

# 直接控制系统的绝对稳定性准则

朱思铭  
(数学力学系)

## § 1

本文研究直接控制系统<sup>(1)~(6)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\phi(\sigma) \\ \sigma &= c^T x \end{aligned} \quad (1.1)$$

的绝对稳定性。这里 $A$ 是 $n \times n$ 阶实常数矩阵，其特征值均具负实部， $x$ 、 $b$ 、 $c$ 是 $n$ 维实向量， $T$ 表转置。 $\phi(\sigma)$ 是 $\sigma$ 的实连续函数， $\phi(0) = 0$ ，且当 $\sigma \neq 0$ 时满足条件

$$0 \leq \sigma\phi(\sigma) \leq k\sigma^2 \quad (0 < k < \infty) \quad (1.2)$$

研究直接控制系统(1.1)的绝对稳定性时通常采用形如

$$V(x) = x^T Bx + 2\beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma \quad (\beta > 0) \quad (1.3)$$

的二次型加积分项的Ляпунов函数。这里 $B = B^T$ 满足关系

$$A^T B + BA = -G \quad (1.4)$$

矩阵 $G$ 为某正定对称矩阵。

如果 $V$ 函数(1.3) 满足条件

$$V \text{ 定正, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty, \frac{dV}{dt} \text{ 定负} \quad (1.5)$$

则系统(1.1)的零解 $x = 0$  是全局渐近稳定的<sup>(7) p.348</sup>，即系统(1.1)是(在角 $[0, k]$ 内)绝对稳定的。

若把中间变量 $\sigma$ 当作独立变量，可以将 $n$ 阶微分方程组(1.1)变成 $n+1$ 阶微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^T Ax + c^T b\phi(\sigma) \end{aligned} \quad (1.6)$$

但此时由于  $\sigma = c^T x$  的限制, 方程组(1.6)当且仅当初始值满足条件  $\sigma_0 = c^T x_0$  (从而解也满足  $\sigma(t) = c^T x(t)$ ) 时才等价于方程组(1.1), 也就是必须在  $(x, \sigma)$  的  $n+1$  维相空间中的  $n$  维超平面  $\sigma = c^T x$  上研究方程组(1.6), 而在  $n+1$  维相空间  $(x, \sigma)$  上, 方程组(1.6)存在奇线  $x=0$ , 其零解  $x=0, \sigma=0$  是不可能全局渐近稳定的。因此, 对  $n+1$  阶微分方程组(1.6)不加任何限制地证明其绝对稳定性是不可能的, 求出的准则是不可能实现的。但是, 却可以在超平面  $\sigma = c^T x$  上求系统(1.6)的绝对稳定性, 或者直接对系统(1.1)求绝对稳定性的准则。

用  $V$  函数(1.3)研究直接控制系统(1.1)的绝对稳定性时, 正是由于不加限制地用(1.6)代替(1.1)。Lefschetz<sup>(6)</sup>、Летов<sup>(1)</sup>及Reissig、Sansone、Conti<sup>(6)</sup>的著作分别被Meyer<sup>(9)</sup>、Розенвассер<sup>(12)</sup> p.18及赵素霞(1978)发现有关结果是错误的。后来, Айзерман和 Гантмахер<sup>(2)</sup>曾提出用  $S$ -方法研究, 但参数是不确定的。赵素霞(1978)则提出将问题化为在超平面  $\sigma = c^T x$  上判别  $x$  的不等式。均未能求出直接判别准则。

本文给出用  $V$  函数(1.3)直接判断(1.1)的绝对稳定性的准则, 并进一步探讨了  $S$ -方法<sup>(2)</sup>的构造和适用范围。用本文得到的判别准则可以不必再通过  $S$ -方法而直接判断直接控制系统的绝对稳定性。

## § 2

**定理 1** 利用满足条件(1.5)的  $V$  函数(1.3)保证直接控制系统(1.1)在角  $[0, k]$  内绝对稳定的充分必要条件, 是存在正定对称矩阵  $G$  及实数  $\beta > 0$  满足不等式

$$\frac{1}{k} - c^T G^{-1} d > 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b > 0 \tag{2.2}$$

这里

$$d = Bb + \beta A^T c \tag{2.3}$$

而矩阵  $B = B^T$  由(1.4)式确定。

**证** 由于  $G$  是正定对称矩阵, 故  $G^{-1}$  也是正定对称的。且存在满秩矩阵  $D$  满足关系式

$$G = D^T D \quad \text{即} \quad G^{-1} = D^{-1} (D^{-1})^T \tag{2.4}$$

显然, 在矩阵  $A$  的特征值均具负实部、矩阵  $G$  正定对称的条件下, 矩阵方程(1.4)的解  $B = B^T$  是正定的。从而在(1.2)及  $\beta > 0$  条件下,  $V$  函数(1.4)是无限大定正函数。而且

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^T (A^T B + BA) x + x^T B b \phi(\sigma) + b^T \phi(\sigma) B x \\ &\quad + 2\beta c^T A x \phi(\sigma) + 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \end{aligned}$$

$$= -x^T Gx + 2x^T (Bb + \beta A c^T) \phi(\sigma) + 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \quad (2.5)$$

可利用关系式(2.4)(2.3)化简得

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dt} &= x^T Gx - 2x^T (Bb + \beta A c^T) \phi(\sigma) - 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \\ &= x^T D^T D x - 2x^T d\phi(\sigma) - 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \\ &= (Dx)^T (Dx) - 2(Dx)^T (D^{-1})^T d\phi(\sigma) - 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \\ &= [Dx - (D^{-1})^T d\phi(\sigma)]^T [Dx - (D^{-1})^T d\phi(\sigma)] \\ &\quad - (d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b) \phi^2(\sigma) \\ &= \begin{cases} [Dx]^T [Dx] = x^T Gx & \text{当 } \phi(\sigma) = 0 \text{ 时} \\ \{ [D \frac{x}{\phi(\sigma)} - (D^{-1})^T d]^T [D \frac{x}{\phi(\sigma)} - (D^{-1})^T d] \\ \quad - (d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b) \} \phi^2(\sigma) & \text{当 } \phi(\sigma) \neq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2.6) \end{aligned}$$

显然,  $x=0$  时,  $\frac{dV}{dt}=0$ , 当  $\phi(\sigma)=0$  时,  $\frac{dV}{dt} = -x^T Gx$  是定负的, 而当  $\phi(\sigma) \neq 0$ 、

$x \neq 0$  时由条件(1.2)得到

$$c^T \frac{x}{\phi(\sigma)} = \frac{\sigma}{\phi(\sigma)} \geq \frac{1}{k} \quad (2.7)$$

故只要证明对任意  $c^T x \geq \frac{1}{k}$  有

$$U \equiv [Dx - (D^{-1})^T d]^T [Dx - (D^{-1})^T d] - (d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b) > 0 \quad (2.8)$$

则  $\frac{dV}{dt}$  也是定负的, 即条件(1.5)满足。

为此, 取满秩线性变换

$$y = Dx - (D^{-1})^T d \quad (2.9)$$

则  $U$  化为

$$U = y^T y - p, \quad p = d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b \quad (2.10)$$

而条件  $c^T x \geq \frac{1}{k}$  化成

$$c^T D^{-1} [y + (D^{-1})^T d] \geq \frac{1}{k} \quad (2.11)$$

于是, 我们只要在  $(y)$  空间的半空间(2.11)上保证(2.10)的  $U > 0$ , 即得到条件(1.5)。

首先, 可指出式(2.10)的  $p > 0$ , 否则, 有  $p < 0$ , 于是对任意的  $y$ ,  $U > 0$ 。从而由式(2.6)可知对任意的  $x$  和  $\phi$ ,  $\frac{dV}{dt}$  是定负的。如在微分方程组(1.6)中取  $\phi = \sigma$ , 则

对 $n+1$ 阶方程组(1.6)存在对变量 $x, \sigma$ 满足条件(1.5)的 $V$ 函数(1.3). 即方程组(1.6)的零解 $x=0, \sigma=0$ 是全局渐近稳定的, 这与§1中分析的微分方程组(1.6)存在奇线、零解不可能渐近稳定相矛盾。

由于 $p > 0$ , 当 $y=0$ 时 $U \leq 0$ . 故要保证半空间(2.11)上有 $U > 0$ 自然要求 $y=0$ 不在半空间(2.11)上。也就是必须

$$c^T D^{-1} [0 + (D^{-1})^T d] = c^T D^{-1} (D^{-1})^T d = c^T G^{-1} d < \frac{1}{k}$$

此即是不等式(2.1)。

其次, 由于在 $(y)$ 空间中 $U = \text{const}$ 的等值线是以 $y=0$ 为球心的一 $n-1$ 维超球面。因此, 当 $y=0$ 不在(2.11)半空间上时, 在(2.11)半空间上 $U$ 值的下限在球心 $y=0$ 到超平面

$$c^T D^{-1} [y + (D^{-1})^T d] = \frac{1}{k} \quad (2.12)$$

的垂线和超平面(2.12)的交点 $y = y^*$ 处。

现在求 $y^*$ 点。向量 $(c^T D^{-1})^T$ 与超平面(2.12)垂直, 故可令

$$y^* = \lambda (c^T D^{-1})^T \quad (2.13)$$

这里 $\lambda$ 为一待定的实数。于是

$$c^T D^{-1} [\lambda (c^T D^{-1})^T + (D^{-1})^T d] = \frac{1}{k}$$

解得

$$\lambda = \frac{\frac{1}{k} - c^T G^{-1} d}{c^T G^{-1} c} \quad (2.14)$$

因此, 当且只当

$$U = (y^*)^T y^* - p > 0$$

时在半空间(2.11)上的一切点有 $U > 0$ 。将(2.13)(2.14)代入得

$$\begin{aligned} U &= [\lambda (c^T D^{-1})^T]^T [\lambda (c^T D^{-1})^T] - p \\ &= \lambda^2 c^T G^{-1} c - (d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b) \\ &= \frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b > 0 \end{aligned}$$

这就是不等式(2.2)。

这样, 对满足条件(1.2)的直接控制系统(1.1), 如果采用 $V$ 函数(1.3), 则条件(1.5)成立的充分必要条件是不等式(2.1)、(2.2)成立。再根据 Барбашин-Красовский定理<sup>(17)</sup> p.348, 由条件(1.5)可以推导出系统(1.1)的零解是全局渐近稳定的, 也就是说系统(1.1)在角 $[0, k]$ 内是绝对稳定的。定理得证。

由定理1的证明过程中显然得到:

**推论1** 对任正定对称矩阵 $G$ 及实数 $\beta > 0$ , 不等式(2.1)、(2.2)成立时则不等式

$$p = d^T G^{-1} d + 2\beta c^T b \geq 0 \quad (2.15)$$

也成立。

**推论2** 对正定对称矩阵 $G$ 及实数 $\beta > 0$ , 不等式(2.1)、(2.2)成立的充分必要条件是关于 $x, \phi$ 的二次型

$$W(x, \phi) = x^T G x - 2d^T x \phi - 2\beta c^T b \phi^2$$

在条件(1.2)之下是正定的。

如果函数 $\phi(\sigma)$ 的条件(1.2)改为

$$0 \leq \sigma \phi(\sigma) < k \sigma^2 \quad (0 < k \leq \infty) \quad (2.16)$$

即讨论直接控制系统(1.1)在角 $[0, k)$ 内的绝对稳定性, 则类似于定理1有

**定理2** 利用满足条件(1.5)的 $V$ 函数(1.3)保证直接控制系统(1.1)在角 $[0, k)$ 内绝对稳定的充分必要条件是存在正定对称矩阵 $G$ 及实数 $\beta > 0$ 满足不等式

$$\frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \geq 0 \quad (2.1)^*$$

$$\frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b \geq 0 \quad (2.2)^*$$

这里 $d, B$ 由(2.3)、(1.4)式确定。

**证** 当条件(1.2)改为条件(2.16)时定理1的整个证明过程仍然有效。只是在(2.16)条件下, (2.7)式应改为

$$c^T \frac{x}{\phi(\sigma)} = \frac{\sigma}{\phi(\sigma)} > \frac{1}{k} \quad (2.7)^*$$

(2.11)式则变为

$$c^T D^{-1} [y + (D^{-1})^T d] > \frac{1}{k} \quad (2.11)^*$$

$y = 0$ 不在半空间(2.11)\*上的条件变成

$$c^T D^{-1} [0 + (D^{-1})^T d] = c^T D^{-1} (D^{-1})^T d = c^T G^{-1} d \leq \frac{1}{k}$$

此即为条件(2.1)\*。由于边界点 $y^*$ 不包括在半空间(2.11)\*上, 故当且只当

$$U = (y^*)^T y^* - p \geq 0$$

时在半空间(2.11)\*上的一切点均有 $U > 0$ , 这可化为

$$U = \frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b \geq 0$$

即得条件(2.2)\*, 定理证毕。

如果函数 $\phi(\sigma)$ 满足的条件(1.2)变为

$$\sigma\phi(\sigma) > 0 \quad (\sigma \neq 0)$$

这实际上就是(1.2)\*的条件中取 $k = \infty$ 。即在定理2的证明过程中令 $\frac{1}{k} = 0$ ，则整个证明过程仍成立。于是得到：

**推论** 利用满足条件(1.5)的 $V$ 函数(1.3)保证系统(1.1)在角 $(0, \infty)$ 内绝对稳定的充分必要条件是存在正定对称矩阵 $G$ 及实数 $\beta > 0$ ，使下列不等式成立：

$$c^T G^{-1} d \leq 0$$

$$\frac{1}{c^T G^{-1} c} (c^T G^{-1} d)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b \geq 0$$

其中 $B, d$ 由式(1.4)、(2.3)确定。

### § 3

**定理3** 对于直接控制系统(1.1)及 $V$ 函数(1.3)，二次型

$$S(x, \phi) = x^T G x - 2x^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi + \left( \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b \right) \phi^2 \quad (3.1)$$

是 $x, \phi$ 的正定二次型而且 $\tau > 0$ 的充分必要条件是不等式(2.1)(2.2)及条件

$$2 \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c}} \right) < \tau < 2 \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c}} \right) \quad (3.2)$$

成立。这里 $p, \lambda$ 由(2.10)、(2.14)确定。

**证** 首先，利用式(2.4)、(2.10)、(2.14)中的记号 $D, p, \lambda$ 化简二次型 $S(x, \phi)$ ：

$$\begin{aligned} S(x, \phi) &= x^T G x - 2x^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi + \left( \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b \right) \phi^2 \\ &= x^T D^T D x - 2x^T D^T (D^{-1})^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi + \left( \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b \right) \phi^2 \\ &= \left[ D x - (D^{-1})^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi \right]^T \left[ D x - (D^{-1})^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi \right] \\ &\quad + \left[ \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b - \left( d + \frac{\tau}{2} c \right)^T G^{-1} \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \right] \phi^2 \\ &= y^T y + \left[ \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b - d^T G^{-1} d - \frac{\tau}{2} (c^T G^{-1} d + d^T G^{-1} c) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau^2}{4} c^T G^{-1} c \right] \phi^2 \\ &= y^T y + \left[ \frac{\tau^2}{4} c^T G^{-1} c + \tau \left( c^T G^{-1} d - \frac{1}{k} \right) + p \right] \phi^2 \\ &= y^T y + \frac{1}{4} c^T G^{-1} c \left[ \tau^2 - 4\lambda\tau + \frac{4p}{c^T G^{-1} c} \right] \phi^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里记  $y_r = Dx - (D^{-1})\left(d + \frac{\tau}{2}c\right)\phi$

由于  $G$  及  $G^{-1}$  是正定对称矩阵, 所以  $S(x, \phi)$  是  $x, \phi$  的正定二次型的充分必要条件是

$$\begin{aligned} \tau^2 - 4\lambda\tau + \frac{4p}{c^T G^{-1} c} &= \left( \tau - 2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c}} \right) \\ &\cdot \left( \tau - 2\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c}} \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

现在证明不等式(3.4)及  $\tau > 0$  成立的充分必要条件是 不等式(2.1)、(2.2)及(3.2)成立。

首先, 当不等式(2.1)、(2.2)成立时由(2.14)、(2.10)有

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{c^T D^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right) > 0 \\ \lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c} &= \frac{1}{c^T G^{-1} c} (\lambda^2 c^T G^{-1} c - p) \\ &= \frac{1}{c^T G^{-1} c} \left[ \frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b \right] > 0 \end{aligned}$$

故在(3.2)条件下, 不等式(3.4)成立。而且, 由定理1的推论1, 有  $p \geq 0$ 。从不等式(3.2)更可推得  $\tau > 0$ 。

反之, 当不等式(3.4)成立且  $\tau > 0$  时, 证明不等式(2.1)、(2.2)、(3.2)成立。

先证明  $\lambda^2 > \frac{p}{c^T G^{-1} c}$ , 若不然, 有  $\lambda^2 \leq \frac{p}{c^T G^{-1} c}$  则  $\tau$  的二次式  $\tau^2 - 4\lambda\tau + \frac{4p}{c^T G^{-1} c}$  不变号。由于  $G^{-1}$  为正定矩阵, 且  $p \geq 0$ , 所以有  $\tau^2 - 4\lambda\tau + \frac{4p}{c^T G^{-1} c} \geq 0$ , 这与不等式(3.4)矛盾。于是只能  $\lambda^2 > \frac{p}{c^T G^{-1} c}$  即条件(2.2)成立。进一步由  $\lambda^2 > \frac{p}{c^T G^{-1} c}$  及不等式(3.4)可推导出关系式(3.2)成立。而由(3.2)式知道, 必须  $\lambda > 0$  才能保证  $\tau > 0$ 。但  $c^T G^{-1} c > 0$ , 故推得  $\frac{1}{k} - c^T G^{-1} d > 0$ , 即不等式(2.1)成立。于是证明了不等式(3.4)及  $\tau > 0$  成立时有(2.1)、(2.2)及(3.2)式。定理得证。

**推论** 对于直接控制系统(1.1), 存在借助  $S$ -方法的  $V$  函数(1.3)的充分必要条件是 不等式(2.1)、(2.2)成立。而且  $S$ -方法中的参数  $\tau$  必须满足关系式(3.2)。

**证** 所谓  $S$ -方法<sup>(12) p. 77</sup> 是对定正  $V$  函数(1.3)存在正实数  $\tau$  使

$$\frac{dV}{dt} = -S(x, \phi) - \tau \left[ \sigma - \frac{1}{k} \phi(\sigma) \right] \phi(\sigma) \quad (3.5)$$

这里  $S(x, \phi)$  是  $x, \phi$  的正定二次型。在条件(1.2)下, 由(3.5)知  $\frac{dV}{dt}$  是  $x$  的定负函数。

从而推导出系统(1.1)是绝对稳定的。

显然, 于对系统(1.1)及 $V$ 函数(1.3), 由(2.5)、(2.3)及(3.1)式有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -x^T G x + 2x^T (Bb + \beta A^T c) \phi(\sigma) + 2\beta c^T b \phi^T(\sigma) \\ &= -x^T G x + 2x^T d \phi(\sigma) + 2\beta c^T b \phi^2(\sigma) \\ &= -x^T G x + 2x^T \left( d + \frac{\tau}{2} c \right) \phi(\sigma) - \left( \frac{\tau}{k} - 2\beta c^T b \right) \phi^2(\sigma) \\ &\quad + \tau \left[ \frac{1}{k} \phi^2(\sigma) - c^T x \phi(\sigma) \right] \\ &= -S(x, \phi) - \tau \left[ \sigma - \frac{1}{k} \phi(\sigma) \right] \phi(\sigma) \end{aligned}$$

即(3.5)式中的 $S(x, \phi)$ 由(3.1)式表示。于是由定理3知 $S(x, \phi)$ 是 $x, \phi$ 的正定二次型且 $\tau > 0$ 的充分必要条件是等式(2.1)、(2.2)及(3.2)成立。推论得证。

**注1** 由定理3的推论说明了对于直接控制系统(1.1)及 $V$ 函数(1.3), 如果满足条件(2.1)、(2.2)。则选取满足不等式(3.2)的任意一个 $\tau$ 均可保证 $S$ -方法是成立的, 反之对不满足不等式(3.2)的一切 $\tau$ , 必定使 $S$ -方法失败。从而阐明了 $S$ -方法成立的条件, 并具体解答了 Айзерман 和 Гантмахер 专著<sup>(2)</sup>中提出的第一个未解决的问题<sup>(2)</sup>p.119)。

**注2** 必须指出: 由定理1, 显然, 有了条件(2.1)、(2.2)完全没有必要再通过所谓 $S$ -方法去判断系统(1.1)的绝对稳定性了。 $S$ -方法必须寻找某个正实数 $\tau$ 使二次型 $S(x, \phi)$ 是正定的。而由定理1, 对于系统(1.1)和 $V$ 函数(1.3), 只要验证一下不等式(2.1)、(2.2)是否成立即可判断系统(1.1)的绝对稳定性。因此, 有了定理1, Айзерман 和 Гантмахер 的专著<sup>(2)</sup>提出的 $S$ -方法就没有必要了。

**注3** 由定理1和定理3的证明中容易验证: 如果定理3中把 $S(x, \phi)$ 是 $x, \phi$ 的正定二次型改为在条件(1.2)之下 $S(x, \phi)$ 是 $x, \phi$ 的正定二次型。则(3.2)改为

$$0 < \tau < 2 \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{p}{c^T G^{-1} c}} \right) \quad (3.2)^*$$

定理3仍成立。

### 参 考 文 献

- [1] Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат, М., 1955, (Второе издание в 1962 г.).  
中译本: А.М.列托夫著, 李惠译, 非线性调节系统的稳定性, 科学出版社, 1959.
- [2] Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, Изд-во АН СССР, М., 1963.
- [3] Lefschetz S., *Stability of nonlinear control systems*, Academic Press,

New York, 1965.

- [4] Нелелюка Р.А., Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, Наука, М., 1975.
- [5] Барбашин Е.А., Функция Ляпунова, Наука, М., 1970.
- [6] Reissig R., Sansone G., Conti R., *Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung*, Edizioni Cremonese, Roma, 1969; *Non-linear differential equations of higher order*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
- [7] 許滋庆, 常微分方程稳定性理论, 上海科技出版社, 1963.
- [8] Lefschetz S., *Contrib. Diff. Eq.*, Vol. 1, 1960, 1-28.
- [9] Meyer K.R., *Contrib. Diff. Eq.*, Vol. 3, 1964, 435-437.

## On the Criterion of Absolute Stability for System of Direct Control

Zhu Siming

### Abstract

In the paper we consider the system of direct control

$$x = Ax + b\phi(\sigma), \quad \sigma = c^T x \quad (A \text{ a stable } n \times n \text{ matrix}) \quad (1)$$

and from the Liapunov function

$$V = x^T B x + 2\beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma, \quad (B^T = B > 0, \beta > 0) \quad (2)$$

We prove the following theorem.

**Theorem** The system (1) is absolute stable in the angle  $(0, k)$  if there exists a matrix  $G = G > 0$  and a number  $\beta > 0$  such that

$$\frac{1}{k} - c^T G^{-1} d > 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{c^T G^{-1} c} \left( \frac{1}{k} - c^T G^{-1} d \right)^2 - d^T G^{-1} d - 2\beta c^T b > 0$$

where  $d = Bb + \beta A^T c$  and  $G = -(A^T B + AB)$

The condition (3) is a necessary condition for the existence of a Liapunov function of the form (2).

In this paper we give also a necessary and sufficient condition for the existence of a Liapunov function, of the form (2), which can be constructed by means of the S-method of Aizerman and Gantmacher.