

声波在浓悬浮液中的吸收

唐应吾

摘 要

本文在马卡恩理论的基础上考虑了悬浮粒子在声场中的动力相互作用以及悬浮剂相对于粒子的体积位移速度对吸收的贡献,导出了浓悬浮液中声吸收系数和悬浮粒子在声场中的动力相互作用函数的表式。其结果能相当成功的解释实验数据。

一、引 言

对声波在浓悬浮液中吸收规律的研究,在实际上和理论上都是很有意义的。比如在水声物理学中的海底泥质沉积物就是一种浓悬浮液⁽¹⁾,用金属丝构成的水声吸收材料也是一种等效的浓悬浮液⁽²⁾。这方面的研究曾引起了很多人的注意,并做了大量的工作⁽³⁾。但是,以往的理论工作大都是忽略了悬浮粒子在声场中的相互作用而得出结果的。实验证明,悬浮粒子的体积浓度不小于0.8%,悬浮粒子在声场中的相互作用就会出现⁽⁴⁾。粒子在声场中有相互作用的悬浮液我们称之为浓悬浮液。

声波在浓悬浮液中的吸收的理论研究较少。马卡恩(McCann)于1969年⁽⁵⁾考虑了悬浮粒子在声场中的电力相互作用,对乌立克(Urick)⁽⁶⁾理论做了某些改进;杜伊克利斯(Duykers)于1970年用一个弛豫模型来计算纯高岭土悬浮中的声吸收系数,其结果能较好地解释乌立克的数据,但解释汉普顿(Hampton)⁽⁸⁾的数据较差。杜伊克利斯的工作的缺点是其两个弛豫时间的物理意义不够清楚,且其表式带有人为的假定。

马卡恩⁽⁵⁾的结果对粒子体积浓度不太高(比如小于20%)的悬浮液中的声吸收系数对体积浓度的依赖关系给出了较好的解释。但是当悬浮粒子的体积浓度高于20%时,理论结果与实验数据之间呈现出一定的分歧,而这一分歧却不能用选取理论中的常数 p 的数值来克服。本文在马卡恩理论的基础上,考虑了悬浮粒子在声场中的动力相互作用以及悬浮剂(水)相对于粒子的体积位移速度对吸收的贡献,得到了令人满意的结果。

二、物理概念

我们假设浓悬浮液是由纯高岭土粒子悬浮在纯水（以下简称水）中而成的。悬浮液的实际情况是很复杂的，比如悬浮粒子的大小是参差不齐的，形状是很不规则的，而其分布也可能是不均匀的。不过在一级近似下，可用一个模型来代替实际的复杂情况。这个模型是：

1、悬浮液是由一些大小相等纯高岭土球粒悬浮在水中而成，当声场不出现时，这些小球粒在水中呈等距的立方体排列，即构成一个立方点阵；

2、当声场出现时，声波的波线（波阵面之法线）垂直于这立方点阵的一面，位于同一个垂直于波线的平面内的粒子在声场中都以同样的速度振动，但不发生转动。

这个模型如图 1 所示。为了形象化起见，我们把粒子染成“黑”“白”两种颜色，在黑色粒子的四周排列白色粒子，在白色粒子的四周排列黑色粒子，并把垂直于波线的粒子所居的平面画上阴影。

从上述模型看出：在声场中，位于同一个阴影平面内的那些粒子则处于相对静止状态。由于悬浮粒子与水之间在声场中存在着速度差，因此在声场中那些位于同一个阴影平面内的黑、白粒子之间的“水流流线”将向里紧缩，即那些白色粒子中的每一个与其四周最邻近的黑色粒子在声场中要发生动力相互作用。同样，那些黑色粒子中的每一个与其四周最邻近的白色粒子在声场中要发生动力相互作用。又由于很小的纯高岭土悬浮粒子带有同种电荷^[6]，因此各粒子之间存在着电力相互作用。由于粒子排列成立方点阵，所以当声场不出现时粒子间的电力不显现；当声场出现

时，位于同一个阴影平面内的黑、白粒子间的电力也不呈现，只有位于第 j 个阴影平面内的黑色（或白色）粒子与位于第 $(j-1)$ 个及第 $(j+1)$ 个阴影平面内的最邻近的白色（或黑色）粒子才发生显著的电力相互作用，在一般情况下，只计及这些粒子之间的电力相互作用就够了。这些粒子在声场中之所以会发生显著的电力相互作用，是由于它们之间发生了相对位移。

为了便于数学上的处理，我们来比较悬浮粒子的线度与波长的大小。通常，纯

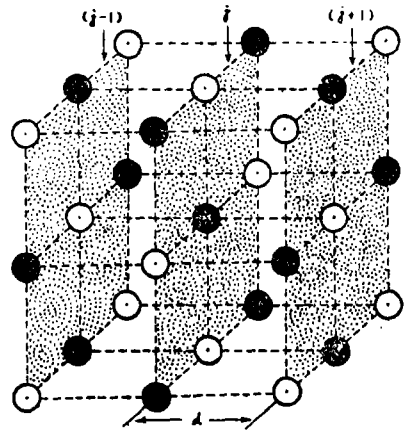


图 1

粒子在静水中排列成立方点阵

高岭土悬浮粒子的直径大约为1~3微米,在悬浮液中频率为1兆赫兹的声波的波长约为0.15厘米(悬浮液中声波的波长约等于水中声波的波长)。因此,在悬浮液中,频率等于或低于1兆赫兹声波的一个波长内,可容纳1000个粒子。这就暗示着,当悬浮粒子的体积浓度大于1%时,悬浮液中的波数 k 与两个相邻粒子中心之间的距离 d 的乘积是甚小于1的,即

$$kd \ll 1 \quad (1)$$

条件(1)的成立将给问题的处理带来极大的方便,比如,这时可忽略散射损耗对吸收的贡献⁽⁴⁾,而悬液对声吸收的主要机制可认为是悬浮粒子与水之间所发生的粘滞牵引。下面我们仅就条件(1)成立的情况下来处理问题。

实验证明,条件(1)可放宽为⁽⁴⁾

$$ka \ll 1, \quad (1')$$

这儿 a 为粒子的半径。

三、数学描述

单个悬浮球粒在角频率为 ω 的简谐声场(时间因子为 $e^{-i\omega t}$,并略去不写)中的运动方程为^(5,9)

$$m_p \ddot{x}_n = -m_1 \tau \ddot{x}_n - s\omega m_1 \dot{x}_n + m_1 \ddot{x}_1, \quad (2)$$

式中⁽¹⁰⁾

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4a} \frac{(2\eta + 3\eta')^2}{(\eta + \eta' + a\eta/3\delta)^2 + (\eta a/3\delta)^2}, \quad (3)$$

$$S = \frac{3}{4} (2\eta + 3\eta') \frac{\delta^2}{a^2} \frac{(1 + a/\delta)(\eta + \eta' + a\eta/3\delta) + (\eta/3)(a/\delta)^2}{(\eta + \eta' + a\eta/3\delta)^2 + (\eta a/3\delta)^2}, \quad (4)$$

$\delta = (2\eta/\rho_1\omega)^{1/2}$, η' 为粒子的粘滞系数, x_n 为粒子离开平衡位置的位移, x_n 为粒子相对于水的位移, x_1 为水的位移, m_p 为粒子的质量, m_1 为粒子所排开的水的质量, η 为水的粘滞系数, ρ_1 为水的密度。因为纯高岭土粒子是硬的,即 $\eta/\eta' \rightarrow 0$,这时,表式(3)和(4)可简写为

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{9}{4a(\omega/2\mu)^{1/2}}, \quad (3')$$

$$S = \frac{9}{4a(\omega/2\mu)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{a(\omega/2\mu)^{1/2}} \right], \quad (4')$$

这儿 $\mu = \eta/\rho_1$ 。

由于悬浮粒子在声场中存在动力相互作用,就使得粒子表面所受的阻力大为减

小(因为水也有振动,其平均振速比粒子的大),即使粒子相对于水的振速大为增加,设增大的培数为 ϕ ,这样,当考虑到悬浮粒子在声场中存在动力相互作用时,运动方程(2)应修正为

$$m_p \ddot{x}_n = -\tau m_1 \phi \ddot{x}_u - s\omega m_1 \phi \dot{x}_u + m_1 \ddot{x}_1, \quad (5)$$

这里 ϕ 是粒子体积浓度 V_0 ($=\frac{4}{3}\pi a^3 N$, N 为单位体积内的粒子数)的函数,我们称它为悬浮粒子在声场中的动力相互作用函数,在下节中将要导出其表式。

又由于悬浮粒子之间在声场中存在着电力相互作用,那么,在方程式(5)的左边还要加上作用在粒子上的电力。当条件(1)严格成立时,该电力的表式为⁽⁵⁾

$$k^2 d^2 \beta x_n.$$

如此,运动方程式(5)变为

$$m_p \ddot{x}_n + k^2 d^2 \beta x_n = -\phi \tau m_1 \ddot{x}_u - \phi s\omega m_1 \dot{x}_u + m_1 \ddot{x}_1, \quad (6)$$

式中 β 为粒子间的电力常数。把 $x_n = x_u + x_1$ 代入(6)式中,并注意到 $\ddot{x} = -i\omega \dot{x} = \omega^2 x$,就可得出

$$U_0 = \frac{-(\sigma - 1 - \beta d^2/m_1 c^2)V_0}{[(\sigma + \phi\tau - \beta d^2/m_1 c^2)^2 + \phi^2 s^2]^{1/2}}, \quad (7)$$

这里 U_0 为 \dot{x}_u 的模, V_0 为 \dot{x}_1 的模, $\sigma = m_p/m_1$, c 为悬浮液中的声速,可近似地用伍德(wood)公式⁽¹¹⁾

$$c^2 = \{[(1 - V_0)K_1 + V_0 K_p][(1 - V_0)\rho_1 + V_0 \rho_p]\}^{-1}$$

来计算,式中 ρ_1 和 ρ_p 为水和粒子的密度, k_1 和 k_p 为相应的绝热压缩系数。马卡恩指出⁽⁵⁾,对于前述的粒子的排列方式, $\beta d^2/m_1 c^2$ 满足关式

$$\beta d^2/m_1 c^2 = P V_0^{1/3}, \quad (8)$$

这儿 P 是独立于粒子直径的常数(近似地说)。

当悬浮液中的 V_0 较大时,必须引入水相对于粒子的体积位移速度 $-(1 - V_0)\dot{x}_u \equiv W$ 的概念⁽¹²⁾。表式(6)中右边第二项是多个粒子振动时每一个粒子表面所受的粘滞摩擦力,因此在单位体积内粒子表面所受的粘滞摩擦力 F_τ 为

$$F_\tau = -N S m_1 \omega \phi \dot{x}_u = N S m_1 \omega \phi \frac{W}{1 - V_0}, \quad (9)$$

而在单位体积内总的能量损耗率为

$$\frac{dE}{dt} = F_\tau W = \frac{N S m_1 \omega \phi W^2}{1 - V_0}, \quad (10)$$

上式对时间的平均值 $\langle dE/dt \rangle$ 为

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = \frac{1}{2} N S m_1 \omega \phi \frac{W_0^2}{1 - V_0} \quad (11)$$

式中 $W_0 = - (1 - V_0) U_0$ 。

在悬浮液中单位体积内声波的总能量为⁽¹³⁾

$$E_0 = \frac{1}{2} \rho V_k^2 \approx \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad (12)$$

式中 $\rho = (1 - V_0)\rho_1 + V_0\rho_2$, V_k 为悬浮液的有效振速⁽¹⁴⁾之模。因此, 由于粘滞摩擦而引起的声振幅吸收系数 α 为⁽¹³⁾

$$\alpha = \langle dE/dt \rangle / 2CE_0 \quad (13)$$

把表式(11)和(12)代入(13)中, 并注意到(7)式, 就可得 α 的表式

$$2\alpha = \frac{V_0(1 - V_0)\omega}{C\rho} \frac{\rho_1\phi S(\sigma - 1 - PV_0^{1/3})^2}{(S\phi)^2 + (\sigma + \phi\tau - PV_0^{1/3})^2} \quad (13')$$

显然, 当 $\phi \rightarrow 1$ 和 $(1 - V_0)\rho_1/\rho \rightarrow 1$ 时, 上式可简化为马卡恩的结果⁽⁵⁾。

四、动力相互作用函数的表式

因为我们只考虑到悬浮粒子的线度甚小于悬浮液中声波波长的情况[条件(1)成立的情况], 则由模型中所给出的悬浮粒子的那种排列方式, 就使得悬浮粒子在声场中所受的动力相互作用与在定常运动中所受的动力相互作用相同。这样, 按照文献[15]中同样的分析, 就可写出位于同一个阴影平面内的两个粒子中心联线上的中点处的水相对于粒子的振速 u 的表式为

$$u = u' \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right)^{1/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right) \right] \quad (14)$$

式中 u' 为“史托克斯 (Stokes) 水流”离粒子中心无穷远处的振速, 因为 u 是粒子间的水相对于粒子的最大振速, 故(1)式表明粒子间的动力相互作用将使水相对于粒子的振速减小了 $\left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right)^{1/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right) \right]^{-1}$ 倍。由此就可引出球形悬浮粒子在声场中的动力相互作用函数 ϕ 的表式

$$\phi = \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right)^{1/3} - \frac{1}{4} \left(\frac{6V_0}{\pi} \right) \right]^{-1} \quad (15)$$

这个结果可视为是文献[15]中的结果的推广, 即把定常运动的情况推广到满足条件(1)的快速振动的情况。实验结果(间接的)将会证明, 这一推广是相当成功的。

五、常数 P 的确定

下面利用乌立克的实验数据来确定常数 P 的值。在频为 1 兆赫兹的情况下，乌立克对纯高岭土悬浮液中的声吸收系数对粒子体积浓度的依赖关系进行了测量，测得的结果示于图 2 中。悬浮液的物理参数为： $a = 4.70 \times 10^{-5}$ 厘米， $\mu = 0.01$ (厘米)²/秒， $\rho_1 = 1.00$ 克/(厘米)³， $\rho_2 = 2.65$ 克/(厘米)²， $C \approx 1.50 \times 10^6$ 厘米/秒， $\omega = 2\pi \times 10^6$ 。

我们选取各种 P 值，联同上列参数代入表式(13')中进行数值计算，结果发现，以 p 等于 0.7 时所算得的 $\alpha - V_0$ 特性曲线（图 2 中的实线）与实验数据相符合。这样，我们就确定了 $p = 0.7$ ，而表式(13')可以写为

$$2\alpha = \frac{V_0(1-V_0)}{C\rho} \omega \rho_1 \frac{\psi S(\sigma - 1 - 0.7V_0^{1/3})^2}{(\psi S)^2 + (\sigma + \psi\tau - 0.7V_0^{1/3})^2}, \quad (16)$$

图 2 中的实线是按(16)式算出的。从图上可以看出，除了 $V_0 > 35\%$ 的区间以外，本文理论结果与实验数据的符合程度是令人满意的。

为了比较，在图 2 中也示出了马卡恩的理论结果（图上的虚线）。

在乌立克的实验条件下，(1)式是满足的。

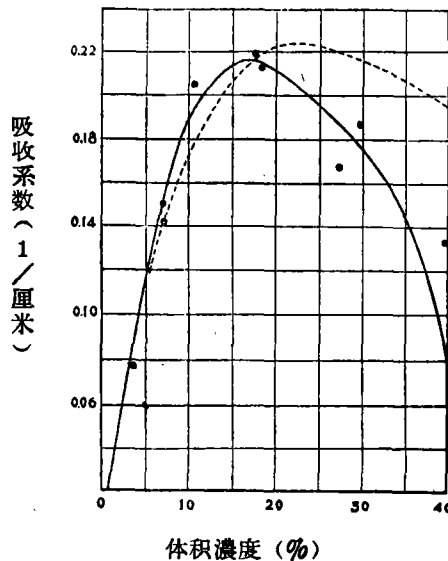


图 2
频率为 1 兆赫兹时， α 对 V_0 的依赖关系，理论与实践的比较（Urick 的原图的纵座标标大了 10 倍）

- 实验值⁽⁶⁾
- 本文理论值
- 马卡恩理论值⁽⁶⁾

六、与汉普顿实验数据的比较

上节是确定常数 P ，同时也是对乌立克实验数据的解释。现在我们将本文理论与汉普顿的实验数据作些比较。

在粒子体积浓度范围 $0 < V_0 \leq 0.4$ 内，频率为 100 千赫兹时，汉普顿测量了纯高岭

土悬浮液中的声吸收系数对粒子体积浓度的依赖关系，在频率范围 $10 \sim 10^3$ 千赫兹内，汉普顿也测量了纯高岭土悬浮液中的声吸收系数对频率的依赖关系，相应的体积浓度为30%和37%。图上的黑点或点划线为实验值，实线为本文的理论值，虚线为马卡恩的理论值。图4所标的百分数为悬浮粒子的体积浓度。汉普顿所用的纯高岭土悬浮中的物理参数为

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1.00 \text{克}/(\text{厘米})^3, & \rho_p &= 2.71 \text{克}/(\text{厘米})^3, \\ \eta &= 10^{-2}(\text{厘米})^2/\text{秒}, & \alpha &= 1.20 \times 10^{-4} \text{厘米}, \\ K_1 &= 4.44 \times 10^{-12}(\text{厘米})^2/\text{达因}, & K_p &= 1.00 \times 10^{-12}(\text{厘米})^2/\text{达因}, \end{aligned}$$

从图上可以看出，本文理论与汉普顿的实验数据的符合程度也是令人满意的，且比马卡恩的理论结果好。

在汉普顿的实验条件下，(1)式是满足的。

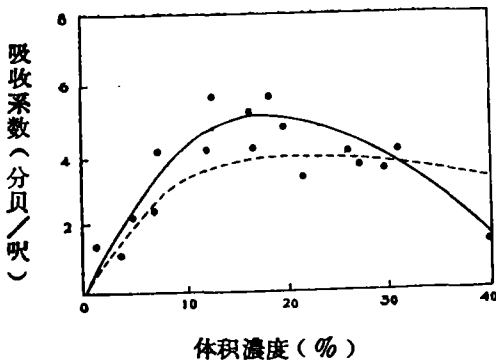


图3 频率为100千赫兹时， α 对 V_c 的依赖关系，理论与实验的比较
 ... 实验值⁽⁸⁾
 —— 本文理论值
 ---- 马卡恩理论值⁽⁵⁾

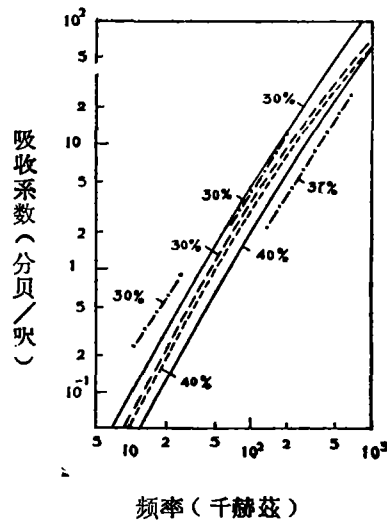


图4 α 对频率的依赖关系，理论与实验的比较
 ···· 实验值⁽⁸⁾ —— 本文理论值
 ---- 马卡恩理论值⁽⁵⁾

七、讨 论

我们用乌立克的实验数据来确定的 p 值(0.7)比马卡恩所确定的(1.7)要小得多，但理论结果比马卡恩的要好。这说明动力相互作用和水相对于粒子的体积位移速度对悬浮液中声吸收的贡献是不可忽略的。马卡恩所确定的 p 值较大的原因是由于把 ϕ 及 $(1 - V_c)$ 对吸收的贡献归到 p 中去了。

在 $kd \ll 1$ 的条件下，我们把定常运动中的动力相互作用函数 ϕ 推广到快速振动的情况中来。汉普顿的实验证明，在体积浓度范围 $0 < V_c \leq 0.4$ 内，这一推广是成功的；乌立克的实验证明，在 $0 < V_c < 0.35$ 内，这一推广是成功的，在 $V_c > 0.35$ 时，

这一推广失效。但从实验情况来看,汉普顿的数据的可靠性似乎要比乌立克的高。当然,这一问题在高体积浓度下的实验研究还是值得继续进行的。

当 $V_0 > 0.4$ 时,悬浮粒排列成立方点阵这一模型是不恰当的,这时必须考虑到粒子的随机分布以及粒子的大小不齐和形状各异等因素。这时要从理论上导出 ϕ 的表式就困难了。看来,对于高浓度范围内 ϕ 的数值的确定,还是利用 α 的测量数据按公式

$$\phi = \frac{MS - 4\tau an + \sqrt{(MS - 4\tau an)^2 - 16a^2n^2(S^2 + \tau^2)}}{4a(S^2 + \tau^2)} \quad (17)$$

来计算为好[(17)式是从(16)式中解出的],式中

$$M = \omega V_0(1 - V_0)\rho_1(\sigma - 1 - 0.7V_0^{1/3})^2(c\rho)^{-1},$$

$$n = (\sigma - 0.7V_0^{1/3}).$$

由乌立克的实验数据(图2中实验点的平均值)可总结出计算 ϕ 的经验公式为

$$\phi = \begin{cases} 8.68V_0 + 1 & 0 < V_0 \leq 0.21, \\ 16.5V_0 - 0.7 & 0.21 < V_0 \leq 0.4, \end{cases} \quad (18)$$

这就是我们过去常用的 ϕ 的经验公式。数值计算表明,当 $0 < V_0 < 0.35$ 时,表式(14)与(18)是一致的;当 $V_0 > 0.35$ 时,由(14)式算出的 ϕ 值甚大于由(18)式算出的 ϕ 的值。

参 考 资 料

- [1] C. McCann, et al, Geophysics, 34 (1969), 882.
- [2] E. G. 里查孙, 声学技术概要(中册), 科学出版社(1965), 第231页。
- [3] J. R. Allegra, et al, J. Acoust. Soc. Am, 51(1972), 1545; 以及该文的参考文献。
- [4] 魏荣爵、张淑仪, 物理学报, 21 (1965), 1061.
- [5] C. McCann, Acustica, 22 (1969/70), 352.
- [6] R. J. Urick, J. Acoust. soc. Am., 20 (1948), 283.
- [7] L. R. B. Duykers, J. Acoust, Soc. Am., 47 (1970), 396.
- [8] L. D. Hampton, J. Acoust. Soc. Am, 42 (1967), 882.
- [9] A. S. Ahuja, J. Appl. phys, 44 (1973), 4863.
- [10] A. S. Ahuja, J. Acoust. Soc. Am., 51 (1972), 182.
- [11] P. L. Chambré, J. Acoust. Soc. Am., 26 (1954), 329.
- [12] C. 席根等人, 吸声材料, 科学出版社(1960).
- [13] Л. Д. 朗道等人, 连续介质力学(第二册), 人民教育出版社(1960), 第388页。
- [14] W. S. Ament, J. Acoust. Soc. Am., 25 (1953), 638.
- [15] 蔡树棠, 物理学报, 12(1956), 402.
- [16] 唐应吾, 地球物理学报, 18 (1975), 269.