

层流附面层的动力过程分析

侯晖昌

(广东省水利水电科学研究所)

(一) 导 言

本世纪三十年代,当尼古拉兹莱查尔特进行光管水流试验,并用以下无量纲变量

$$\phi = \frac{u}{u_*}, \quad \eta = \frac{y u_*}{\nu}$$

(此处 u_* 为摩擦流速, y 为以管壁为「0」点绘二者关系时,得到图1结果。试验结果揭示,普兰特的湍流平均流速分布半经验理论(图中③线)并不适合近壁区域。

只有当 $\frac{y u_*}{\nu} > 70$ 时,才属完全

湍流区域,在 $10 < \frac{y u_*}{\nu} < 70$ 区域,

则属过渡区,而在 $\frac{y u_*}{\nu} < 10$ 区域,则

属纯层流区域(图中①线)。后者区域在文献中常称为层流附面层。

如从时均流速分布角度来看,则层流附面层的界面,和层流边界层的界面一样,也是不确定的,即不是截然的。但是,如从动力特性角度来看,则界面是十分鲜明的。一些文献^(1,2)确定其厚度 δ 为

$$\frac{\delta u_*}{\nu} \approx 11.6, \quad \text{或} \quad \delta \approx \frac{11.6 \nu}{u_*} \quad (1)$$

实际上,不仅仅在管流附壁,在一切内外流边界上,除了在端部存在层流边界层和过渡性质的分布外,其余部分都存在层流附面层。

长期以来,由于其层薄,由于试验技术未将其动态特性充分揭示出来,也由于

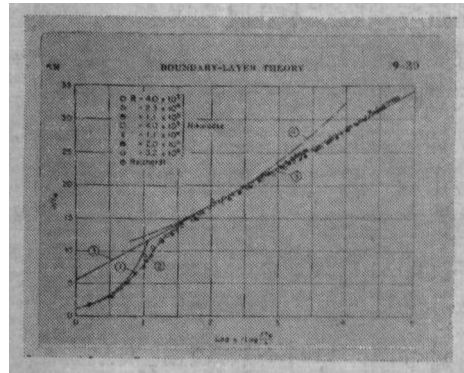


图 1

本文1976年2月收到

一些由层流附面层运动派生的现象复杂,往往不是凭直观所能判断的,故对附面层的存在很少引起人们的重视。在60年代初期以前,基本上只是停留在企图对其流速分布计算的进一步精确化^[3,4]而已。

与此同时,从五十年代初开始,实验发现,在一定条件下在层流附面层内也存在波动,以及由波动产生的规则排列的临近边界的漩涡^[5,6];实验发现,层流附面层的破裂是发生在扰动波峰^[7,8]。另一方面,层流附面层转变为湍动是通过突发的湍点(turbulent spot 暂译名,即在层流附面层上突然出现的湍动孤岛)。形式实现的^[9]。这种湍点,不仅其瞬时几何形态是不规则的,且其出现的间歇时间与出现位置都是完全随机的。

近年来的实验更进一步深入观察了突发湍点的动力性质,发现^[10]湍点突发最初是发生在 $0 < \eta < 100$ 区域,即在过渡区以内。这只是大致确定产生的起始位置。在突发瞬间,高速水流穿入附面层,而以低速射出^[10],这就揭示了湍点的能量来源。在突发前瞬间流速分布如图2所示。这观测结果确定,突发的“扳机”大致是在 $\eta \approx 15$ 之处,因在该处出现流速分布的拐点。新近的实验还发现,在流核区的湍动速度场也是由近壁区高速旋转的漩涡破裂所产生的^[11]。该作者认为,这“可能”与前述突发过程有关;因实验发现,当近底层流破裂时,底部波动就强烈发展,这时,在流核区就出现大尺度的扰动^[11]。实际上,流核区的低频湍动来源于临边界漩涡,这早已有直接的实验和直观证明,只不过与附面层的波动破裂直接联系起来,这乃是近年试验技术发展的结果。

有关层流附面层的直接实验研究状况大致就是这样。

从理论研究方面来说,则只是刚刚开始出现一些定性的图形^[10,12],在这方面看法还很分歧。

本文的目的就是企图对层流附面层的整个发展过程作理论上的统一的阐明。这样做的目的不只是理论发展本身的需要,也是实际的需要。由于实际的一切粘性流动都是有边界的,因此,层流附面层是普遍地存在的。而且,对内流来说,以下我们将证明,内流层流附面层流速分布似是遵循同一规律。由于层流附面层的状况

实际上影响着流核和边界,因此,从理论上澄清它已成为当前迫切的科研任务。在前文^[13]中我们已概括地提到了层流附面层与减阻的关系。实际上,层流附面层的运动还派生许多特殊现象,并影响着许多方面。这些,我们将在下面阐述。

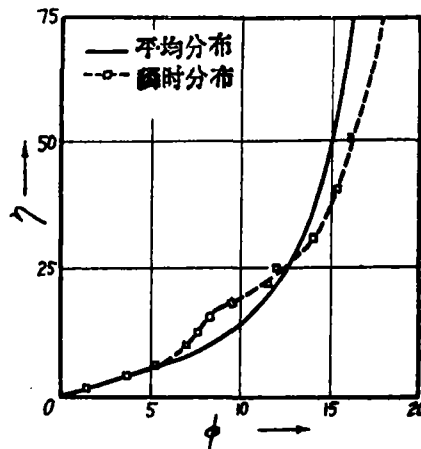


图 2

在以后各节，我们将对层流附面层的整个发展过程按程序与阶段分别对其特性进行分析，先从流速分布谈起。

(二) 层流附面层流速分布

目前，文献习惯地近似地认为，管流层流附面层流速分布遵循线性规律：

$$\phi = \eta \tag{2}$$

从图 1 可见，这只是在很近壁区才符合。离边界愈远，偏离愈大。因此，要从其它途径推导较精确的分布公式。兹推导其分布规律：令边界摩阻力 τ_0 与压力梯度相平衡，则

$$\tau_0 = r \frac{dp}{dx} = \rho u_*^2$$

在上式中 r 为管半径。另一方面，由于附面层内属层流流动，则由 Navier - Stokes 方程可得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) = 0$$

因此（下标 x 略去）

$$-\frac{2u_*^2}{r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{3}$$

积分（3）式得到

$$u = \frac{\rho u_*^2}{r \mu} y^2 + Ay + B \tag{4}$$

边界条件为（图 3）

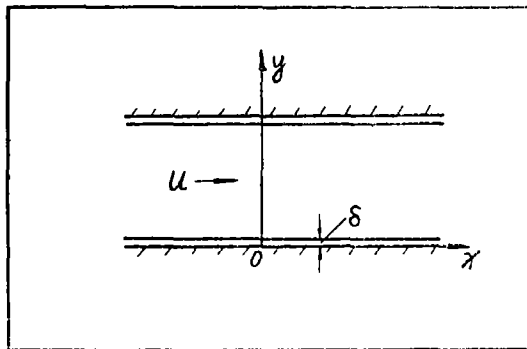


图 3

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0, \quad u = 0, \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \delta, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{u_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right) \end{array} \right. \tag{6}$$

将(4)满足(5), 可知 $B=0$; 代入(6)求出 A 为

$$A = \frac{u_*^2}{\nu} \left(1 - 3 \frac{\delta}{r} \right)$$

因此, (4)式为

$$u = \frac{\rho u_*^2}{r \mu} y^2 + \frac{u_*^2}{\nu} \left(1 - 3 \frac{\delta}{r} \right) y \quad (7)$$

或整理成 ϕ, η 的关系,

$$\phi = \frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \left(1 - 3 \frac{\delta}{r} + \frac{y}{r} \right) = \eta \left(1 - 3 \frac{\delta}{r} + \frac{y}{r} \right) \quad (8)$$

由于一般 $0 < y < \delta$, $\delta \ll r$, 则 $\frac{\delta}{r}, \frac{y}{r} \ll 1$, 故

$$\phi \approx \eta$$

但一般说, 附面层的分布遵循抛物线规律。

在层流附面层稳定性分析中, 无量纲流速和距离采用 $\bar{u} = \frac{u}{u_*}$, $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$, u_* 为附面层表面流速, 则(8)式可化成

$$\bar{u} = \bar{y} [A + (1-A)\bar{y}] \quad (9)$$

在上式中

$$A = \frac{1 - 6 \frac{\delta}{D}}{1 - 4 \frac{\delta}{D}}$$

此处 D 为管直径。

明流(图4)层流附面层流速分布式求法如下: 由于

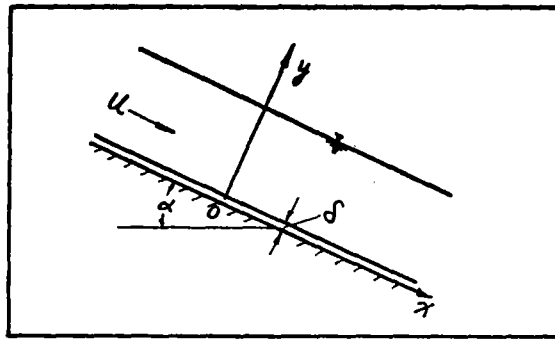


图 4

$$\begin{cases} g \sin \alpha + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (10)$$

积分第二式得到

$$p = C = \rho g y \cos \alpha$$

在附面层内 δ ,

$$p_s = C - \rho g \delta \cos \alpha, \quad C = p_s + \rho g \delta \cos \alpha$$

故

$$p = p_s + \rho g(\delta - y)$$

即在附面层内压力仍按静压力分布。如令切应力也是沿深直线分布, 则

$$\tau_s = \tau_0 \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{\delta}{h}\right)$$

故边界条件为

$$\begin{cases} y = 0, & u = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \frac{u_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) \end{cases} \quad (12)$$

积分(10)第1式, 得

$$u = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + Ay + B$$

代入(11), (12), 得到

$$u = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} \left\{ 2\delta + \frac{2u_*^2}{g \sin \alpha} \left(1 - \frac{\delta}{h}\right) - y \right\} \quad (13)$$

令

$$A = \frac{2\left(\frac{h}{\delta}\right)}{2\left(\frac{h}{\delta}\right) - 1}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_s}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta},$$

则(13)亦化简为

$$\bar{u} = \bar{y} [A + (1 - A)\bar{y}] \quad (14)$$

因此, 抛物线分布规律是内流层流附面层的共性。

文献^[3,4]应用普兰特理论也得到较符合实验结果的流速分布式, 但形式复杂, 不便于据以进行稳定性的分析。

对于流体沿着水平无限半平面(气流吹过水面)的附面层分布问题, 因流速恒定, 故 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, 则运动方程为

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

由于气流与边界面平行, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

则由连续方程可知

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

因此

$$v = \begin{cases} const = v_0, \\ 0 \end{cases}$$

故这类附面层的特点是其垂向分速为常数。而影响 v_0 值大小的因子只可能是附面层外流速的大小，亦即 $v_0 = v_0(U)$ ，这关系须由实验来确定。

如 $v = v_0$ 则(15)式第1式写成

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{16}$$

积分之得到

$$u = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{v_0 y}{\nu}\right) \tag{17}$$

边界条件可确定为

$$\begin{cases} y=0, & u=0; \\ y=\delta, & u=U. \end{cases} \tag{18}$$

令(17)满足(18)后得到

$$u = \frac{1 - \exp\left(\frac{v_0 y}{\nu}\right)}{1 - \exp\left(\frac{v_0 \delta}{\nu}\right)} U$$

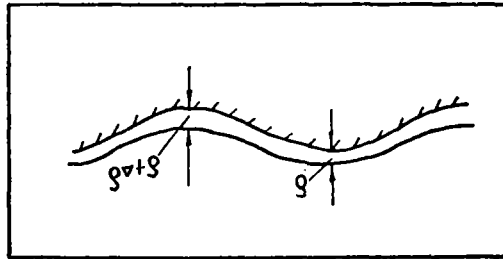


图 5

则

$$\bar{u} = \frac{u}{U} = \frac{1 - \exp\left(\frac{v_0 y}{\nu}\right)}{1 - \exp\left(\frac{v_0 \delta}{\nu}\right)} = \frac{1 - \exp R y}{1 - \exp R} \tag{19}$$

在上式中

$$R = \frac{v_0 \delta}{\nu}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}$$

(19)式在形式上与一般的薄板均匀吸气边界层流速分布公式相类，但又有区别。对前者来说， R 直接影响到流速分布的形态。

$\bar{u} = \bar{u}(R, \bar{y})$ 数值关系如图5所示，

如 $v_0 = 0$ ，则 $\bar{u} = \bar{y}$ ，如图虚线所示。

(三) 层流附面层稳定性

层流附面层受到某波长波幅外扰的作用,可能处于激励衰减或中性稳定状态。令初期扰动是线性的,则线性扰动函数 f 满足 *Orr - Sommerfeld* 方程:

$$(\bar{u} - c)(f'' - \alpha^2 f) - \bar{u}'' f = - \frac{i}{\alpha R} (f^{IV} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) \quad (20)$$

上面, α, C, R 各为无量纲波长,波速与雷诺数,即

$$\alpha = \frac{2\pi\delta}{\lambda}, c = \frac{c}{u_0}, R = \frac{u_0\delta}{\nu}$$

而导数则是对 y 言。

和层流边界层一样,由于在边界面上流速亦为零,即当 $y = 0, u_x = u_y = 0$,则由 f 定义可得

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (21)$$

其次,令附面层外流动属完全湍流, R 无限增大,在附面层外无粘性流动,则在附面层外(20)式右边项趋于零。而由(9)与(14)

$$\bar{u}'' = 2(1 - A)$$

由于 A 实际上非常接近1,因此, $\bar{u}'' \approx 0$ 。这样一来,第3边界条件也可取用层流边界层稳定性的边界条件,即

$$f'(1) + \alpha f(1) \approx 0 \quad (22)$$

这样,根据(9)或(14)与(20), (21), (22),就可进行层流附面层中性稳定曲线的计算。应用林家翘方法(数值计算程序见文献^[14, 15])计算出当 A 逼近 1 时中性稳定曲线的一支的数值结果如表 1:

表 1

C	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
α	0	0.050	0.118	0.213	0.342	0.537	0.809	1.066
R	∞	2.415×10^5	1.292×10^4	2124.9	558.2	191.9	70.0	33.4

实际上,在内流中出现的层流附面层雷诺数的变幅并不是很大的。其原因是,从物理图形方面来说,当流核平均流速增大,即当附面层面流速增大时,附面层厚度却相应减小,内流保持不变的雷诺数可简单地求出,例如,由(7),附面层面流速 u_0 为

$$u_0 = \frac{\rho u_*^2}{r\mu} \delta^2 + \frac{u_*^2}{\nu} \left(\delta - 3 \frac{\delta^2}{r} \right)$$

由于 $\frac{\delta}{r} \approx 0$, 故忽略 δ 平方项, 即

$$u_0 \approx \frac{u_*^2 \delta}{\nu}$$

而由(1),

$$\delta \approx \frac{11.6\nu}{u_*}$$

因此, 实际存在的附面层雷诺数大致在

$$R = \frac{u_0 \delta}{\nu} \approx \frac{11.6 u_*}{\nu} \frac{11.6 \nu}{u_*} \approx 135 \quad (23)$$

以上 R 值从表 1 可内插得到

$$\alpha = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \approx 0.625 \quad (24)$$

因此, 初生中性扰动波长为

$$\lambda \approx \frac{2\pi\delta}{0.625} \approx 10\delta \approx \frac{116\nu}{u_*} \quad (25)$$

故只要给定摩阻流速值, 就可估算出扰动波长值。如一般 $u_* = 5 \text{ cm/s} \sim 10 \text{ cm/s}$, 对水来说则初始扰动波长大致在 $0.1 \sim 0.5 \text{ cm}$ 范围。

从附面层流速分布式与表 1 数据我们不难计算出相当于前述附面层雷诺数范围的附面层中性扰动频率 n ($=c/\lambda$) 在 $0.5 \sim 2.0$ 赫芝之间。所以, 附面层的扰动是属低频扰动。

无限半平面的附面层即(19)式的稳定性分析需留作以后进行。在本文以后的阐述中, 我们将着重对内流附面层的发展进行分析。

(四) 层流附面层的发展

内流层流附面层受到如(25)式所示的波长扰动以后, 附面层将产生中性扰动。所谓中性扰动, 简单说就是扰动幅度在时间过程中保持不变。以求解 Orr-Sommerfeld 方程为表现形式的稳定性线性理论, 在实质上是假定扰动幅度值是这样小, 以致由波动所产生的雷诺切应力 $\overline{\rho u'v'}$ 对附面层的平均流速场的影响是可以忽略的。而且, 线性理论对扰动幅度的绝对值大小也并无具体规定。实际情况是, 在给定雷诺数情况下, 不仅仅导致中性扰动的无量纲中性扰幅是一定的, 而扰幅的绝对值

也不是任意的。稳定性非线性理论^[16,17]认为,微波的发展与平均流速场之间存在着互相制约、互相影响的关系;扰动绝对值不能无止地发展,当扰动发展到这种地步,以致当从平均流场向扰动输送的单位时间、单位流体的能量完全等于扰动流体由于粘性引起热能散失值时,扰动便停止发展。这时,扰动处于平衡状态。

因此,层流附面层的初期的线性微波扰动是要向非线性的即有限与平衡的波幅扰动发展的。

以上仅仅限于对二元图形的讨论。层流附面层发展到平衡扰幅后并不意味着发展过程已终了,过程还要继续发展。这就是:二元平衡的扰动要转变为三元扰动。层流二元扰动转变为三元扰动过程的必然性,其理论上的证明早在30年代就已完成了^[18]。该文献得到的原结论是:对三元扰动来说,如果层流流态在给定的雷诺数情况下为不稳定的,则对二元扰动来说,要比前者的雷诺数更小的情况下出现不稳定。换句话说,在层流中,二元扰动开始产生不稳定的雷诺数比三元的为小。这就是说,在层流中,三元扰动比二元扰动更稳定,而由于粘性流动的倾向总是在于建立稳定的能态最低的状况,因此,二元扰动必然要向三元扰动过渡。

60年代初,文献^[19]作者又进行了平板绕流的两种情况(二元与三元扰动)的数值计算。具体的计算证明了三元扰动的不稳定区是比二元的缩小了。并且,整个三元不稳定区是处于二元不稳定区之内。这就是说,存在这样的区域,对二元扰动是不稳定的,但对三元扰动则是稳定的。这是三元扰动比二元扰动更稳定的进一步说明。

这个早在30年代就已得到的简单而明晰的数学结论曾为一些人所怀疑,但后来无数实验和实际都直接或间接证明了这理论预见的正确性。例如,近来文献^[20]的实验也对此提供了鲜明直观的证明。

所以,层流附面层扰动的发展必然从二元转变为三元,即从平行于平均流速的扰动发展为倾斜的扰动。也由于扰动转化为三元之后使层流附面层内外的流态复杂化,这就反过来影响扰动自身,使扰在转变为漩涡并破裂以最终转变为湍动之前不仅仅具有三元性质,也具有一些随机性质。

下一步的问题便是:层流附面层的三元扰动如何转化为湍动的?层流附面层的波动终将转化为临边界的漩涡,这是已为实验所证实的,而临边界漩涡的破裂和分解就是低频湍动的起源。如果在流核区不存在自由湍动,不存在流核与过渡区对附面层的影响,而只存在后者对前者的影响,则我们只能观测到附面层波动发育发展而产生的湍动,而因为波动是周期的,则湍动也应该是简谐的。由扰动发展本身转化为湍动这只是情况的一方面,是低频湍动的纯力学根源。但是,还有另方面的情况,这就是:过渡区与流核对附面层实际是有影响的。由于自由湍动是随机的,则它对附面层发展的影响也是随机的,这种影响有可能比平均情况加速或减缓扰动的发展。图2只是表明,在附面层破裂前夕,在附层面区域发生过能量的重分配,但没有也无法表明,这部份能量从何而来,这重分配是附面层扰动自身发展的结果

呢，还是自由湍动的能量传递的结果。我们认为，两种可能性都是存在的，它们都是通过能量的重分配即改变局部流速场来对附面层施加影响的。

总之，临边界漩涡的破裂是既具有力学的必然性，又具有统计规律性的现象。也就是说，湍点是漩涡破裂的直观表现，因此，它也是既具有力学的必然性，又具有统计规律性的现象。强调指出这一点很必要，因为，到目前为止，文献还认为，它的发生完全是偶然的。在后一节我们将定量地证明湍点的这两重性。

(五) 微波的巨化过程

如果边界是刚性的，则附面层从微波扰动到发生破裂的整个过程已如上述。在整个发展过程中，扰动的绝对几何尺寸没有显著的改变。

如果边界是柔顺的（弹性的，松散体并可塑变的，或流体自身组成边界等），则过程要复杂些。在这情况下微波是要“生长”的。微波将逐渐发展转变为在几何形态上与初生微波相似的（即中性扰动无量纲波长值保持近相同值）但其几何尺寸绝对值则比初生时数值大得不可比拟的巨型波动。这个过程，我们暂称之为巨化过程。

附面层的波动在柔顺边界情况下之所以会发生巨化，其理由我们解释如次：在一定的附面层雷诺数情况下，维持中性波动的 α 值为定值，即

$$\alpha = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \text{const}$$

在平直刚性边界情况下， λ ， δ 都是不变的。但如边界柔顺，即它随附面层波动而波动或塑变，则由于附面层波动与边界波动的不同步，或虽同步但二者波动幅度的不同，将使附面层在局部地区出现增厚现象（图6）：

如由于上述原因使附面层增厚 $\delta + \Delta\delta$ ，并令波动仍处于二元发展阶段，则为了保持 α 不变，水流自身要求 λ 亦增值为 $\lambda + \Delta\lambda$ ，它等于

$$\lambda + \Delta\lambda = \frac{2\pi(\delta + \Delta\delta)}{\alpha}$$

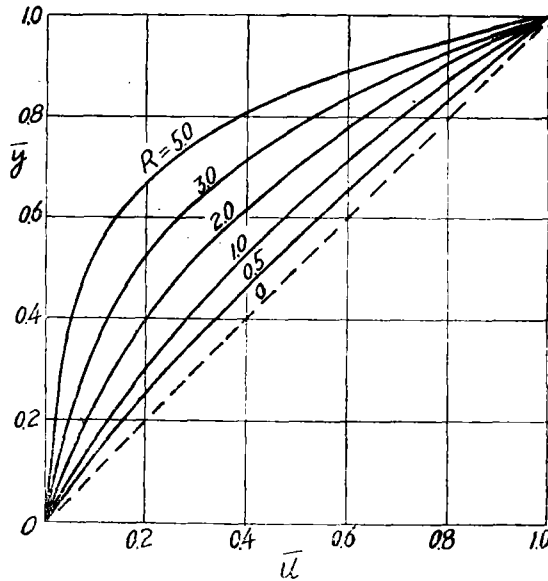


图 6

如果这种不协调、不同步继续存在，则这种巨化过程将继续下去。

当然，这种解释是极其粗糙的。巨化过程是一个在文献中完全空白着的问题，我们只是从一些现象归纳推断它的客观存在。

正如线性扰动不能无限止地发展一样，巨化过程也不可能无限止地发展下去。但是，从理论上来说，巨化过程的完结是由于边界波动与附面层波动最后出现了协调或同步现象，还是由于非线性扰动幅度使能量的重分配达到了新的平衡，则目前还是一个未接触过的研究课题。

(六) 湍点与低频湍动的分布规律

前面提到，实验已揭示，流核区的低频湍动与边界面上的湍点是密切地联系着的，前者是后者的产物。因此，我们可以低频湍动能量的实验频率分布结果来探讨验证湍点的发生与分布规律。

30年代时文献⁽²¹⁾的作者曾在风洞中进行了湍动能频率分布试验。其雷诺数 $\frac{uD}{\nu}$ 约为8,000左右，其实验湍动频率分布曲线如图7：

在上图中纵座标 n 代表湍动动能频率，向横座标 $F(n)$ 代表其频率密度，亦即曲线包围面积为1：

$$\int_0^{\infty} F(n)dn = 1 \quad (26)$$

上图表明，尽管湍点产生的地点、时距是随机的，但其频率分布具有鲜明的规律性——所有试验点子都落在—根光滑而连续的曲线上。而且，其分布形式沿深度不变，这正说明流核的低频湍动具有同一来源，即流核内低频湍动能来源于附面层破裂时的冲击。

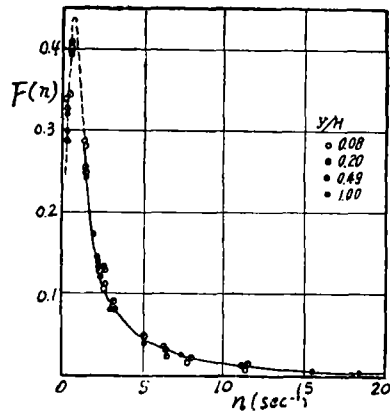


图 7

以下我们就证明，图7的分布就代表湍点频率分布规律。而且，还将以此图来验证我们推导的理论湍点频率分布规律的正确性。

现观察边界上一固定点湍点发生的概率。令该点相邻两次湍点产生的时距为 T ，而时距分布又是连续的。时距概率分布函数定义为

$$F(t) = p(T < t)$$

对立事件概率为

$$1 - F(t) = p(t > T) \quad (27)$$

上式的涵义是：从发生某一次湍点时间起算，经过 T 时距仍未在同点再发生另一次湍点的概率。

在该点在时间 $t + \Delta t$ 时发生 x 次湍点的可能性有两种，一是当时间为 t 时已发生了 x 次，而在经过 Δt 时未再发生；另一种可能性是当时间为 t 时曾发生 $x-1$ 次，而在经 Δt 后增加了一次。令

$p_x(t)$ ………为时间 t 时发生 x 次湍点的概率，

$p_x(t + \Delta t)$ ………为时间 $t + \Delta t$ 时仍为 x 次的概率，

$p_{x-1}(t)$ ………为时间 t 时只发生 $x-1$ 次的概率，

并令单位时间内在该点产生次数为平均值的数学期望为 n_0 。（如果认为湍点是由附面层波动转化而来，则 n_0 也就是附面层中性波动的频率。），则在经时距 Δt 湍点发生次数为平均值的数学期望为 $n_0 \Delta t$ ，而不发生的数学期望则为 $1 - n_0 \Delta t$ 。根据定义可得

$$p_x(t + \Delta t) = (1 - n_0 \Delta t) p_x(t) + n_0 p_{x-1}(t) \Delta t$$

写成微分形式

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -n_0 p_x(t) + n_0 p_{x-1}(t) \quad (28)$$

上式适合于 $x \geq 0$ 。当 $x = 0$ 时，应有 $p_{x-1}(t) = 0$ ，故得

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -n_0 p_0(t) \quad (29)$$

起始条件是，在 $t = 0$ 时尚未发生湍点。故

$$\begin{cases} p_0(0) = 1 \\ p_x(0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

从(28)，(29)与(30)可得到

$$p_x(t) = \frac{(n_0 t)^x}{x!} e^{-n_0 t} \cdot (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (31)$$

这就是泊桑过程^[22]。

对湍点发生图形来说，有实际意义的是 $p_0(t)$ 。因此，

$$1 - F(t) = e^{-n_0 t}$$

即

$$p(T < t) = F(t) = 1 - e^{-n_0 t} \quad (32)$$

顺便要指出，文献^[9]曾导出过湍点间歇参数概率分布形式为

$$P = 1 - e^{-\int_R g(p_0) dV_0}$$

虽上式与它相似，但后者积分不仅是不具体的（ R 为湍点影响区域， g 为取决于湍

点影响体积的函数。), 且无力学内容。

现将(32)对 t 微分

$$f(t) = n_0 e^{-n_0 t}$$

T 分布的数学期望为

$$m_t = \int_0^{\infty} n_0 t e^{-n_0 t} dt = \frac{1}{n_0}$$

n_0^{-1} 代表每发生一次所需时间为平均数的数学期望。

概率函数 $f(t)$ 满足

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} n_0 e^{-n_0 t} dt = 1 \quad (33)$$

现令

$$t = \frac{1}{n}, \quad dt = -\frac{dn}{n^2}, \quad f(t) = n_0 e^{-n_0 t} = n_0 e^{-\frac{n_0}{n}}$$

则

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = - \int_{\infty}^0 \frac{n_0}{n^2} e^{-\frac{n_0}{n}} dn = \int_0^{\infty} \frac{n_0}{n^2} e^{-\frac{n_0}{n}} dn = 1 \quad (34)$$

比较(34)与(26), 可知

$$F(n) = \frac{n_0}{n^2} e^{-\frac{n_0}{n}} \quad (35)$$

(34), (35)就是湍点频谱分布公式, 也就是流核低频能谱分布公式。从上式可见, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $F(n) \rightarrow 0$; 当 $n \rightarrow 0$ 时, $F(n) \rightarrow 0$; 存在 $F(n)_{max}$, 这就是湍点的众值。从

$$\frac{\partial F(n)}{\partial n} = 0$$

得到

$$n = \frac{n_0}{2}, \quad n_0 = 2n \quad (36)$$

将(36)代入(35), 可求出相当于众值的频率密度函数 $F(n)_{max}$ 为

$$F(n)_{max} = \frac{4}{n_0} e^{-2} \approx 0.541 n_0^{-1} \quad (37)$$

兹以 $n_0 = 0.5, 1.0, 2.0$ 赫芝计算湍点频谱分布曲线如图8。并将图7的试验点子点绘于其上, 可发现试验点子非常光滑地落在 $n_0 = 1.0$ 赫芝计算分布曲线上。这就证明, 流核低频湍动不仅一般地来源于附面层的破裂, 而且, 其频率分布也是与后者相同的。

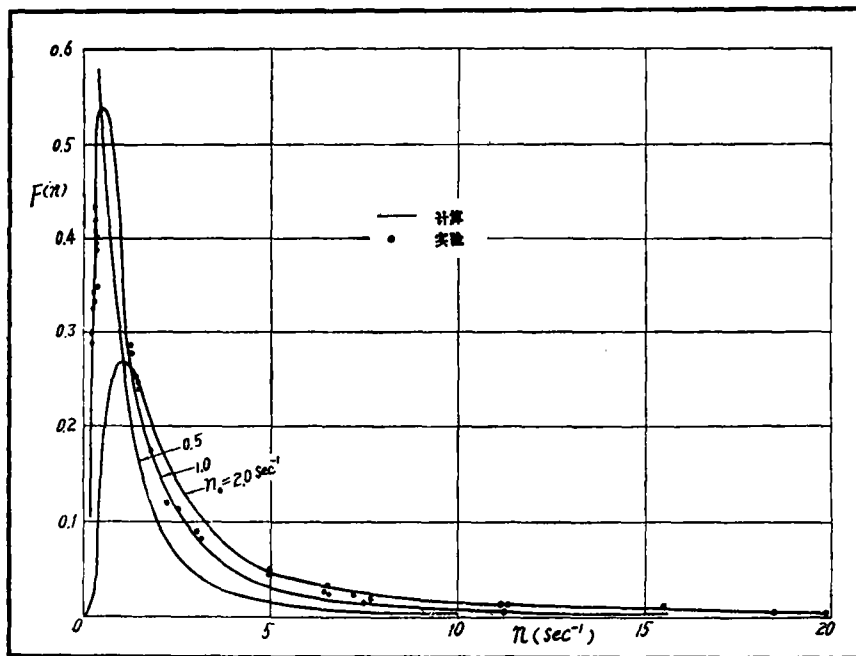


图 8

当然，从(37)式可反算该试验点群相应的真实 n_0 值。而根据该文献所提供的试验条件也有可能估算相应的计算 n_0 值是多少。由于在前几节我们已一般地证明内流的湍动是属低频湍动，而且已确定了其频率范围，因此，进一步的验算就没有什么必要了。

总之，以上分析证实了，湍动的产生不仅具有力学的必然性，而且也具有统计的规律性；并且具体地找到了它的分布规律。

(七) 附面层动态研究的实际意义

层流附面层的波动与发展及其派生现象的研究不仅有其深刻的理论内容，而且有丰富的实际意义。在导言中已概要地提到了这一点。以下把我们接触与认识到的问题分别予以叙述。

(1)关于卡门涡列的成因·卡门涡列是流体力学中的古典问题。但到现在，文献还很少触及它的成因，即它和钝体表面的流态的联系。我们认为，钝体、薄板或叶片等后面所产生的涡列，是与这些物体的两面的附面层流态密切地联系着的。流体脱离钝体后促使附面层的波动转化为漩涡。脱胎于附面层的漩涡，必然带来“母体”所赋予它的频率，这就是涡列内平均频率和低频的来源。而且，由于稳定排列

的漩涡的半列距与行距的比值($0.2806/\lambda = 0.1403$)非常接近附面层中性扰动波幅与波长的比值(≈ 0.1),故脱离钝体的水流较易地在不远距离内就能将波动转化为漩涡。

(2)水轮机与水泵尾水管(吸出管)内的低频振动。国内外的电站与泵站运行经验都表明,当机组不是按所谓设计工况运行时,或流道与流线很不符合时,即当从转轮出来的水流不是轴向而是斜向进入尾水管(或不是平顺进入吸出管)时,往往在其内产生低频振动。这种振动往往成为钢管机组强烈振动与电力负荷波动的根源。之所以会出现这种低频振动,是由于脱离叶片的附面层波动与尾水管(吸出管)的附面层波动频率相同,二者水流互相碰击发生共振之故。

(3)河流沙浪,河流沙浪的出现,是作为河流附面层在可塑变边界情况下巨化发展的产物。尽管有些大河的沙浪波长已达几十米甚至一百多米,比对附面层的初生微波来说,它早已面目全非了。然而,只要它还保留二元正弦形态,它就保留了层流附面层中性扰动的烙印,即其波高波长比值接近 $1/10$ 。至于湍(antidune)^[23,24],则问题稍为复杂些,它还包括了附面层波动的发展与水面波的破裂超前与滞后的问题和可塑变边界转化为正弦波形态的边界后对水面波形态的影响问题。

(4)风浪。文献对风浪的研究已有很长的历史。虽然如此,至今对风浪成因也还没有彻底解决。我们认为,风浪是气流附面层在弹塑的或柔顺的边界面上扰动发展的产物。在无限半平面上附面层流速分布公式已如前述。

在风浪与沙浪的发生、发展过程中无疑都存在巨化过程。

(5)磨损鱼鳞坑。经验表明,在一些含悬移质泥沙较多的河流中,水工建筑物与水机水泵的过水部份表面在经一段时间的运行之后都会出现像鱼鳞状排列的磨损凹坑。这些鱼鳞坑的出现为进一步的气蚀发展开辟了道路。我们认为,鱼鳞坑是水流附面层与悬移质泥沙相互配合的产物。伴随着层流附面层的波动,悬浮在水体与附面层内的悬移质泥沙将周期地与金属表面或混凝土表面接触与碰击,从而产生鱼鳞坑。由于产生鱼鳞坑的边界是刚性的,故在这里不存在巨化现象。

(6)关于海洋内部的风暴漩涡成因,由暖流寒流温差或密度差等等原因引起的流动或对流所产生的剪切流动,也可以产生类附面层及其波动。这种波动,由于边界阻尼比泥沙和不同介质流体的阻尼为小,因此,估计这种巨化过程更为强烈。这种由剪切运动所产生的巨型漩涡,常常是水下运动失事的根源。但因这方面系统的观测和研究还很少,只能作些大略图形方面的推断。

(7)至于减阻,则在前文^[18]中已作了详细阐述,在这里就不再重复了。

(八) 结论和讨论

(1)目前在文献中有关层流附面层的内部结构及其影响问题只有片断的定性的甚至不确切的叙述。对此,本文不仅对附面层的动力性质及其派生现象,以及其整

个发展过程作了较系统的理论上的阐明,而且,在如下几个方面做了定量的验证,与实验和实际相比较取得了较满意的吻合,其中包括:初生微波波长的相对值,绝对值;端点的平均频率及其分布形式,亦即在中等雷诺数情况下流核的低频湍动能频谱分布形式。虽然如此,从总的来说,层流附面层理论还是新的问题,在各方面都还有待进一步深入下去。从层流边界层理论提出到今天,已经经过了整整七十年。但是,作为它的一个分支或组成部份的附面层理论,却发展迟缓,由此影响了许多问题的深入和解决。

(2) 随着生产和科学技术的发展,更为深刻而复杂的问题不是刚性边界的附面层问题,而是柔顺边界(包括弹性边界,弹塑边界,粘弹膜,松散体边界,与流体自身等等)的附面层问题。在这方面的研究目前基本上还处于空白状态。此外,有关巨化过程的理论研究(包括巨化过程与线性发展过程的联系)与实验依然有重大现实意义。可以预期,随着这些问题的逐步提出与解决,不仅将推动生产技术向前发展,而且,还将附面层的理论研究提到新的水平,并将出现一些新的独立学科分支,包括减阻力学,附面层理论,等等。

参 考 文 献

- [1] H. A. Einstein, H. Li, The viscous sublayer along smooth boundary. Proc. ASCE, vol. 82, No. EM1-4, 1956.
- [2] P. S. Virk, H. S. Mickley, K. A. Smith, The ultimate asymptote and mean flow structure in Thoms' phenomenon. Trans ASME, J, Appl. Mech, vol. 37, No. 2, 1970, p. 488.
- [3] Van-Driest, E. R. On turbulent flow near a wall. J. Aero. Sci., vol, 23, No. 11, 2956.
- [4] Tien, C. L. and Wasan, D. T. Law of the wall in turbulent channel flow. Phys, Fluid, vol. 6, No. 1, 1963.
- [5] Wortmann, F. X. Untersuchung instabiler Grenzschichtschwingungen in einem Wasserkanal mittels der Tellurmethode. in <50 Jahre Grenzschichtforschung. edit. by H. Görtler and W. Tollmien Braunschweig, 1955.>.
- [6] Berg, H. A method for visualizing periodic boundary layer phenomena. IUTAM Symposium "Boundary Layer Research. edit. by H. Görtler, Berlin, 1958."
- [7] Hama, F. R., Long, J. D. and Hegarty, J. C. On transition from laminar to turbulent flow. J. Appl. phys. vol. 27, No. 4, 1957.
- [8] Hama, F. R. Boundary-Layer transition induced by a vibrating ribbon on a flat plate. in <proc. 1960 Heat Transt. and Fluid Mech. Inst.>.

- [9] Emmons, H. W. The laminar-turbulent transition in a boundary layer-part I. *J. Aero. Sci.*, vol. 18, 1951.
- [10] Landahl, M. T. Drag reduction by polymer addition. in <Proc. 13th Int. Congr. Theor. Appl. Mech. edit. by E. Becker, G. K. Mikhailov. 1973>.
- [11] Bark, F. H., Hinch, E. J. and Landahl, M. T. Drag reduction in turbulent flow due to additives: a report on Euromech. 52. *J. Fluid Mech.*, vol. 68, part 1, 1975. pp 125—138.
- [12] Black, T. J. Viscous drag reduction examined in the light of a new model of wall turbulence. in <Viscous Drag Reduction. edit. by C. S. Wells, Plenum Press, New-york, 1969.>
- [13] 侯暉昌, 彈性材料护面減阻的研究. 中山大学学报. 1975年第4期.
- [14] Lin, C. C. On the Stability of two-dimensional parallel flows. *Quart. Appl. Math.* 3, 177(1945); 3, 218(1945), 3, 227(1946).
- [15] Lin, C. C. The theory of hydrodynamic stability. Cambridge Univ. press, 1955.
- [16] Stuart, J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic Stability. *J. Fluid Mech.*, vol.4, 1958.
- [17] Stuart, J. T. Non-linear effect in hydrodynamic stability. in <Proc. 10th Inter. Congr. Appl. Mech. 1962>.
- [18] Squire, H. B. On the stability of three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proc. Roy. Soc., A* 142, 1933.
- [19] Tollmien, W. and Grohne, D. The nature of transition. in <Boundary Layer and Flow Control.. edit. by G. v. Lachmann Pergamon Press, Oxford, 1961>.
- [20] Robinson, R. M. and McEwan, Instability of a periodic boundary layer in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, vol 68, part 1, 1975. pp 41-48.
- [21] Motzfeld, H. Frequenzanalyse turbulenter schwankungen. *ZAMM*, 18, 1938.
- [22] Bharucha-Reid, A. T. Elements of the Theory of Markov Process and their applications. Mc Graw-Hill, New-York, 1960.
- [23] Kennedy, J. F. The mechanics of dune and antidune in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.*, vol. 16, part 4, 1963.
- [24] Kennedy, J. F. Stationary waves and antidunes in alluvial channels. Rep. no. KH-R-2, W. M. Keck Laboratory of Hydraulic s and Water Resources, CIT, 1961.