$+[T_R\delta\phi_1,\ T_R\phi_2]_{L_2(s_R)}\}\ .\qquad(3.2)$$

注意到坐标系性质和(2.6)式，有：.

$$\left(\phi_1,\delta\phi_1\right)_*=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(1)}\ \delta\xi_i^{(1)}\ .$$

$$\left[T_F\phi_1,T_F\delta\phi_1\right]_{L_2(s_F)}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\xi_i^{(1)}\ \sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j^{(1)}\ ;$$

$$\left[T_{l}\phi_{2},T_{l}\delta\phi_{2}\right]_{L_{2}(s_{l})}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\xi_{i}^{(2)}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_{i}^{(2)};$$

$$\left[T_{R}\phi_{1},\ T_{R}\delta\phi_{2}\right]_{L_{2}(s_{R})}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\xi_{i}^{(2)}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(1)};$$

$$\left[T_{R}\delta\phi_{1}.T_{R}\phi_{2}\right]_{L_{2}(s_{R})}=\sum_{i=1}^{\infty}\delta\xi_{i}^{(1)}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(2)}:$$

并且记泛函一次项对应的变分为$\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{i}^{(1)}\ \delta\xi_{i}^{(1)}$，$\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{i}^{(2)}\ \delta\xi_{i}^{(2)}$，其中．

$$\zeta_{i}^{(1)}=\left\{\int_{s_{l}}P_{1}(T_{l}e_{i})ds+\int_{s}F_{1}(T_{s}e_{i})ds+\int_{s_{R}}Q_{1}(T_{R}e_{i})ds\right\}$$

因P_1等平方可积，再象证明(2.9)式的ζ属l_2一样，可以证明$\{\zeta_{i}^{(1)}\}$属于l_2。

$$\delta J=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\xi_{i}^{(1)}-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_{i}^{(1)}-K\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(2)}-\zeta_{i}^{(1)}\right\}\delta\xi_{i}^{(1)}$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\xi_{i}^{(2)}-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_{i}^{(2)}+K\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(1)}-\zeta_{i}^{(2)}\right\}\delta\xi_{i}^{(2)}\qquad(3.3)$$

因此$\delta J=0$等价于

$$\begin{cases}\xi_{i}^{(1)}-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_{i}^{(1)}-K\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(2)}-\zeta_{i}^{(1)}=0\\ \xi_{i}^{(2)}-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_{i}^{(2)}+K\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\xi_{i}^{(1)}-\zeta_{i}^{(2)}=0\end{cases}\qquad(3.4)$$

写为l_2算子方程形式，并注意$\lambda=K+1$有：

$$\begin{cases}\xi^{(1)}+B\xi^{(2)}-\lambda A\xi^{(1)}-\lambda B\xi^{(2)}-\zeta^{(1)}=0\\ \xi^{(2)}-B\xi^{(1)}-\lambda A\xi^{(2)}-\lambda B\xi^{(1)}-\zeta^{(2)}=0\end{cases}\qquad(3.5)$$

或再写为矩阵形式，并用E表恒等变换：

$$\begin{pmatrix}E&B\\-B&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}A&0\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0&B\\B&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\zeta^{(1)}\\ \zeta^{(2)}\end{pmatrix}=0\qquad(3.6)$$

引入l_2的乘积空间，它把l_2中元素对$\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}$作为自己的元素，其内积定义为：

$$\left(\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta^{(1)}\\ \eta^{(2)}\end{pmatrix}\right)=\left(\xi^{(1)},\ \eta^{(1)}\right)_{l_2}+\left(\xi^{(2)},\ \eta^{(2)}\right)_{l_2}\qquad(3.7)$$

[7]中指出，这样定义的乘积空间组成另一个希尔伯特空间。记它为l_2^2。这样(3.6)

的变换矩阵就可以看作为作用在l_2^2上的算子。记：

$$T_1=\begin{pmatrix} E & B \\ -B & E \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

(3.6)可写为：

$$T_1\xi-\lambda T\xi-\zeta=0 \tag{3.8}$$

其中 $\xi=\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}$，　$\zeta=\begin{pmatrix}\zeta^{(1)}\\ \zeta^{(2)}\end{pmatrix}$.

现在研究T_1，T的性质。T是作用在l_2^2上的线性全连续算子，这是因为A,B是作用在l_2上的线性全连续算子。现证明T_1是l_2^2上的正定算子，即存在一个正常数$\gamma>0$，使对于l_2^2中任何元素ξ，有：

$$\left(T_1\xi,\xi\right)_{l_2^2}\geqslant\gamma\left\|\xi\right\|^2_{l_2^2} \tag{3.9}$$

事实上

$$\left(T_1\xi,\xi\right)_{l_2^2}=\left(\begin{pmatrix} E & B \\ -B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}\right)_{l_2^2}$$

$$=\left(\begin{pmatrix} E\xi^{(1)}+B\xi^{(2)} \\ -B\xi^{(1)}+E\xi^{(2)} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\xi^{(1)}\\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}\right)_{l_2^2}$$

按(3.7)式得到：

$$\left(T_1\xi,\xi\right)_{l_2^2}=\left\|\xi^{(1)}\right\|^2_{l_2}+\left(B\xi^{(2)},\xi^{(1)}\right)_{l_2}-\left(B\xi^{(1)},\xi^{(2)}\right)_{l_2}+\left\|\xi^{(2)}\right\|^2_{l_2}$$

因为由(2.7)后两个等式，得知B还是自共轭的，因此$(B\xi^{(2)},\xi^{(1)})_{l_2}=(B\xi^{(1)},\xi^{(2)})_{l_2}$，由此：

$$(T_1\xi,\xi)_{l_2^2}=\left\|\xi^{(1)}\right\|^2_{l_2}+\left\|\xi^{(2)}\right\|^2_{l_2}=\left\|\xi\right\|^2_{l_2^2} \tag{3.10}$$

再者，由B，E的自共轭性直接得到T_1的自共轭性。自共轭正定算子必有有界逆算子存在，即T_1^{-1}是有界线性算子。把(3.8)两边乘以T_1^{-1}，记$G=T_1^{-1}T$，得

$$\xi-\lambda G\xi-\eta=0, \tag{3.11}$$

$\eta=T^{-1}\zeta$是l_2^2中元素。G是一个有界算子与线性全连续算子的乘积，它必是线性全连续的。按[6]中§135节关于含有全连续算子方程的叙述，方程(3.11)有孤立点的特征值，特征值唯一可能的极限点在无穷。对于正常值，(3.11)有唯一的解存在。这

样我们得到定理。

定理一　泛函(1.5)存在有孤立点的特征值$\lambda_K=K_K+1$，特征值唯一可能的极限点是无穷远点；除这些特征值外，对于一切入值泛函(1.5)存在有唯一的驻点。

由于泛函(1.5)驻点的富里埃系数必满足方程(3.11)，反之亦然，所以定理是显然成立的。

§4 一个关于逆算子的定理

研究伽辽金法的收敛性要用到一个定理。

定理二　设T，$\{T_n\}$是定义在希尔伯特空间H上的自共轭线性有界算子，T是正定的，并且$\|T-T_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$，则$T^{-1}$，$\{T_n^{-1}\}$都存在，并且有$\|T^{-1}-T_n^{-1}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$。

证明：先证明T_n是正定。由T的正定性有

$$(Tx,x)\geqslant\gamma\|x\|^2,\quad x\in H,\quad \gamma>0 \tag{4.1}$$

而

$$(T_nx,x)=((T_n-T)x,x)+(Tx,x)\geqslant\gamma\|x\|^2+((T_n-T)x,x)$$

但$|((T_n-T)x,x)|\leqslant\|T_n-T\|\cdot\|x\|^2\leqslant\varepsilon\|x\|^2$ 当n充分大时。

由此得到

$$(T_nx,x)\geqslant\gamma\|x\|^2-\varepsilon\|x\|^2=(\gamma-\varepsilon)\|x\|^2 \tag{4.2}$$

自共轭正定线性算子必有逆算子存在，并且这个逆算子是定义在整个H上的有界算子[6]185节，所以T^{-1}，T_n^{-1}存在，而且是定义在H上有界算子。

其次T_n^{-1}是一致有界的，即存在不依赖于n的M，使$\|T_n^{-1}\|\leqslant M$。事实上，由(4.2)可知对于任何$x\in H$和充分大的n有

$$\begin{aligned}\|x\|\cdot\|T_n^{-1}x\|&\geqslant|(x,T_n^{-1}x)|=|(T_nT_n^{-1}x,T_n^{-1}x)|=(T_nT_n^{-1}x,T_n^{-1}x)\\&\geqslant(\gamma-\varepsilon)\|T_n^{-1}x\|^2\end{aligned}$$

由此得到

$$\|T_n^{-1}x\|\leqslant\frac{1}{\gamma-\varepsilon}\|x\|. \tag{4.3}$$

现在证明定理后半部。对于任何$x\in H$，

$$0=Ex-Ex=T_n^{-1}T_nx-T^{-1}Tx=T_n^{-1}(T_n-T)x-(T^{-1}-T_n^{-1})Tx$$

因此有　$$\|T_n^{-1}(T_n-T)x\|=\|(T^{-1}-T_n^{-1})Tx\| \tag{4.4}$$

由(4.3)和$T_n\longrightarrow T$可得：

$$\begin{aligned}\|T_n^{-1}(T_n-T)x\|&\leqslant\|T_n^{-1}\|\cdot\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n^{-1}\|\cdot\|T_n-T\|\cdot\|x\|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}\|x\|.\end{aligned}$$

可见

$$\left\|\left(T^{-1}-T_n^{-1}\right)Tx\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}\|x\| \tag{4.5}$$

另一方面由T的正定性可以断定存在一个正常数C，使对任何$x\in H$有$\|Tx\|\geqslant C\|x\|$。用反证法。如果此式不成立、则必有系列$\{C_n\}$，$C_n>0$而且$C_n\longrightarrow 0$，使对于任何一个C_n，必在集合$M\{x,\ \|x\|=1,\ x\in H\}$中至少找到一个$x_n$，成立不等式

$$\|Tx_n\|\leqslant C_n\|x_n\|=C_n$$

因此　$Tx_n\Longrightarrow 0$，$(Tx_n,x_n)\longrightarrow 0$

但　$(Tx_n,\ x_n)\geqslant\gamma\|x_n\|^2=\gamma.$

这样就得到了　$\gamma\leqslant 0$　矛盾。

回到(4.5)，由$\|Tx\|\geqslant C\|x\|$可得：

$$\left\|\left(T^{-1}-T_n^{-1}\right)Tx\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}\|x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{C(\gamma-\varepsilon)}\left\|Tx\right\|$$

注意到Tx的值域，即$T^{-1}x$的定义域是整个H，可以得到对任何$y\in H$，

$$\left\|\left(T^{-1}-T_n^{-1}\right)y\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{C(\gamma-\varepsilon)}\left\|y\right\|$$

定理证毕。

§5 求驻点和特征值的伽辽金方法

按伽辽金程序求泛函(1.5)的驻点，就是把Φ表为：

$$\Phi=\sum_{=1}^{N}\xi\varphi \tag{5.1}$$

重复(2.3)—(2.21)，(3.1)—(3.8)的运算步骤，得到与(3.8)相对应的方程

$$T_{1N}\xi_N-\lambda T_N\xi_N-\zeta_N=0 \tag{5.2}$$

其中

$$T_{1N}=\begin{pmatrix}E_N & B_N\\ -B_N & E_N\end{pmatrix}\qquad T_N=\begin{pmatrix}A_N & B_N\\ B_N & A_N\end{pmatrix}$$

$$\xi_N=\begin{pmatrix}\xi_N^{(1)}\\ \xi_N^{(2)}\end{pmatrix},\qquad \xi_N^{(1)}=\begin{pmatrix}\xi_{N1}^{(1)}\\ \vdots\\ \xi_{NN}^{(1)}\end{pmatrix},\qquad \xi_N^{(2)}=\begin{pmatrix}\xi_{N1}^{(2)}\\ \vdots\\ \xi_{NN}^{(2)}\end{pmatrix};$$

$$A_N=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1N}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2N}\\ \cdots\cdots & \\ a_{N1}, & a_{N2}\cdots a_{NN}\end{pmatrix}\qquad B_N=\begin{pmatrix}b_{11} & c_{12}\cdots b_{1N}\\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2}\\ \cdots\cdots & \\ b_{N1} & b_{N2}\cdots b_{N}\end{pmatrix}$$

$$E_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

a_{ij}, b_{ij}仍由(2.5)、(2.21)给出。算子T_{1N}, T_N, A_N, B_N与T_1, T, A, B的性质完全相同。特别是T_{1N}是自共轭正定算子。

下面我们找一个与方程(5.2)等价的方程。我们回到方程(3.6)。把(3.6)中的B、A分别用B_N', A_N'代替，$\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$用$\zeta_N^{(1)\prime}$, $\xi_N^{(2)\prime}$代替。

$$\left[\begin{pmatrix} E & B_N' \\ -B_N' & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_N^{(1)\prime} \\ \xi_N^{(2)\prime} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} A_N' & B_N' \\ B_N' & A_N' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_N^{(1)\prime} \\ \xi_N^{(2)\prime} \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} \zeta_N^{(1)\prime} \\ \zeta_N^{(2)\prime} \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{5.4}$$

A_N' B_N' 都是作用在l_2的算子，定义如下：设g_n为l_2中单位正交基：

$$g_n = (0, \cdots 0, 1, 0 \cdots)$$

$$A_N'\ \xi = \sum_{m=1}^{N} (A\xi, g_m) g_m \ . \tag{5.5}$$

$$B_N'\ \xi = \sum_{m=1}^{N} (B\xi, g_m) g_m \ .$$

$$\zeta_N^{(1)\prime} = \left(\zeta_{N1}^{(1)\prime}, \zeta_{N2}^{(1)\prime}, \cdots \zeta_{NN}^{(1)\prime}, 0, 0 \cdots\right) = \sum_{i=1}^{N} \zeta_N^{(1)\prime} g_i \tag{5.6}$$

$$\xi_N^{(2)\prime} = \left(\zeta_{N1}^{(2)\prime}, \zeta_{N2}^{(2)\prime}, \cdots \zeta_{NN}^{(2)\prime}, 0 \cdots 0 \cdots\right) = \sum_{i=1}^{N} \zeta_N^{(2)\prime} g_i$$

可见

$$A_N'\ \xi = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\xi_j, \cdots \sum_{j=1}^{\infty} a_{Nj}\xi_j, 0, 0 \cdots\right) \in l_2$$

$$A_N' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & \cdots & a_{1t} & \cdots\cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & \cdots & a_{2t} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{NN} & \cdots & a_{Nt} & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & & & \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

B_N'也是同样形式。

方程(5.2)与(5.4)的解是一一对应的。事实上(5.4)可表为

$$\begin{pmatrix} \xi_N^{(1)\prime} \\ \xi_N^{(2)\prime} \end{pmatrix} = \left[-\begin{pmatrix} 0 & B_N' \\ -B_N' & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A_N' & B_N' \\ B_N' & A_N' \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_N^{(1)\prime} \\ \xi_N^{(2)\prime} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_N^{(1)\prime} \\ \zeta_N^{(2)\prime} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

由性质(5.7)可知(5.4)解 $\xi_N^{(1)\prime}$, $\xi_N^{(2)\prime}$ 的所有坐标从第$N+1$个开始都等于零：

$$\xi_N^{(1)\prime} = \sum_{k=1}^{N} \xi_{Nk}^{(1)\prime} g_k, \quad \xi_N^{(2)\prime} = \sum_{k=1}^{N} \xi_{Nk}^{(2)\prime} g_k \tag{5.9}$$

这就证明了(5.4)式只能具有(5.9)形式的解。而对于这种解，显然有

$$A_N' \ \xi_N^{(1)\prime} = A_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(1)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(1)\prime} \end{pmatrix}, \quad A_N' \ \xi_N^{(2)\prime} = A_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(2)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(2)\prime} \end{pmatrix}$$

$$B_N' \xi_N^{(1)\prime} = B_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(1)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(1)\prime} \end{pmatrix}, \quad B_N' \xi_N^{(2)\prime} = B_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(2)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(2)\prime} \end{pmatrix}$$

$$E \xi_N^{(1)\prime} = E_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(1)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(1)\prime} \end{pmatrix}, \quad E \xi_N^{(2)\prime} = E_N \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(2)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(2)\prime} \end{pmatrix}$$

由此推得，如果(5，9)是(5，4)的解，则

$$\xi_N^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(1)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(1)\prime} \end{pmatrix}, \quad \xi_N^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_{N1}^{(2)\prime} \\ \vdots \\ \xi_{NN}^{(2)\prime} \end{pmatrix}$$

是(5.2)的解，反之亦然。

既然(5.2)与(5.4)的解是一一对应的，如果证明了(5.4)的解当$N\to\infty$收敛于(3.11)的解，即收敛于汎函(1.5)的驻点值，则伽辽金法的收敛性就得到了证明。

定理三　如果λ是方程(3.11)的正常值，则方程(5，4)有唯一解：

$$\xi_N' = \begin{pmatrix} \xi_N^{(1)\prime} \\ \xi_N^{(2)\prime} \end{pmatrix}$$

并且当$N\to\infty$时，ξ_N'按l_2^2中范数收敛于方程(3.11)的解ξ。把方程(5.4)的特征值当$N\to\infty$时取极限，便得到(3，11)的特征值。

证明：〔5〕中§51已证明对于全连续算子A，B而言，在l_2空间中有

$$\left\|B_N'-B\right\|\longrightarrow 0\,;\ \left\|A_N'-A\right\|\to 0,\text{当}N\to\infty \tag{5.10}$$

记

$$T_{1N}'=\begin{pmatrix} E & B_N' \\ -B_N' & E\end{pmatrix},\qquad T_N'=\begin{pmatrix} A_N' & B_N' \\ B_N' & A_N'\end{pmatrix}$$

则在l_2^2中有

$$\left\|T-T_N'\right\|\to 0\,;\ \left\|T_{1N}'-T_1\right\|\to 0\ \ \text{当}N\to\infty.$$

事实上，对任何$\xi\epsilon l_2^2$，

$$\left\|\left(T_1-T_{1N}'\right)\xi\right\|_{l_2^2}^2=\left\|\begin{pmatrix} 0 & B-B_N' \\ -\left(B-B_N'\right) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)} \\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}\right\|_{l_2^2}^2$$

$$=\left\|\begin{matrix}\left(B-B_N'\right)\xi^{(2)} \\ -\left(B-B_N'\right)\xi^{(1)}\end{matrix}\right\|_{l_2^2}^2=\left\|\left(B-B_N'\right)\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2$$

$$+\left\|\left(B-B_N'\right)\xi^{(1)}\right\|_{l_2}^2$$

$$\leqslant\left\|B-B_N'\right\|^2\left(\left\|\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2+\left\|\xi^{(1)}\right\|_{l_2}^2\right)$$

$$=\left\|B-B_N'\right\|^2\left\|\xi\right\|_{l_2^2}^2$$

即是

$$\left\|T_1-T_{1N}'\right\|\leqslant\left\|B-B_N'\right\|\longrightarrow 0\ .$$

同理

$$\left\|\left(T-T_N'\right)\xi\right\|_{l_2^2}^2=\left\|\begin{pmatrix} A-A_N', & B-B_N' \\ B-B_N', & A-A_n'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^{(1)} \\ \xi^{(2)}\end{pmatrix}\right\|_{l_2^2}^2$$

$$=\left\|\begin{matrix}\left(A-A_N'\right)\xi^{(1)}+\left(B-B_N'\right)\xi^{(2)} \\ \left(B-B_N'\right)\xi^{(1)}+\left(A-A_N'\right)\xi^{(2)}\end{matrix}\right\|_{l_2^2}^2$$

$$=\left\|\left(A-A_N'\right)\xi^{(1)}+\left(B-B_N'\right)\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2+\left\|\left(B-B_N'\right)\xi^{(1)}\right.$$

$$\left.+\left(A-A_N'\right)\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2\leqslant\left\|A-A_N'\right\|^2\left\{\left\|\xi^{(1)}\right\|_{l_2}^2\right.$$

$$\left.+\left\|\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2\right\}+\left\|B-B_N'\right\|^2\left\{\left\|\xi^{(1)}\right\|_{l_2}^2+\left\|\xi^{(2)}\right\|_{l_2}^2\right\}$$

$$=\left\|A-A_N'\right\|^2\left\|\xi\right\|_{l_2^2}^2+\left\|B_N'-B\right\|^2\left\|\xi\right\|_{l_2^2}^2$$

即

$$\left\|T-T_N'\right\|\leqslant\left\{\left\|A-A_N'\right\|^2+\left\|B-B_N'\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\rightarrow 0\ .$$

又因为T_1是正定的，根据§4的定理，$T_1^{-1}, T_{1N}'^{-1}$ 存在并且是定义在整个l_2上的线性有界算子；再者还有

$$\left\|T_1^{-1}-T_{1N}'^{-1}\right\|_{N\to\infty}\rightarrow 0\quad . \tag{5.11}$$

对(5.4)作用以 $T_{1N}'^{-1}$，得到：

$$\xi_N'-\lambda G_N'\xi_N'-\eta_N'=0 \tag{5.12}$$

这里

$$G_N'=T_{1N}'^{-1}T_N',\quad \xi_N'=\begin{pmatrix}\xi_N^{(1)'}\\ \xi_N^{(2)'}\end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$\eta_N^1=T_{1N}'^{-1}\begin{pmatrix}\zeta_N^{(1)'}\\ \zeta_N^{(2)'}\end{pmatrix}=T_{1N}'^{-1}\zeta_N' \tag{5.14}$$

由于 $\left\|T_{1N}'^{-1}-T_1^{-1}\right\|\rightarrow 0$，$\left\|T_N'-T\right\|\rightarrow 0$，必有

$$\left\|G-G_N'\right\|\rightarrow 0 \tag{5.15}$$

回忆得到ζ，ζ_N'的过程可以看到(3.8)式的ζ与(5.14)的ζ_N'有关系

$$\zeta=\left\{\zeta_1^{(1)},\zeta_2^{(1)},\zeta_3^{(1)}\cdots;\ \zeta_1^{(2)},\zeta_2^{(2)},\zeta_3^{(2)}\cdots\right\}^T\epsilon l_2^2$$

$$\zeta_N'=\left\{\zeta_1^{(1)},\zeta_2^{(1)}\cdots\zeta_N^{(1)},0,0\cdots\cdots;\ \zeta_1^{(2)},\zeta_2^{(2)}\cdots\zeta_N^{(2)},0,0\cdots\right\}^T\epsilon l_2^2$$

可见
$$\|\zeta-\zeta'_N\|^2_{l_2}=\left\|\{0,0,\cdots\zeta^{(1)}_{N+1},\zeta^{(1)}_{N+2}\cdots\}\right\|^2_{l_2}$$
$$+\left\|\{0,0,\cdots\zeta^{(2)}_{N+1},\zeta^{(2)}_{N+2},\cdots\}\right\|^2_{l_2}\to 0 \tag{5.16}$$

由此即得：
$$\|\eta-\eta'_N\|^2_{l_2}=\|T_1^{-1}\zeta-T'^{-1}_{1N}\zeta'_N\|^2_{l_2}\to 0 \tag{5.17}$$

综合所得结果，我们有方程(3.11)和(5.12)
$$\xi-\lambda G\xi-\eta=0$$
$$\xi'_N-\lambda G'_N\xi'_N-\eta'_N=0$$

G, G'_N是全连续算子，并且
$$\|G-G'_N\|\to 0,\ \|\eta-\eta'_N\|\to 0$$

对于这样性质的两个方程，文献〔5〕中§50的定理指出：当λ是方程(3.11)的正规值时，对于足够大的N，这个λ也是方程(5.12)的正规值，并且当$N\to\infty$时(5.12)的解趋于(3.11)的解。方程(5.12)的特征值当$N\to\infty$时取极限便得到方程(3.11)的特征值。

定理证毕。

§6 方程(1.1)——(1.4)的解

泛函(1.5)的驻点是否满足基本方程和边界条件呢？本节几乎采取与〔4〕中处理牛曼问题完全相同的方法得到定理。

定理四 如果$W_2^{(1)}(\Omega)$中元素ϕ_1, ϕ_2是(1.5)的驻点，则

(1)ϕ_1，ϕ_2在Ω中有任意阶连续导数，并且满足基本方程 $\Delta\phi_1=\Delta\phi_2=0$。

(2)设Ω_n是包含在Ω内且趋于Ω的递增区域序列，序列中每个域都有充分光滑的边界，则对于任何$\xi\in W_2^{(1)}(\Omega)$成立等式：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{S_F}\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\xi ds+\iint_{S}\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\xi ds+\iint_{S^n}\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\xi ds\right]$$
$$=\iint_S\xi(K\phi_1+P_1)ds+\iint_{S}\xi(K\phi_2+Q_1)ds+\iint_S\xi F_1 ds\ .$$
$$\lim_{n\to\infty}\left[\iint_{S}\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\xi ds+\iint_{S}\frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}\xi ds+\iint_{S^n}\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\xi ds\right]$$

$$\iint_S \xi(K\phi_2+p_2)ds + \iint_S \xi(-K\phi_1+Q_2)ds + \iint_S \xi F_2 ds \ .$$

证明：在(3.2)式中，记$\xi_1=\delta\phi_1$，$\xi_2=\delta\phi_2$，并假定它们在边界$S+S_F+S_R$的某个带形区域内$\xi_1=\xi_2=0$，那么得到

$$0=\delta J=(\phi_1,\xi_1)_*-(\phi_2,\xi_2)_*$$

$$=\iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial\xi_1}{\partial z} \right\} d\Omega$$

$$-\iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\frac{\partial\xi_2}{\partial y}+\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\frac{\partial\xi_2}{\partial z} \right\} d\Omega .$$

上式对任何属于$W_2^{(1)}(\Omega)$的并在边界某个带形区域内为0的ξ_1，ξ_2成立，这必然导致：

$$\iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z} \right\} d\Omega=0 \quad ;$$

$$\iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z} \right\} d\Omega=0 \quad .$$

〔4〕中指出，由此推得ϕ_1,ϕ_2在Ω内有任意阶的连续导数，并且$\Delta\phi_1=\Delta\phi_2=0$。

定理第二部分也很显然，由ϕ_1,ϕ_2满足拉氏方程，把下列积分进行分部积分，可得：

$$\iiint_{\Omega_n} \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z} \right\} d\Omega=\iint_{S^n+S_F^n+S_R^n} \frac{\partial\phi_1}{\partial n}\eta ds_n$$

对于ϕ_2也有同样关系。并且有：

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{\Omega_n} \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z} \right\} d\Omega$$

$$=\iiint_\Omega \left\{ \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\frac{\partial n}{\partial z} \right\} d\Omega$$

把这些关系代入(3.2)式：

$$0=\delta J=\left[\lim_{n\to\infty}\iint_{S^n+S_F^n+S_R^n} \frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\eta_1 ds_n - K\int_S \eta_1 F_1 ds - \iint_{S_F}\left(k\phi_1+p_1\right)\eta_1 ds\right.$$

$$-\iint_{S_F}\eta_1\left(k\phi_2+Q_1\right)ds\Big]-\Big[\lim_{n\to\infty}\iint_{S^{n}+S_I^{n}+S_R^{n}}\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\eta_2 ds-k\iint\eta_2 F_2 ds$$

$$-\iint_{S_F}\left(k\phi_2+p_2\right)\eta_2 ds-\iint_{S_F}\eta_2\left(Q_2-k\phi_1\right)ds\Big]\quad.$$

由η_1,η_2的独立性，即可得到定理后半部证明。

参考文献

[1] J.J. Stoker, Water Wave.

[2] 高品純志.有限要素法による流体力の計算例，日本造船学会论文集，第136号，p141—151.

[3] 瀬戸秀幸，有限要素法による为定常波动問題的基础研究，日本造船学会论文集，第136号 p181—189.

[4] Соболев С.Л. 泛函分析在数学物理中的应用。

[5] С.Г. 米赫林，数学物理中的直接方法。

[6] В.И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，五卷二分册。

[7] 关肇直，泛函分析講义。