# 从原函数到导函数的辩证转化过程

## ——学习马克思《数学手稿》的一点体会

化学系有机化学专业73级学员　吴锡深

微分是微积分的基本概念。微分是怎样形成的呢？伟大的革命导师马克思用唯物辩证法批判地分析了微分学理论的发展历史，批判了资产阶级数学家在微分学理论中的形而上学观点，对微分的形成过程作出了正确的结论。为我们树立了用唯物辩证法研究自然科学的光辉范例。

在《数学手稿》中导出微分的方法，马克思称为**“代数方法”**。这个方法是从原函数$y=f(x)$开始，首先得到导函数$\frac{dy}{dx}=f'(x)$，然后推导出微分$dx$和$dy$。

马克思指出：**“理解微分运算时的全部困难”“正象理解否定的否定本身时那样”**（《数学手稿》$p.2$*）。从$y=f(x)$到$\frac{dy}{dx}=f'(x)$的转化过程，正是体现了这一个否定的否定的过程。了解这个过程对于我们理解马克思的**“代数的微分方法的转换”**非常重要。

恩格斯阅读了马克思《论导函数概念》这份手稿后，在给马克思的回信中对从原函数到导函数的辩证转化过程作了一个概括，**“当我们说，在$y=f(x)$这个公式中，$x$和$y$是变量，但是如果我们只停留在这一步，那末这只是一个没有任何进一步结果的论断，而$x$和$y$暂时事实上仍然是常数。只有当它们真正地，也就是在函数内部变化时，它们才真正成为变量，而且只有那时，才能显示出隐藏于最初的方程式中的不只是两个量本身的关系，而是它们的可变性的关系。最初的微商$\frac{\Delta y}{\Delta x}$表示在实际变化过程中，即在每一特定的变化当中，这种关系是如何发生的；最后的微商$\frac{dy}{dx}$才表现出它的普遍的、纯粹的关系，因此我们可以由$\frac{dy}{dx}$得出任何的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，而$\frac{\Delta y}{\Delta x}$本身永远只适应于个别场合。但为了从个别场合得出一般关系，个别场合本**

* 本文中引用的馬克思《数学手稿》中的語录，均引自北京大学《数学手稿》編譯組編譯的馬克思《数学手稿》（1975年版）一書。

**身应当予以抛弃。所以当函数完成由x到x′的过程，并带着该过程的全部后果之后，可以放心地把x′重新取做x；这已不是原来的x，只是按名称来说还是变量x，它已经过了真正的变化，……”**。(《馬克思恩格斯全集》第35卷22页)

在这里，我们首先提出两点：

一、所谓导数，就是“瞬时”因变量对自变量的变化率。例如，力学中的瞬时速度就是在运动时间的某一时刻路程变化对时间变化的比率。(注意，“瞬时”一词的含义是广义的，并不局限于时间)这里要注意的是“瞬时”、“变化”与“比率”。

二、在过程中因变量$y$与自变量$x$之间的质的关系是在变化、发展的。

从原函数导出导函数，首先要解决的是以什么作为过程的出发点的问题，就是我们应从哪一步开始。

对于$y=f(x)$，若设自变量$x$为某一个值$a$，因变量$y$对应得到的一个确定值为$b$，即$b=f(a)$。这样，在$a$这个确定点上$x$并没有变化量，从而在$b$这个确定点上$y$也没有变化量，就是变化量都为0，那末因变量对自变量的变化率就成了纯粹量意义上的$\frac{0}{0}$，也就是这个变化率毫无意义(因为它根本就没有把因变量与自变量间的变化性关系反映出来)，也无从确定。因此，原函数$y=f(x)$本身所反映的因变量$y$与自变量$x$之间的质的关系就只是**“两个量本身的关系”**，但却没有反映出**“它们的可变性的关系”**；这里的凝固的“瞬时”并没有反映出隐藏于原函数中的因变量的变化对于自变量的变化的依赖关系。

所以，我们必须让自变量$x$与因变量$y$**“真正地，也就是在函数内部”**变化起来。让$x$增长到$x_1$(这就是过程的出发点)，从而$y$增长到$y_1$。这样，我们得到了反映因变量$y$变化程度的变化量$y_1-y$(或$\Delta y$)$=f(x_1)-f(x)$。用反映自变量$x$变化程度的变化量$x_1-x$(或$\Delta x$)除这等式两边，得到有限差值之比$\frac{y_1-y}{x_1-x}$(或$\frac{\Delta y}{\Delta x}$)$=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$，对$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$进行运算，得$f^1(x)$(马克思称它为**“预备导函数”**)。这样就实现了第一次否定。结果是$\frac{y_1-y}{x_1-x}$(或$\frac{\Delta y}{\Delta x}$)$=f^1(x)$。

从这个等式的左边可以看到，分子是因变量的变化量$\Delta y$，分母是自变量的变化量$\Delta x$，而且$\Delta y$是取决于$\Delta x$的，所以在上结果中所反映的是因变量的变化对于自变量的变化的依赖关系。同时，分子中的$y$(即$f(x)$)之所以增长到$y_1$(即$f(x_1)$)仅仅是由于分母中的$x$增长到$x_1$，函数关系$y=f(x)$所反映的$y$对于$x$的依赖关系在这里依然存在着。因此，在这个否定中，凝固的“瞬时”被否定了，而函数关系$y=f(x)$所反映的因变量$y$对于自变量$x$的依赖关系仍然保持着，它已转化、发展成为因变量$y$的变化对于自变量$x$的变化的依赖关系，并且这个依赖关系是以$y$的变化程度对$x$的变化程度之比的形式(即比率的形式)而出现。这样，$y$与$x$之间的质的关系发生了

变化，向前发展了，我们得到了反映因变量$y$与自变量$x$间的变化性关系(这个关系的实际内容就反映在$f^1(x)$之中)的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$。

分析平均变化率可以看到它有两个特点。

第一，因为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是有限差值之比,所以平均变化率只适用于个别场合。例如,变速运动的平均速度$V=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，$V$总是由特定的时间间隔$\Delta t$所决定。显然，取不同的$\Delta t$值将得到不同的$V$值。

第二，但是，这并不是说各个平均变化率之间就是完全孤立的、毫无联系的。前面说过，在平均变化率中因变量$y$对于自变量$x$的依赖关系仍然保持着。这就是说，在同一个问题内，不管$\Delta x$取什么值，因变量$y$的变化对于自变量$x$的变化的依赖关系同样受到原函数$y=f(x)$的质的关系的制约，因此，各个具体的平均变化率并不是任意的，它们存在着某个普遍的关系。

所以，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$所反映的就只是在**"实际变化过程中，即在每一特定的变化当中"**因变量与自变量间的变化性关系。而一般的、纯粹的关系就寓于各个具体的平均变化率之中。

为了使个别的、特定条件下的关系转化为一般的、纯粹的关系，**"个别场合本身应当予以抛弃"**。所以必须经历再一次否定。

在$\frac{y_1-y}{x_1-x}\left(或\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=f^1(x)$中，让$x_1$变回到$x$，那末$x_1=x$，即$x_1-x=0$。按这样的运算，等式的右边转化为$f'(x)$；同时，在等式的左边由于$x_1$变回到$x$，则$y_1$也变回到$y$，那末$y_1=y$，即$y_1-y=0$。结果是$\frac{0}{0}=f'(x)$。

$\Delta x$变成零，$\Delta y$变成零，那岂不是什么也没有了吗？导数为$\frac{0}{0}$，那岂不是无从确定了吗？从量上讲，$\Delta x$、$\Delta y$是消失了，但这个否定并不是形而上学的、简单的否定，而是扬弃，是否定中有肯定。这个否定是量变到质变，是个别到一般的辩证转化。

让$x_1$向$x$变化，最后达到了变化的极限$x_1=x$，即$x_1-x=0$或$\Delta x=0$。由于这个变化，$y_1$向$y$变化，最后达到$y_1=y$，即$y_1-y=0$或$\Delta y=0$。有限差值消失了。

与此同时，如同前面所讲过的，$y$之所以增长到$y_1$仅仅是由于$x$增长到$x_1$，$y$对于$x$的依赖关系仍然存在着。同样，在这里$\frac{y_1-y}{x_1-x}\left(或\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=f^1(x)$,从等式的左边可以看到，分子中的$y_1$(即$f(x_1)$)向$y$(即$f(x)$)变化仅仅是由于分母中的$x_1$向$x$变化，在$y_1$变化过程中，原函数$y=f(x)$所反映的因变量$y$对于自变量$x$的依赖关系仍然存在着。在变化达到极限时，$y_1$达到$y$仍然是$x_1$达到$x$的结果，$y$对于$x$的依赖关系

依然保留着。但是，过程的辩证发展并不是因变量$y$与自变量$x$之间的质的关系的简单重复，**“否定就是质的关系的否定”**（《数学手稿》$P.15$）这里的否定，是在**“当函数完成由x到x′的过程，并带着该过程的全部后果之后”**进行的。也就是在已经把原函数中因变量对于自变量的依赖关系转化、发展成为适应于个别场合的因变量与自变量间的变化性关系（即平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$）的基础上进行的。从$\frac{\Delta y}{\Delta x}\rightarrow\frac{0}{0}$看到，分子中因变量的变化量$\Delta y$的消失并最终消失为零仅仅是由于分母中自变量的变化量$\Delta x$的消失并最终消失为零。这就是说，因变量$y$的变化对于自变量$x$的变化的依赖关系是始终存在着的。所以，在结果$\frac{0}{0}=f'(x)$中，以比率形式出现的$y$的变化对于$x$的变化的依赖关系被保留下来了、肯定下来了。

同时，与第一次否定一样，在这个否定中因变量$y$与自变量$x$之间的质的关系发生了变化，向前发展了。$\Delta x$、$\Delta y$消失为零时，有限差值消失了，个别场合本身被抛弃了，量变引起了质变，个别的、特定条件下的关系转化、发展成为了一般的、纯粹的关系（这个关系的实际内容就反映在$f'(x)$之中）。这样就得到了瞬时变化率。

在表达式中的$\frac{0}{0}$，因为**“它的起源和含义的全部痕迹都消失了”**（《数学手稿》$P.3$），它没有显示出原函数在特定的条件下产生了$\frac{0}{0}$的辩证转化过程，没有表达出仍然存在着的质的关系。所以用$\frac{dy}{dx}$代替$\frac{0}{0}$。结果我们得到导函数的最终表达式$\frac{dy}{dx}=f'(x)$。

这里还要说明一点，从原函数到导函数的转化过程，其实际内容就是从$f(x)\rightarrow f^1(x)\rightarrow f'(x)$的转化。同时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$和$\frac{0}{0}$或$\frac{dy}{dx}$是分别作为$f^1(x)$和$f'(x)$的对应的符号而出现（对于$\frac{0}{0}$或$\frac{dy}{dx}$与$f'(x)$，马克思称后者为前者的**“实在等价物”**，前者为后者的**“符号等价物”**）。对于上述过程来说，它们就代表着过程的某个环节。

从上述的整个过程可以看到，否定的否定的结果并不是简单的回复到起始点——“瞬时”，而是螺旋式上升了，发生了质的变化。