樣条函数的共轭插值(Ⅱ)

——微分算子样条

李岳生
（计算机科学系）

1 引　言

本文拟将同题(Ⅰ)中的结果，推广到微分算子所定义的样条插值及其共轭插值问题上去。为此，首先要建立一个推广了的Lagrange公式。

给定微分算式

$$l(D)u \equiv (a_0(x)D^m + \cdots + a_m(x))u, \quad D \equiv \frac{d}{dx},$$

其共轭微分算式为

$$l^*(D)v \equiv (-1)^m D^m(a_0 v) + \cdots + (-1)^i D^i(a_{m-i}v) + \cdots + a_m v$$

我们总假定$a_i(x)$为定义在$[a,b]$上的实函数，$a_i \in c^{m-i}[a,b]$，$a_0(x) \neq 0$ 于$[a,b]$。

又给定$[a,b]$的两个分划$\pi = \{x_i\}_0^{k+1}$；$a = x_0 < \cdots < x_{k+1} = b$ 及$\pi' = \{t_\mu\}_0^{l+1}$：$a = t_0 < t_1 < \cdots t_{l+1} = b$。

所谓由微分算式$l(D)u$所定义的关于分划π上的样条函数是指具有性质：

1) $l(D)u(x) = 0$，当$x \neq x_i, i = 1, \cdots, k$。

2) $u^{(j)}(x_i - 0) = u^{(j)}(x_i + 0), 0 \leqslant j \leqslant m - r_i - 1$，$i = 1, \cdots, k$，的函数$u(x)$，其中$r_i$称为样条结点$x_i$的重度或亏度，$0 \leqslant r_i \leqslant m$，$i = 1, \cdots, k, r_i = 0$时表示结点$x_i$自动退化成非结点。这种样条函数的全体所成集合记为$Sp(l, \pi, r)$，$r = (r_1, \cdots, r_k)$。类似地定义$Sp(l^*, \pi', \rho)$，$\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$，$\rho_\mu$表示结点$t_\mu$的重度或亏度，$0 \leqslant \rho_\mu \leqslant m, \mu = 1, \cdots, l$。

算子样条插值问题I：求$u(x) \in S_p(l, \pi, r)$使

$$U_{\mu\nu}u = U_{\mu\nu}f, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \rho_\mu - 1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant l + 1,$$

相应共轭插值问题I^*：求$v \in S_p(l^*, \pi', \rho)$使

$$V_{ij}v = V_{ij}f, \quad 0 \leqslant j \leqslant r_i - 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant k + 1$$

其中泛函 $U_{\mu\nu}g \equiv g^{(\nu)}(t_\mu)$，$V_{ij}g \equiv g^{(j)}(x_i)$，与文(Ⅰ)同。

记

$$n = m + \sum_{i=1}^{k} r_i, \quad n' = \sum_{\mu=1}^{l} \rho_\mu + m, \quad N = \sum_{\mu=0}^{l+1} \rho_\mu, \quad N' = \sum_{i=0}^{k+1} r_i,$$

n, n'分别为空间$S_p(l,\pi,r)$和$S_p(l^*,\pi',\rho)$的维数,

设$\{\varphi_\nu\}_1^n$, $\{\phi_j\}_1^{n'}$分别为$S_p(l,\pi,r)$和$S_p(l^*,\pi',\rho)$的任意两组基函数系，则问题I, I^*分别归结为线代数方程组

$$\Gamma c = F \tag{1}$$

$$\widetilde{\Gamma}\ \widetilde{c} = \widetilde{F} \tag{1*}$$

其中 $c=(c_1,\cdots,c_n)^T$, $\widetilde{c}=(c_1,\cdots,c_{n'})^T$, $F=(U_1f,\cdots,U_Nf)^T$,

$\widetilde{F}=(v_1f,\cdots,V_{N'}f)^T$, $\Gamma=(U_\mu\varphi_\nu)$, $\widetilde{\Gamma}=(V_i\phi_j)$.

其中泛 函$\{U_\mu\}_{\mu=1}^{N}=\{U_{\mu\nu}\}_{\nu=0\ \mu=0}^{\rho_\mu-1,\ l+1}$, $\{V_i\}_{i=1}^{N'}=\{V_{ij}\}_{j=0,\ i=0}^{r_i-1\ k+1}$.

$F=0$, $\widetilde{F}=0$的情形，称为相应齐插值问题，分别记为(I_0)和(I_0^*).

$q=Rank(\Gamma)$, $q'=Rank(\widetilde{\Gamma})$和$\{\varphi_\nu\}$, $\{\phi_j\}$的选择无关，因此分别称为问题I和I^*的秩。

类似于文(Ⅰ)，总假定:

i) $0\leqslant r_i\leqslant m$, $i=0,1,\cdots,k+1$,

$0\leqslant\rho_\mu\leqslant m$, $\mu=0,1,\cdots,l+1$;

ii) 若 $x_i=t_\mu$, 则 $\rho_\mu\leqslant d_i$, $r_i\leqslant\tau_\mu$;

iii) $r_0+\rho_0=r_{k+1}+\rho_{l+1}=m$

2 推广的 Lagrange 公式

令 $d=(d_0,\cdots,d_{k+1})$, $\tau=(\tau_0,\cdots,\tau_{l+1})$其中$d_i=m-r_i$, $\tau_i=m-\rho_i$, 记$I\equiv[a,b]$, 规定一个新的函数集合的记号:

$c^m(I-\pi)\cap c^{d-1}(\pi):=\{u(x)$: $u(x)$在I上有定义，在$I-\pi$上分段m次连续可微，在x_i点则为d_i-1次连续可微，$i=0,1,\cdots,k+1\}$

显然 $S_p(l,\pi,r)\subset c^m(I-\pi)\cap c^{d-1}(\pi)$, $S_p(l^*,\pi',\rho)\subset c^m(I-\pi')\cap c^{\tau-1}(\pi')$.

定理1 设$u\in c^m(I-\pi)\cap c^{d-1}(\pi)$, $v\in c^m(I-\pi')\cap c^{\tau-1}(\pi')$, 又假设i)、ii)、iii)满足，则有

$$\begin{aligned}\int_a^b vl(D)u\,dx &= \int_a^b u\,l^*(D)v\,dx\\ &-\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}[u^{(m-j-1)}(x_i)]\,\overset{*}{l_j}(D)v(x_i)\\ &-\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}u^{(\nu)}(t_\mu)\,[l_{m-\nu-1}(D)v(t_\mu)]\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中积分定义为

$$\int_a^b vl(D)\,u\,dx=\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}vl(D)u\,dx,$$

$$\int_a^b ul^*(D)\,vdx=\sum_{\mu=0}^{l}\int_{t_\mu}^{t_{\mu+1}} ul^*(D)vdx$$

又

$$l_0=a_0(x),\quad l_j(D)=l_{j-1}(D)D+a_j(x),\ j=1,\cdots,m,$$

$$l_0^*=l_0,\quad l_j^*(D)=-Dl_{j-1}^*(D)+a_j(x),\ j=1,\cdots,m$$

显然 $l_m(D)=l(D)$，$l_m^*(D)=l^*(D)$。

又(2.1)中记号$[g(x_i)]\equiv g(x_i+0)-g(x_i-0)$，而当$x_i=a$或$b$端点时，则规定其中$[g(a)]=g(a+0)-0$，$[g(b)]=0-g(b-0)$。

证明 设$\pi\cup\pi'=\{a_i\}$，$a_i<a_{i+1}$，它构成$[a,b]$的新分划，由于在每一子区间(a_i,a_{i+1})上有$u,v\epsilon c^m(a_i,a_{i+1})$，故有拉氏恒等式

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} vl(D)udx=\int_{a_i}^{a_{i+1}} ul^*(D)vdx+p(u,v)\Big|_{a_i+0}^{a_{i+1}-0}\tag{2.2}$$

其中

$$p(u,v)=\sum_{j=0}^{m-1}u^{(j)}l_{m-j-1}^*(D)v\tag{2.3}$$

将(2.2)两边对i求和得

$$\int_a^b vl(D)udx=\int_a^b ul^*(D)vdx-\sum_i[p(u,v)]_{ai}\tag{2.4}$$

其中a_i取遍$\{x_i\}_0^{k+1}$和$\{t_\mu\}_0^{l+1}$.注意到$u\epsilon c^m(I-\pi)\cap c^{d-1}(\pi),v\epsilon c^m(I-\pi')\cap c^{r-1}(\pi)'$且假设 i)、ii)、iii) 满足，从而

$$[p(u,v)]_{t_\mu}=\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}u^{(\nu)}(t_\mu)[l_{m-\nu-1}^*(D)v]_{t_\mu},\quad \mu=1,\cdots,l,\tag{2.5}$$

$$[p(u,v)]_{x_i}=\sum_{j=0}^{r_i-1}[u^{(m-j-1)}(x_i)]l_j^*(D)v,\qquad i=1,\cdots,k\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}[p(u,v)]_a&=p(u,v)\,|_{x=a+0}\\&=\sum_{\nu=0}^{\rho_0-1}u^{(\nu)}(a+0)[l_{m-\nu-1}^*(D)v(a)]\\&\quad+\sum_{j=0}^{r_0-1}[u^{(m-j-1)}(a)]l_j^*(D)v(a)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}[p(u,v)]_b&=-p(u,v)\,|_{x=b-0}\\&=\sum_{\nu=0}^{\rho_{l+1}-1}u^{(\nu)}(b-0)[l_{m-\nu-1}^*(D)v(b)]\\&\quad+\sum_{j=0}^{r_{k+1}-1}[u^{(m-j-1)}(b)]l_j^*(D)v(b)\end{aligned}\tag{2.8}$$

将(2.5)—(2.8)代入(2.4)，便得(2.1)，定理证完。

如果 $u\epsilon c^m(I-\pi)\cap c^{d-1}(\pi)$，且满足：

$$U_{\mu\nu}u=0,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1 \tag{2.9}$$

而 $v\epsilon c^m(I-\pi')\cap c^{\tau-1}(\pi')$，且满足：

$$V_{\cdot j}v=0, 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1 \tag{2.10}$$

则(2.1)变成

$$\int_a^b v\, l(D)\, u dx=\int_a^b u\, l^*(D) v dx \tag{2.11}$$

因此，仿照两点边值问题共轭边值条件的定义[2]，很自然地称条件(2.10)为条件(2.9)的共轭条件.广义多点边值问题的研究，另有其独立意义，将在别处讨论。

3 样条插值及其共轭插值

定理2 设 $p=\rho_0+\rho_{l+1}$，则

$$q'=q+m-p \tag{3.1}$$

定理3 插值问题(I)可解的充要条件是

$$\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}(v)\,U_{\mu\nu}f=0 \tag{3.2}$$

对一切 $v\in S_p(l^*,\pi',\rho)\cap I_0^*$成立；相应地问题$(I^*)$可解的充要条件是

$$\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(u)\,l_j^*(D)\,f(x_i)=0 \tag{3.3}$$

对一切 $u\epsilon S_p(l,\pi,r)\cap I_0$ 成立。

其中

$$\gamma_{\mu\nu}(v)=-\left[\ l^*_{m-\nu-1}(D)v(t_\mu)\right]\quad 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1 \tag{3.4}$$

$$\beta_{ij}(u)=[u^{(m-j-1)}(x_i)](-1)^j\quad 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1 \tag{3.5}$$

$$I_0^*:=\{v(x):\ V_{ij}v=0,\ 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1\},$$

$$I_0:=\{u(x):\ U_{\mu\nu}u=0,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1\}.$$

定理4 问题(I)和问题(I^*)的唯一可解性是等价的，当且仅当$Det(\Gamma)\neq0$或 $Det(\widetilde{\Gamma})\neq0$ 方可能。

定理5 问题(I)可解条件满足时，其通解为$u(x)=u_0(x)+c_1u_1(x)+\cdots c_{n-q}u_{n-q}(x)$，其中$u_0(x)$为其任一特解，$\{u_i\}_1^{n-q}$为相应齐插值问题的基础解。问题$(I^*)$的解有类似结构。

定理6 设问题(I)唯一可解，$f\epsilon c^m[a,b]$为被插函数，则插值余项可表为

$$Rf(x)=\int_a^b K(x,t)\,l(D)\,f(t)dt \tag{3.6}$$

其中

$$K(x,t)=R_x\{G(x,t)\}=R_t^*\{G(x,t)\} \tag{3.7}$$

插值问题(I^*)的余项为

$$R^*f(x)=\int_a^b K(t,x)\,l^*(D)\,f(t)dt \tag{3.8}$$

其中 $G(x,t)$为 $l(D)u=g(x)$ 的任一格林函数，即满足 $l(D)G(x,t)=\delta(x-t)$ 的基本解，$\delta(x)$表示δ函数。

$K(x,t)$ 的特征性质如下：

i） 对任意固定$t,a<t<b$,作为x的函数是微分算子$l(D)$所定义的样条函数，x_i是它的r_i重结点，$i=1,\cdots,k,t$ 是它的单结点；

ii） 对任意固定$x,a<x<b$，作为t的函数是$l^*(D)$所定义的样条函数，t_μ是它的ρ_μ重结点，$\mu=1,\cdots,l$,x是它的单结点；

iii） 作为x的函数，满足问题(I)的相应齐条件：$U_{\mu\nu}K(x,t)=0$，$0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1$，$0\leqslant\mu\leqslant l+1$；

iv） 作为t的函数，满足问题(I^*)的相应齐条件：$V_{ij}K(x,t)=0,0\leqslant j\leqslant\nu_i-1$，$0\leqslant i\leqslant k+1$。

此外，当$l^*(D)=l(D)$，$\pi'=\pi$，$\rho_0=r_0=\frac{m}{2}$，$\rho_{k+1}=r_{k+1}=\frac{m}{2}$，$\rho_i=r_i\leqslant\frac{m}{2}$，$i=1,\cdots,k$ 时，问题(I)是自共轭的，即$(I^*)=(I)$，此时$K(t,x)=K(x,t)$。

以上诸定理的证明思路，和多项式样条的共轭插值的相应定理[1]相一致，关键是要利用本文的定理1。因此，下面我们只指出证明的大要。

定理2的证明。 由于矩阵Γ的秩为q，故齐线代数方程组(I_0)有$n-q$个线性独立的向量解，相应地问题(I_0)有$n-q$个线性独立函数解$u_1,\cdots,u_{n-q}$，进而利用定理1推得齐线代数方程组

$$\beta\widetilde{\Gamma}=0$$

有$n-q$个线性无关向量解$\beta(u_\alpha)$，$\alpha=1,\cdots,n-q$，这里$\beta(u_\alpha)=\{\beta_{ij}(u_\alpha)\}_{j=0,\ i=0}^{r_i-1\ \ k+1}$。

而β的维数为N'，故$\widetilde{\Gamma}$的秩q'不能超过$N'-(n-q)=m-p+q$，即$q'\leqslant m-p+q$，再利用共轭性，又可推得$q'\geqslant m-p+q$，从而$q'=m-p+q$得证。

定理3的证明。 首先需要证明：$\gamma\Gamma=0$的充要条件是$\gamma\epsilon Span\{\gamma_1(v_1),\cdots,\gamma(v_{N-q})\}$，其中$v_i\epsilon S_p(l^*,\pi',\rho)\cap I_0^*$，$\{v_i\}_1^{N-q}$为线性无关函数，然后平行[1]中定理2的证明，可证得定理3。

定理4是定理3的推论。定理5的证明不难。

定理6的证明。 首先根据常微分方程的常数变易法，求得 $l(D)f=g$ 的通解为

$$f(x)=\varphi(x)+\int_a^b G(x,t)\,g(t)dt \tag{3.9}$$

其中 $\varphi(x)$满足 $l(D)\varphi=0$，于(3.9)中，令$g=l(D)f$，便得 $f(x)$的带积分余项的展开式

$$f(x)=\varphi(x)+\int_a^b G(x,t)\,l(D)f(t)dt \tag{3.10}$$

用插值问题(I)的余项算子R作用到(3.10)的两端，并注意$R\varphi=0$,便得余项表达(3.6)，并且$K(x,t)=R_x\{G(x,t)\}=G(x,t)-I_{nx}\{G(x,t)\}$成立，为证(3.7)中$R_x\{G(x,t)\}=R_t^*\{G(x,t)\}$，这里$R^*$为共轭插值问题($I^*$)的余项算子，只要证明：

$$I_{nx}\{G(x,t)\}=I_{nt}^*\{G(x,t)\} \tag{3.11}$$

其中I_n和I_n^*表示问题(I)和(I^*)的插值算子，所带下标x或t是表示作为x或t的函数的插值。

设 $\varphi_{\mu\nu}(x)\epsilon S_p(l,\pi,r)$，满足：

$$U_{ij}\varphi_{\mu\nu}=\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}\qquad 0\leqslant\nu,\ j\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu,\ i\leqslant l+1 \tag{3.12}$$

（注意用到了性质：$n=N$）；类似地，设$\psi_{ij}(t)\epsilon S_p(l^*,\pi',\rho)$,满足：

$$V_{\mu\nu}\psi_{ij}=\delta_{\mu i}\delta_{\nu j}\qquad 0\leqslant\nu,\quad j\leqslant r_i-1,\quad 0\leqslant\mu,\ i\leqslant k+1 \tag{3.13}$$

其中　$\delta_{i\mu}=0$ 当$i\neq\mu$，$\delta_{i\mu}=1$ 当$i=\mu$。

于是

$$I_{nx}\{G(x,t)\}=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}U_{\mu\nu x}\{G(x,t)\}\varphi_{\mu\nu}(x) \tag{3.14}$$

而

$$U_{\mu\nu x}\{G(x,t)\}=U_{\mu\nu}\{G(\cdot,t)\}\epsilon S_p(l^*,\pi',\rho) \tag{3.15}$$

由(3.15)，又可得

$$U_{\mu\nu}\{G(\cdot,t)\}=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\alpha_{\mu\nu,ij}\,\psi_{ij}(t) \tag{3.16}$$

其中

$$\alpha_{\mu\nu,ij}=V_{ijt}U_{\mu\nu x}\{G(x,t)\} \tag{3.17}$$

将(3.17)代入(3.14)便得

$$I_{nx}\{G(x,t)\}=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\alpha_{\mu\nu,ij}\,\varphi_{\mu\nu}(x)\psi_{ij}(t), \tag{3.18}$$

由于(3.17)中V_{ij},$U_{\mu\nu}$的可交换性（这要用到$r_i+\rho_\mu\leqslant m$当$x_i=t_\mu$时的假设ii)），故$\alpha_{\mu\nu,ij}=\alpha_{ij,\mu\nu}$，从而$I_{nt}^*\{G(x,t)\}$也可表成(3.18)的形式，从而(3.11)得证，即(3.7)得证。

又由于$f(x)$可以展成

$$f(x)=\psi(x)+\int_a^b G(t,x)l^*(D)f(t)dt \tag{3.19}$$

其中$\psi(x)$满足$l^*(D)\psi(x)=0$，将R^*作用到(3.19)两端，注意$R^*\psi=0$，于是

$$R^*f(x)=\int_a^b R_x^*\{G(t,x)\}l^*(D)f(t)dt \tag{3.20}$$

但据刚才证明的(3.7)知，$R_x^*\{G(t,x)\}=R_t\{G(t,x)\}=K(t,x)$，故(3.20)也就是要证的(3.8)。

关于$K(x,t)$的四条特征性质的证明，只要利用$K(x,t)$的表达式(3.7)进行具体分

析。定理 6 全部证完。

4　样条HB插值及其共轭插值

令

$$S:=\{u(x):u(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i\varphi_i(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_{ij}G^{(0,j)}(x,x_i)$$

$$\text{且 }\beta_{ij}=0\text{ 当 }e_{ij}=0\text{ 时}\}$$

$$S^*:=\{v(t):v(t)=\sum_{\mu=1}^{m}\omega_\mu\phi_\mu(t)+\sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=0}^{m-1}\gamma_{\mu\nu}G^{(\nu,0)}(t_\mu,t)$$

$$\text{且 }\gamma_{\mu\nu}=0\text{ 当 }\tilde{e}_{\mu\nu}=0\text{ 时}\}$$

其中

$$E=(e_{ij})_{i=0,\,j=0,}^{k+1\ \ m-1}\qquad e_{ij}=0\text{或}1$$

$$\tilde{E}=(\tilde{e}_{\mu\nu})_{\mu=0,\,\nu=0,}^{l+1\ \ m-1}\qquad \tilde{e}_{\mu\nu}=0\text{或}1$$

E，$\tilde{E}$分别称为样条空间S和S^*的关联矩阵，总假定满足：

i)　$e_{0,j}+\tilde{e}_{0,m-j-1}=1$，$e_{k+1,j}+\tilde{e}_{l+1,m-j-1}=1$，

ii)　$e_{ij}+\tilde{e}_{\mu,m-j-1}\leqslant 1$　当$x_i=t_\mu$时。

插值问题(I)修改成HB插值问题(II)：求$u\epsilon S$，使

$$u^{(\nu)}(t_\mu)=f^{(\nu)}(t_\mu)\quad\text{当}\tilde{e}_{\mu\nu}=1\text{ 时，}\qquad 0\leqslant\nu\leqslant m-1,\quad 0\leqslant\mu\leqslant l+1;$$

相应HB共轭插值问题(II^*)：求$v\epsilon S^*$，使

$$r^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\qquad\text{当 }e_{ij}=1\text{ 时}\qquad 0\leqslant j\leqslant m-1,\quad 0\leqslant i\leqslant k+1$$

上述定理 2 — 5，对问题(II)和(II^*)可以平行建立起来。关键在于将定理 1 进一步推广成如下的

定理 $1'$ 设

1)　E 和 $\tilde{E}$满足条件 i)、ii)；

2)　$u\epsilon c^m(I-\pi)$ 且

$$[u^{(m-j-1)}(x_i)]=0,\quad\text{当 }e_{ij}=0;$$

3)　$v\epsilon c^m(I-\pi')$ 且

$$[l^*_{m-\nu-1}(D)v]=0,\text{ 当}\tilde{e}_{\mu\nu}=0$$

则有广义 $Lagrange$ 公式

$$\int_a^b vl(D)udx=\int_a^b ul^*(D)vdx\qquad-\sum_{e_{ij}=1}[u^{(m-j-1)}(x_i)]l_j^*(D)v(x_i)$$

$$-\sum_{\tilde{e}_{\mu\nu}=1}u^{(\nu)}(t_\mu)[l^*_{m-\gamma-1}(D)v(t_\mu)]\tag{4.1}$$

证明 由(2.4)再利用本定理条件1)、2)、3)即得(4.1)。

定理1′实际上推广了定理1，因若

$$e_{ij}=1,\quad 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1,$$
$$\tilde{e}_{\mu\nu}=1,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1$$

则定理1′中(4.1)即变成定理2中(2.1)。

平行的定理2—5，可以形式不变地保持下来，只要附加下面的说明：

1) 相应定理中的

$$n=m+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}e_{ij},\quad n'=m+\sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=0}^{m-1}\tilde{e}_{\mu\nu},$$

$$N=n'-m+p,\quad p=\sum_{\nu=0}^{m-1}\tilde{e}_{0,\nu}+\sum_{\nu=0}^{m-1}\tilde{e}_{l+1,\nu},$$

$$N'=n+m-p=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{m-1}e_{ij}.$$

由此可见

$$n=N\leftrightarrow n'=N'$$

2) $\beta_{ij}(u)=0$ 当 $e_{ij}=0$， $\gamma_{\mu\nu}(v)=0$ 当 $\tilde{e}_{\mu\nu}=0$，

因此，求和时总对 $e_{ij}=1$或$\tilde{e}_{\mu\nu}=1$的项进行。

3) $K(x,t)$的零点性质，须理解为

$$U_{\mu\nu}K(x,t)=0,\quad 当\ \tilde{e}_{\mu\nu}=1,\qquad V_{ij}K(x,t)=0,\quad 当\ e_{ij}=1.$$

5 举 例

令 $m=3$，$l(D)=D^3-D^2+D-1$，$l^*(D)=-D^3-D^2-D-1$，给定 $\pi=\pi'=\{0,x_1,1\}$，$0<x_1<1$。又设 $r_0=1$，$r_1=1$，$r_2=2$，$\rho_0=\rho_1=2$，$\rho_2=1$即相应的

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad \tilde{E}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$S:=\{u(x):u(x)=\alpha_0+\alpha_1\cos x+\alpha_2\sin x+\beta_1G(x-x_1)\}$$

$$S':=\{v(t):v(t)=\omega_0+\omega_1\cos t+\omega_2\sin t+\gamma_{10}G(x_1-t)+\gamma_{1,r}G^{(1,0)}(x_1-t)\}$$

其中$G(x)=\frac{1}{2}(e^x-\cos x-\sin x)x_+^0$.

插值问题II：求$u\in S$，使

$$u(0)=f(0),\ u'(0)=f'(0) \tag{5.1}$$
$$u(x_1)=f(x_1),\ u'(x_1)=f'(x_1),\ u(1)=f(1)$$

插值问题II^*：求 $v\in S^*$，使

$$v(0)=f(0),\ v(x_1)=f(x_1),v(1)=f(1),\ v'(1)=f'(1). \tag{5.2}$$

由于 $n=4$，$N=5>n$，故问题(II)一般无解；又 $n'=5$，$N'=4$，故问题(II^*)～

般解不唯一。据定理3，问题(II)可解的充要条件是

$$\gamma_{0,0}(v)f(0)+\gamma_{0,1}(v)f'(0)+\gamma_{1,0}(v)f(x_1)+\gamma_{1,1}(v)f'(x_1)+\gamma_{2,0}(v)f(1)=0 \tag{5.3}$$

其中

$$\gamma_{0,0}(v)=[l_2^* v(0)]=v''(0_+)+v'(0_+),$$

$$\gamma_{0,1}(v)=[l_1^* v(0)]=-[v'(0)]=-v'(0_+),$$

$$\gamma_{1,0}(v)=[l_2^* v(x_1)]=[v''(x_1)+v'(x_1)],$$

$$\gamma_{1,1}(v)=[l_1^* v(x_1)]=-[v'(x_1)],$$

$$\gamma_{2,0}(v)=[l_2^* v(1)]=-v''(1_-)-v'(1_-),$$

而$v(t)$为齐插值问题II^*:

$$v(0)=v(x_1)=v(1)=v'(1)=0$$

之解。由$v(t)$的表达式可知，问题II_0^*之解必呈如下形式

$$v(t)=\gamma\left(G(x_1-t)-\frac{G(x_1)}{G'(x_1)}G^{(1,0)}(x_1-t)\right)$$

其中γ为任意常数。

对此例，由于$p=\rho_0+\rho_2=3=m$，故秩的对偶关系为$q'=q+m-p=q=4$。

参考文献

〔1〕李岳生，样条函数的共轭插值(I)——多项式样条，中山大学学报（自然科学版）1980，4

〔2〕М、А，Наймарк，Линейные Дифференциальные Операторы，Москва，(1954).

Dual Spline Interpolation(Ⅱ)

——Differential Operator Spline

Li Yuesheng

Abstract

This paper is concerned with the interpolation problem and its dual by splines defined by differential operator, which is the continuation of the article[1]. At first, an extended lagrange identity is obtained (Theorem 1). By means of this identity the cennection of the rank of the interpolation problem and its dual, as well as the sufficient and necessary condition:

$$\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}f^{(\nu)}(t_\mu)[l^*_{m-\nu-1}(D)v(t_\mu)]=0,\ \forall v\in I_0^*\cap S_p(l^*,\pi',\rho)$$

for the resolvability of the interpolation problem (Theorem 2,3) are followed.