黄金分割法最优性证明

吴兹潜

（数学力学系）

通过实践的摸索，并根据文〔1〕的提示，我们应用数论的方法，在选点方法、试验次数、初始试验点不事先知道的情况下证明黄金分割法的最优性。

§1 基本概念和定义

定义1 若函数$y(x)$在区间$[a,b]$上只有一个最大值点x^*，在点x^*左侧函数严格增加，在最大值点的右侧，函数严格减少，则称函数$y(x)$在区间$[a,b]$上为单峰的。

不失一般性，今后只研究具有最大值的单峰函数。

单峰函数有如下性质：$y=y(x)$是$[a,b]$上的单峰函数，x_1和x_2($x_1<x_2$)是$[a,b]$上的两个点，而$y_1=y(x_1)$和$y_2=y(x_2)$是点x_1和x_2上y的函数值。由于$y=y(x)$是单峰函数，因此，1)若$y_2>y_1$，则最大值点$x^*\notin[a,x_1)$，故可丢掉$[a,x_1)$。2)如果$y_2<y_1$则最大值点$x^*\notin(x_2,b]$，故可丢掉$(x_2,b]$。

来回调试的选点方法基本上分为对称和非对称这两大类。所谓对称的，就是在给定的试验区间内，第二个试验点与第一个试验点按区间的中点对称。

如果选点是对称的，可能出现两种情况。一是做了若干次试验后，新的试验点落在上两试验点之间，一是始终不出现这样的试验点，称前一种试验点为非正规的，称后者为正规的。

定义2 初始试验点为x_1，作n次试验，如果每一新的试验点与留在区间内的未试点，在留下的试验区间内按中点对称，称这类选点方法为对称的，否则称为非对称的。

定义3 做n次试验，新的试验点不在前两试验点之间选取者，称这类选点方法为正规的，否则称为非正规的。称正规对称的为A类，非正规对称的为B类、正规非对称的为C类、非正规非对称的为D类选点方法。

定义4 假设x^*是单峰函数$y=y(x)$的最大值点，$x^*\in[a,b]$。如果在$[a,b]$内有一经过试验的点x_i，x_i到端点a,b的最大距离记为δ，

$$\delta=max(|x_i-a|,\ |x_i-b|),$$

而x_i和x^*的距离不大于δ，称δ为x_i的精度。

定义 5 来回调试法的最佳精度是按照来回调试的A、B、C、D四类选点方法。在试验次数对等的情况下。对于一切初始试验点$x\in(\frac{1}{2},1)$、对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，在定义4的精度意义下的一切精度$\{\delta\}$中的最小值者称为来回调试法的最佳精度。

本文在定义5的意义下，在选点方法、试验次数、初始试验点不事先知道的情况下来证明黄金分割法的最优性。

§2 菲波那奇数列及其性质

数列1,1,2,3,5,8,13,21,……称为菲波那奇数列。这一数列有下面的递归公式：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, \quad n\geqslant 2,$$

$$F_0=F_1=1.$$

$\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 有下列的性质：

性质 1

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_n+F_{n-1}}, \quad n\geqslant 1.$$

性质 2

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^n, \quad n\geqslant 0,$$

或

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}-\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}, \quad n\geqslant 0.$$

性质 3

$$F_nF_{n-1}-F_{n-2}F_{n+1}=(-1)^{n-1}.$$

性质 4

$$\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}>\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}, \quad \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}<\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}.$$

性质 5 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$，$n=1,2,\cdots$ 是既约分数

性质 6

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887498\cdots\cdots$$

性质 7

$$F_{n+1}>n+1, \quad n\geqslant 3.$$

以上七个性质可以在文〔2〕中找到证明，此外还有如下的性质：

性质 8

$$F_{n+1}=\frac{1-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}}{\sqrt{5}\,\omega^{n+2}}.$$

证　由于

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\omega},$$

即得

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{\omega^{n+2}}-(-1)^{n+2}\omega^{n+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\,\omega^{n+2}}\left\{1-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}\right\}.$$

得所证。

性质 9

$$\omega^n>\frac{1}{F_{n+1}},\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

证　由于

$$\omega^n-\frac{1}{F_{n+1}}=\omega^n-\frac{\sqrt{5}\,\omega^{n+2}}{1-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}}$$

$$=\omega^n\left[\frac{1-\sqrt{5}\,\omega^2-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}}{1-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}}\right]$$

$$=\omega^{n+2}\left[\frac{1-(-1)^n\omega^{2n}}{\sqrt{5}\,\omega^n}\cdot\frac{\sqrt{5}\,\omega^{n+2}}{1-(-1)^{n+2}\omega^{2(n+2)}}\right]$$

$$=\omega^{n+2}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}>0.$$

性质10

$$\frac{1}{F_n}>\omega^n,\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

证　由

$$\frac{1}{F_n}-\omega^n=\frac{\sqrt{5}\,\omega^{n+1}}{1-(-1)^{n+1}\omega^{2(n+1)}}-\omega^n$$

$$=\omega^n\left[\frac{\sqrt{5}\,\omega}{1-(-1)^{n+1}\omega^{2(n+1)}}-1\right]$$

$$=\frac{\omega^2+(-1)^{n+1}\omega^{2(n+1)}}{1-(-1)^{n+1}\omega^{2(n+1)}}\,\omega^n=\frac{(1+(-1)^{n+1}\omega^{2n})\omega^{n+2}}{1-(-1)^{n+1}\omega^{2(n+1)}}$$

$$=\omega^{n+1}\frac{F_{n-1}}{F_n}>0.$$

得所证。

§3 A_1、A_2类选点方法的精度估计

假设在〔0,1〕上的任一单峰函数，按A类选点方法作$n+1$次试验，并且假设第$n+2$个试验点x_{n+2}和留下的前一试验点重合，对于这样的A类选点方法记为A_1类。

由于试验区间为〔0,1〕，故区间长度C_1为1，作两次试验留下的区间长度为

$$C_2=x_1=k_1C_1,$$

作完第$n+1$次试验，留下的区间长度为

$$C_{n+1}=\prod_{j=1}^{n}k_jC_1. \tag{1}$$

由于选点是对称的，不管各试验点的函数值如何，最后留下的区间长度总是(1)。这样一来，我们就能处理〔0,1〕上的全体单峰函数了。

基于上述的考虑，无妨假设在$n+1$个试验点及其试验数据适合下面的不等式：

$$y_1(x_1)<y_2(x_2)<\cdots\cdots<y_n(x_n)<y_{n+1}(x_{n+1}), \tag{*}$$
$$x_1>x_2>\cdots\cdots>x_n>x_{n+1}.$$

由于A_1类选点法假设$x_{n+1}=x_{n+2}$，故得

$$C_1=x_0=1,$$

$$C_i=x_{i-1}=k_ix_{i-2}=\prod_{j=1}^{i-1}k_jC_1,\qquad i=2,3,\cdots\cdots n+2, \tag{A}$$

$$x_i=x_{i-2}-x_{i-1},\qquad i=2,3,\cdots\cdots n+2. \tag{B}$$

由(B)易得

$$x_i=F_{n+2-i}\,x_{n+1},\qquad i=0,1,\cdots\cdots,n.$$

当$i=0$时得$x_{n+1}=\dfrac{1}{F_{n+2}}$，当$i=1,2$时得$x_1=\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，$x_2=\dfrac{F_n}{F_{n+2}}$。这就是说按$A_1$类选点法作$n+1$次试验，把区间长度分为$F_{n+2}$个等份，每等份的长度$x_{n+1}=\dfrac{1}{F_{n+2}}$，而且初始试验点$x_1=\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，能够处理的点数至多是均匀分布的$F_{n+2}-1(n=0,1,2,\cdots)$个点。由定义4其精度为$\delta=\dfrac{1}{F_{n+2}}$。反之，如果按$A_1$类选点方法作$n+1$次试验后的精度为$\dfrac{1}{F_{n+2}}$，则不难证明，其初始试验点一定是$x_1=\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$。于是得下面的定理：

定理G_A 对于在〔0,1〕上的全体单峰函数，若初始试验点为$x_1=\dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$，按$A_1$类选点法作$n+1$次试验，其精度为

$$\delta_{A1}=\frac{1}{F_{n+2}}.$$

附记　应用定理G_A可以处理离散点的优选问题。

由性质 6 得知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\omega.$$

若选初始试验点为$x_1=\omega$，按A类选点法作有限次试验，称这类选点法为A_2类。

定理 G_A^{ω} 假设初始试验点$x_1=\omega$，按A类选点方法作$n+1$次试验，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，其精度为

$$\overset{\omega}{\delta}_A=\omega^{n+1}.$$

证　由于$\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$有一个特殊性质，即

$$1-\omega=\omega^2,$$

ω和$1-\omega$把区间〔0,1〕分成中外比，不管丢掉那一段(〔$0,\omega^2$)或(ω,1〕)，所余下的区间包含有一个巳试点，其位置与原来两点之一(ω或ω^2)在区间〔0,1〕所处的位置的比例是一样的。往下的试验点和留下的试验区间都具有这一性质。因此，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$作$n+1$次试验，最后留下的最大值点到两端点的最大距离为ω^{n+1}。反之，如果按A_2类选点方法作$n+1$次试验后的精度为ω^{n+1}，则不难证明其初始试验点一定是$x_1=\omega$。因此，对于精度来说，它与最大值点的位置无关，若x_i是$n+1$次试验的极大值点，则x_i的精度为

$$\overset{\omega}{\delta}_A=max(|x_i-x_{n+1}|,|x_i-x_n|)=\omega^{n+1},$$

故得证。

定理G_{1A} 在事先给定做有限的试验次数的情形下，A_1类选点方法比A_2类选点方法的精度佳。

证　设试验次数为$n+1$次。由定理G_A得知，按A_1类选点方法做$n+1$次试验其精度为

$$\delta_{1A}=\frac{1}{F_{n+2}}.$$

由定理$\overset{\omega}{G}_A$，按A_2类选点方法作$n+1$次试验，其精度为

$$\overset{\omega}{\delta}_A=\omega^{n+1}.$$

由菲波那奇数列的性质9得

$$\omega^{n+1}-\frac{1}{F_{n+2}}=\omega^{n+3}\frac{F_n}{F_{n+2}}>0,\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

即得

$$\overset{\omega}{\delta}_A > \delta_{1A}.$$

得所证。

§4 按A类选点方法作事先给定的有限次试验的最佳精度

非波那奇数列的性质6指出下面的不等式

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}\cdots<\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}<\omega<\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}<\cdots<\frac{2}{3}<1$$

成立。上节我们讨论了下列初始试验点

$$\frac{2}{3},\ \cdots,\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}},\ \omega,\ \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \cdots,\frac{3}{5},\ \frac{1}{2}$$

所可能进行的试验次数及其精度。正如最佳试验精度的定义所指出的那样，必须对 $x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$ 内的一切初始试验点进行讨论，为此，我们讨论初始试验点 x_1 属于区间 $(\frac{1}{2},\frac{3}{5})$、…、$(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}},\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}})$、$(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\omega)$、$(\omega,\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}})$……、$(\frac{5}{8},\frac{2}{3})$、$(\frac{2}{3},1)$ 时，按对称的选点方法，做有限次试验所可能出现的情况。

引理 1 若 $x_1\epsilon(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\omega)$ 按 A 类选点方法只能做 $2n+3$ 次试验。若第 $2n+4$ 个试验点不属于 A 类选点方法，则 $x_1\epsilon(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}})$。

证 不妨假设

$$y(x_1)<y(x_2)<\cdots<y(x_{2n+3}),$$

$$x_1>x_2>\cdots>x_{2n+3}$$

成立，由于 $x_1\epsilon(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\omega)$，命

$$x_1=\omega-\varepsilon,\ \varepsilon>0,$$

易得

$$0<\varepsilon<\frac{\omega^{2n+3}}{F_{2n+2}}. \tag{1}$$

在区间〔0, 1〕上与 x_1 对称的点为

$$x_2=1-x_1=\omega^2+\varepsilon,$$

由上式及(1)得

$$\omega^2<x_2<\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}.$$

不难算出第 $i+1$ 个试验点为

$$x_{i+1}=\omega^{i+1}+(-1)^{i+1}F_i\varepsilon,\ i\geqslant 0, \tag{2}$$

由(1)及(2)得

$$\omega^{i+1}<x_{i+1}<\frac{F_{2n-i+1}}{F_{2n+2}},\qquad i=1,3,5,\cdots,2n+1,\tag{3}$$

$$\frac{F_{2n-i+1}}{F_{2n+2}}<x_{i+1}<\omega^{i+1},\qquad i=2,4,6,\cdots,2n+2.\tag{4}$$

这就是说，按A类选点方法它只能做$2n+3$次试验，而第$2n+4$个试验点，由于F_{-2}没有定义，按A类选点法无法进行下去。故引理的前部分得证。由于x_{2n+4}不属于A类选点方法，因此

$$x_{2n+3}<x_{2n+4}<x_{2n+2},$$

即

$$\omega^{2n+3}-F_{2n+2}\bar{\varepsilon}<\omega^{2n+4}+F_{2n+3}\bar{\varepsilon}<\omega^{2n+2}+F_{2n+1}\bar{\varepsilon},$$

得

$$\frac{\omega^{2n+5}}{F_{2n+4}}<\bar{\varepsilon}<\frac{\omega^{2n+3}}{F_{2n+2}},\tag{5}$$

由(5)得初始试验点的选择范围为

$$\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}=\omega-\frac{\omega^{2n+3}}{F_{2n+2}}<x_1<\omega-\frac{\omega^{2n+5}}{F_{2n+4}}=\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}.$$

这就是说，若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，按$A$类选点方法可做$2n+3$次试验，而第$2n+4$个试验点不属于$A$类选点，其初始点$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，故引理得证。

引理2　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，若初始试验点$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，则按$A$类选点方法可作$2n+3$次试验，留下的试验区间的长度为

$$C_{2n+3}=F_{2n}-F_{2n+1}x_1.$$

反之，按A类选点方法，在区间〔0,1〕上作若干次试验，若最后两次试验留下的区间长度分别为$C^2=F_{2n}\varepsilon+\frac{1}{F_{2n+2}}$及$C^1=\frac{1}{F_{2n+2}}-F_{2n+1}\varepsilon$，则初始试验点$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，而且有$2n+3$个已试点。

证　若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，命

$$x_1=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+\varepsilon,$$

易得

$$0<\varepsilon<\frac{1}{F_{2n+2}F_{2n+4}}.$$

如果初始试验点为x_1，按A类选点方法作试验，作$2i+2$次留下区间长度为

$$C_{2i+2}=F_{2i}\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+\varepsilon\right)-F_{2i-1}=F_{2i}\varepsilon+\frac{F_{2n-2i+1}}{F_{2n+2}}.$$

作$2i+3$次试验留下区间长度为

$$C_{2i+3}=F_{2i}-F_{2i+1}x_1=\frac{F_{2n-2i}}{F_{2n+2}}-F_{2i+1}\varepsilon.$$

当$i=n$时，由上式证明引理前半部分.

若最后二次试验留下的区间长度为

$$C^1=\frac{1}{F_{2n+2}}-F_{2n+1}\varepsilon,$$

$$C^2=F_{2n}\varepsilon+\frac{1}{F_{2n+2}},$$

由于选点方法按A类进行，故

$$C^3=C^1+C^2,$$

一般有

$$C^i=C^{i-2}+C^{i-1}=\frac{F_{i-1}}{F_{2n+2}}+(-1)^i F_{2n+2-i}\varepsilon,$$

当$i=2n+2$时有

$$C^{2n+2}=C^{2n}+C^{2n+1}=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+F_0\varepsilon=x_1,$$

$$C^{2n+3}=\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+2}}-F_{-1}\varepsilon=1.$$

故引理 2 得证.

类似引理 1 和引理 2 可以证明下面的引理。

引理3　若$x_1\varepsilon\left(\omega,\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$,按$A$类选点方法只能做$2n+2$次试验。若第$2n+3$个试验点不属于$A$类选 点 方法，则 $x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$。

引理 4　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，若初始试验点$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，则按$A$类选点方法可作$2n+2$次试验，留下的区间长度为

$$C_{2n+2}=F_{2n}x_1-F_{2n-1}.$$

反之，按A类选点方法，在区间〔0,1〕上作若干次试验，若最后两次试验 留下的区间 长 度 为$C^1=\frac{F_0}{F_{2n+1}}-\varepsilon F_{2n}$，$C^2=F_{2n-1}\varepsilon+\frac{F_1}{F_{2n+1}}$，则初 始 试 验 点 $x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，而且有$2n+2$个已试点.这里，$x_1=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}-F_0\varepsilon$,

$$0<\varepsilon<\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}.$$

定理G_{2A} 若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，按$A$类选点方法作 $k\leqslant 2n+3$次试验，其精度

$$\delta_{2A}>\frac{1}{F_{k+1}}.$$

证 当 $k<2n+3$时由引理 3 和 4，无妨假设

$$y(x_1)<y(x_2)<\cdots\cdots<y(x_k),$$

$$x_1>x_2>\cdots\cdots>x_k,\qquad k=1,2,\cdots\cdots,\ 2n+2.$$

由于

$$x_k=\frac{F_{2n+2-k}}{F_{2n+2}}+(-1)^{k+1}F_{k-1}\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{F_{2n+2}F_{2n+4}},$$

$$\frac{F_{2n+4-k}}{F_{2n+4}}<x_k<\frac{F_{2n+2-k}}{F_{2n+2}},\qquad k\text{ 为偶数},$$

$$\frac{F_{2n+2-k}}{F_{2n+2}}<x_k<\frac{F_{2n+4-k}}{F_{2n+4}},\qquad k\text{ 为奇数。}$$

按照A类选点方法及精度定义有

$$\delta_{2A}=max(x_k-0,\ x_{k-1}-x_k)=x_k.$$

当k为偶数时得

$$\frac{F_{2n+4-k}}{F_{2n+4}}-\frac{1}{F_{k+1}}=\frac{F_{2n+2-k}F_{k-1}}{F_{2n+4}F_{k+1}}>0,$$

当k为奇数时得

$$\frac{F_{2n+2-k}}{F_{2n+2}}-\frac{1}{F_{k+1}}=\frac{F_{k-1}F_{2n-k}}{F_{2n+2}F_{k+1}}>0.$$

由此立得

$$\delta_{3A}>\left\{\begin{array}{l}\frac{F_{2n+4-k}}{F_{2n+4}},\ k\text{为偶数}\\ \frac{F_{2n+2-k}}{F_{2n+2}},\ k\text{为奇数}\end{array}\right\}>\frac{1}{F_{k+1}}.$$

当$k=2n+3$时，由于

$$\delta_{2A}=max(x_{2n+3},\ x_{2n+2}-x_{2n+3}),$$

因为$x_{2n+3}\in\left(0,\ \frac{1}{F_{2n+4}}\right)$，$x_{2n+2}\in\left(\frac{F_2}{F_{2n+4}},\ \frac{1}{F_{2n+2}}\right)$，即得

$$\delta_{2A}>\frac{1}{F_{2n+4}}。$$

得所证。

同理可以证明如下定理：

定理G_{3A} 若$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}, \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，对于〔0.1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，按$A$类选点方法作$k\leqslant 2n+2$次试验，其精度

$$\delta_{3A} > \frac{1}{F_{k+1}} 。$$

定理G_g 对于〔0.1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，按A类选点方法作事先给定的有限$k(k=1,2,\cdots,N)$次试验，对于一切初始试验点$x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$，当且仅当$x_1=\frac{F_k}{F_{k+1}}$时其精度最佳。

证明 由定理G_A得知，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，若$x_1=\frac{F_k}{F_{k+1}}$，按A类选点方法作事先给定的有限的k次试验，可以处理$F_{k+1}-1$个点，其精度为

$$\delta_g=\frac{1}{F_{k+1}} 。$$

由定理$G_{2A}, G_{3A}, G_A^{\infty}$可以证明，这一精度是按$A$类选点方法，对于$x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$的全体初始试验点，作对等的、事先给定的、有限的$k$次试验的最佳精度。

定理G_ω^∞ 对于〔0.1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$按A类选点方法作无限多次试验，如果初始试验点$x_1=\omega$，则其精度趋于零。

证明 若试验次数无限，当$n\to\infty$时，由定理G_A^ω得

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\omega^n=0 。$$

在以下数节，定理G_ω^∞的精度将和B、C、D类选点法作无限次试验的精度进行比较。这里就不作进一步的论述了。

§5 再论A_1、A_2类选点法的精度问题

从上两节的讨论中，我们证明了A_1类$(x_1=\frac{F_i}{F_{i+1}}, i=1,2,\cdots\cdots)$和$A_2$类选点法$(x_1=\omega)$是$A$类选点法对于$x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$做有限次试验的最优方案，这一节再对$A_1$和$A_2$类在$x_1=\frac{F_i}{F_{i+1}}$和$x_1=\omega$的情况下作有限次试验的精度作比较。

按A_1类选点法作n次试验可能出现如下情况：作n次试验，符合要求的试验数据正好到来，作$n-m$次试验，$m<n$，合乎要求的试验数据提前到来。作n次试验，合

乎要求的试验数据没有到来。现将A_1和A_2类选点法作如下比较：

1 按A_1类和A_2类选点法各作n次试验，合乎要求试验数据正好到来，由定理G_{1A}可知，A_1类选点方法比A_2类选点方法的精度佳。如果合乎要求的试验数据没有到来，试验还要继续下去，则A_2类选点方法比A_1类选点方法的精度佳。

2 按A_1类选点法安排事先给定作n次试验的方案，但只作$n-m$次，$n>m$，则其精度为

$$\delta_A^{n-m}=\frac{F_{m+1}}{F_{n+1}}.$$

按A_2类选点法作$n-m$次其精度为

$$\delta_A^{\omega,n-m}=\omega^{n-m}$$

而且

$$\delta_A^{\omega,n-m}-\delta_A^{n-m}=(-1)^{m+2}\omega^{n+2}\frac{F_{n-m-1}}{F_{n+1}},$$

当m为偶数时

$$\delta_A^{\omega,n-m}>\delta_A^{n-m},$$

当m为奇数时

$$\delta_A^{\omega,n-m}<\delta_A^{n-m}.$$

故A_1类和A_2类选点法处于同等地位。

定理G_i 对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，按A_2类选点法做不限次数的有限次试验，A_2类是A类选点法中的最优者。

§6 B类选点法的精度估计

由§4的引理1和2显然下面的两个引理成立：

引理5 若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，按$B$类选点法，其试验次数至少为$2n+4$次。

引理6 若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，按$B$类选点法作试验，其次数至少为$2n+3$次。

引理7 若$x_1=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}-\frac{\omega^2}{F_{2n+1}(F_{2n+1}+F_{2n}\omega^2)}$，$n=1,2,\cdots\cdots$和$x_1=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+\frac{\omega^2}{F_{2n+2}(F_{2n+2}+F_{2n+1}\omega^2)}$，$n=0,1,2,\cdots$，按$B$类选点法可以作无限次试验。

证 若$x_1\in\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，则必有这样的单峰函数$y(x)$和初始试点$x_1$使

$$x_{2n+4}=\omega\, x_{2n+2},\quad x_{2n+3}=\omega^2 x_{2n+2}.$$

由于

$$x_{2n+2}=\frac{F_0}{F_{2n+2}}-F_{2n+1}\varepsilon,$$

$$x_{2n+3}=F_{2n+2}\,\varepsilon.$$

故得

$$\varepsilon=\frac{\omega^2}{F_{2n+2}+\omega^2F_{2n+1}}\cdot\frac{F_0}{F_{2n+2}},$$

立得

$$x_1=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+\varepsilon=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}+\frac{\omega^2}{(F_{2n+2}+\omega^2F_{2n+1})F_{2n+2}}.$$

而且易证$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$。

同理，若$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，按$B$类选点方法，对于〔0,1〕上的全体单峰函数会遇到这样的单峰函数$y(x)$和初始试验点x_1，使

$$x_{2n+3}=\omega x_{2n+1},$$

$$x_{2n+2}=\omega^2x_{2n+1}.$$

由于

$$F_{2n+1}\varepsilon=\omega^2\left(\frac{1}{F_{2n+1}}-F_{2n}\varepsilon\right),$$

故

$$\varepsilon=\frac{1}{F_{2n+1}}-\frac{\omega^2}{F_{2n+1}+\omega^2F_{2n}}$$

得

$$x_1=\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}-\frac{\omega^2}{F_{2n+1}(F_{2n+1}+\omega^2F_{2n})}.$$

而且$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}},\ \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$。

定理G_{1B}　若$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，按$B$类选点方法至少作$2n+k$次试验，$k\geqslant4$，对于〔0,1〕上全体单峰函数$\{y(x)\}$起码有一单峰函数，其精度

$$\delta_{1B}>\frac{1}{F_{2n+k+1}}.$$

证明　由于$x_1\epsilon\left(\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}},\ \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+4}}\right)$，由引理5，它至少做$2n+k(k\geqslant4)$次试验。命$k=m+2$，则它的试验次数为$2n+2+m$次。不妨假设

$$y(x_1) < y(x_2) < \cdots < y(x_{2n+3}),$$

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_{2n+3}.$$

显然第 $2n+4$ 个试验点 $x_{2n+4} \in (x_{2n+3}, x_{2n+2})$. 而留下的试验区间为 $[0, x_{2n+2}]$. 作变换

$$z = \frac{x}{x_{2n+2}},$$

这一变换把区间 $[0, x_{2n+2}]$ 变成 $[0,1]$，把点 x_{2n+4} 和 x_{2n+3} 变成

$$z_1 = \frac{x_{2n+4}}{x_{2n+2}}, \quad z_2 = \frac{x_{2n+3}}{x_{2n+2}},$$

由于 z_1 和 z_2 是在区间 $[0,1]$ 按中点对称，因此，$\frac{1}{2} < z_1 < 1$，$0 < z_2 < \frac{1}{2}$. 由定理 G_g 得知，其最佳精度是取

$$z_1 = \frac{x_{2n+4}}{x_{2n+2}} = \frac{F_m}{F_{m+1}}, \quad m = 2, 3, \cdots,$$

即得

$$x_{2n+4} = \frac{F_m}{F_{m+1}} x_{2n+2},$$

做 $m-2$ 次试验后得

$$x_{2n+4+(m-2)} = \frac{F_0}{F_{m+1}} x_{2n+2}.$$

按照精度的定义得

$$\delta_{1B} = \frac{x_{2n+2}}{F_{m+1}} > \frac{F_2}{F_{m+1} F_{2n+4}}.$$

另方面，由于

$$\frac{F_2}{F_{m+1} F_{2n+4}} - \frac{1}{F_{2n+m+3}} > 0,$$

即得

$$\delta_{1B} > \delta_A^{2n+m+2},$$

得所证。

由引理 6 还可以证明如下定理：

定理 G_{2B}　若 $x_1 \in \left(\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}, \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)$，按 B 类选点方法至少做 $2n+k$ 次试验，$k \geqslant 3$，对于 $[0,1]$ 上全体单峰函数 $\{y(x)\}$，起码有这样一个单峰函数 $y(x)$，其精度

$$\delta_{2B} > \frac{1}{F_{2n+k+1}}.$$

定理 G_B^∞　若

$$x_1 = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} - \frac{\omega^2}{F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n}\omega^2)}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (*)$$

或

$$x_1=\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}-\frac{\omega^2}{F_{2n+2}(F_{2n+2}+\omega^2F_{2n+1})}, \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (**)$$

按B类选点方法作无限多次试验其精度比A_2类选点方法作无限多次试验的差。

证明 1　如果初始试验点为（*），对于〔0,1〕上的全体单函峰数$\{y(x)\}$会遇到这样的$y(x)$，使

$$x_{2n+2}=F_{2n+1}\varepsilon=\frac{\omega^2}{(F_{2n+1}+F_{2n}\omega^2)},$$

而

$$x_{2n+3}=x_{2n+1}-x_{2n+2}=\frac{\omega}{F_{2n+1}+F_{2n}\omega^2}.$$

命 $z=\dfrac{x}{x_{2n+1}}$，这一变换把区间〔$0,x_{2n+1}$〕变为〔0,1〕，把x_{2n+3}，x_{2n+2}变为

$$z_1=\frac{x_{2n+3}}{x_{2n+1}}=\omega,$$

$$z_2=\frac{x_{2n+2}}{x_{2n+1}}=\omega^2,$$

因此，按B类选点方法试验可以无限多次的进行下去。如果再做$m-2$次试验（连同z_1，z_2在内是m次），则

$$z_m=\frac{x_{2n+m+1}}{x_{2n+1}}=\omega^m,$$

得

$$x_{2n+m+1}=\omega^m x_{2n+1},$$

其精度为

$$\delta_B^{2n+m+1,\omega}>\omega^m\frac{F_2}{F_{2n+3}},$$

而按A_2类选点方法作$2n+m+1$次试验，其精度为

$$\delta_A^{2n+m+1,\omega}=\omega^{2n+m+1},$$

不难证明

$$\delta_B^{2n+m+1,\omega}>\delta_A^{2n+m+1,\omega}$$

当$m\to\infty$时，$\delta_A^{2n+m+1,\omega}$比$\delta_B^{2n+m+1,\omega}$收敛得快。

2　如果初始试验点为（**），对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，一定会遇到这样的单峰函数$y(x)$，使

$$x_{2n+3}=F_{2n+2}\varepsilon=\frac{\omega^2}{F_{2n+2}+w^2F_{2n+1}},$$

而

$$x_{2n+4}=x_{2n+2}-x_{2n+3}=\frac{\omega}{F_{2n+2}+\omega^2F_{2n+1}},$$

命

$$z=\frac{x}{x_{2n+2}},$$

它把区间〔$0,x_{2n+2}$〕变为〔$0,1$〕，把 x_{2n+4} 及 x_{2n+3} 变为 $z_1=\frac{x_{2n+4}}{x_{2n+2}}=\omega$，$z_2=\frac{x_{2n+3}}{x_{2n+2}}=\omega^2$，因此试验可以无限多次地进行下去，如果再进行$m-2$次试验，则

$$z_m=\frac{x_{2n+m+2}}{x_{2n+2}}=\omega^m,$$

得

$$x_{2n+m+2}=\omega^m x_{2n+2},$$

其精度为

$$\delta_B^{2n+m+2,\omega}>\omega^m\frac{F_2}{F_{2n+4}},$$

按 A_2 类选点方法作 $2n+m+2$ 次试验的精度为

$$\delta_A^{2n+m+2,\omega}=\omega^{2n+m+2}.$$

不难证明

$$\delta_B^{2n+m+2,\omega}>\delta_A^{2n+m+2,\omega},$$

故 $m\to\infty$ 时，$\delta_A^{2n+m+2,\omega}$ 比 $\delta_B^{2n+m+2,\omega}$ 收敛得快。证完。

按照最佳精度的定义，B类选点法比A_1和A_2选点法都劣，故B类选点法可以淘汰。

§7 C类选点方法的精度估计

C类选点方法是正规非对称的。C类和A类选点方法不同之处，在于选点的对称性上。对于试验次数是有限的情形，如果我们能够把非均匀分布的选点变成是均匀分布的情形来处理，则C类选点方法和A类选点方法就无什么区别了。

由于C类选点方法是正规的，作n次试验，它可以处理的点数是 $F_{n+1}-1$个点，如果把这 $F_{n+1}-1$ 个非均匀分布的选点，按序排列下来，即

$$0<x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{F_{n+1}-1}<x_{F_{n+1}}=1,$$

我们考虑如下的足码区间〔$0,F_{n+1}$〕，在这一足码区间内有 $F_{n+1}-1$个均匀分布的足码点$1,2,\cdots,F_{n+1}-1$，对足码区间的足码点进行优选，第一个试验足码点为F_n，即 x_{F_n}；第二个试验足码点为F_{n-1}，即$x_{F_{n-1}}$，这样就把C类选点方法变为 A_1 类选点方法来处理了。如果这些非均匀分布的点是离散点，则它是C类选点方法中的最佳者。

定理G_c　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，按C类选点方法，作n次试验，其精度为

$$\delta_c^n > \frac{1}{F_{n+1}}。$$

证明　按C类选点方法作n次试验，对于〔0,1〕上的全体单峰函数其精度为

$$\delta_c^n = \max_{1\leqslant i\leqslant F_{n+1}-1}(|x_i - x_{i-1}|).$$

故

$$\delta_c^n > \frac{1}{F_{n+1}},$$

得所证。

按C类选点方法作无限多次试验，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，我们一定会遇到这样的单峰函数，它的最大值点$x^*\in(0,x_n')$，选取初始试验点为

$$x_1 = x_n' + (1 - x_n')\omega,$$

在区间〔x_n',1〕选取对称点作试验，而且这些试验点对于区间〔0,1〕，……都是C类选点，做不限次数或无限多次试验其精度为

$$\delta_C > x_n' - 0$$

定理G_{1C}　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，起码有这样的一个单峰函数$\{y(x)\}$，按C类选点方法作不限次数或无限多次试验，其精度比A类选点方法劣。

除离散点的情形外，按最佳精度的定义，C类选点法被淘汰。

§8　D类选点方法的精度估计

按D类选点方法作试验，对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，我们一定会遇到这样的单峰函数$y(x)$，它的最大值点$x^*\in(0,x_2)$。选定两个试验点x_1和x_2作试验，如果$y(x_2)>y(x_1)$，在区间〔x_2,x_1〕内选取

$$x_3 = x_2 + (x_1 - x_2)\omega, \tag{1}$$

然后，在区间〔x_2,x_1〕上按中点选取x_3的对称点做试验，等等，这些试验点对于区间〔$0,x_1$〕都是D类选点，它可以做无限多次的试验，其精度为

$$\delta_D > x_2 - 0.$$

如果作有限次试验，把区间〔x_2,x_1〕分成F_n等份，则（1）改写成

$$x_3 = x_2 + (x_1 - x_2)\frac{F_{n-1}}{F_n},$$

然后，在区间〔x_2,x_1〕上按A_1类选点方法作$n-1$次试验，在区间〔$0,x_1$〕……内这些试验点都是D类的，其精度为

$$\delta_D^{n-1,2}=\frac{x_1-x_2}{F_n}+(x_2-0)\text{。}$$

定理G_D　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，起码有这样的一个单峰函数，按D类选点方法作事先给定的有限次试验，不限次数的有限次试验和无限次试验其精度比A类选点方法劣。

按照最佳精度定义，D类选点法被淘汰。

§ 9　来回调试法之最佳精度

通过上面的讨论，关于来回调试法的最佳精度有如下定理：

定理 1　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，对于一切初始试验点$x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$，对于$A$、$B$、$C$、$D$四类选点方法，事先给定作有限的$n$次试验，当$x_1=\frac{F_n}{F_{n+1}}$按$A$类选点方法作$n$次试验，其精度为

$$\delta_A^n=\frac{1}{F_{n+1}},$$

它是来回试法做事先给定的有限的n次试验的最佳精度。

证明　由定理Gg、定理G_{1B}、定理G_{2B}、定理G_C、定理G_D即得所证。

定理 2　对于〔0,1〕上的全体单峰函数$\{y(x)\}$，对于一切初始试验点$x_1\epsilon(\frac{1}{2},1)$，对于$A$、$B$、$C$、$D$四类选点方法，作不限次数的有限次试验，当$x_1=\omega$，按$A$类选点方法作试验为最优。

证明　由定理G_i、定理G_{1B}、定理G_{2B}、定理G_{1C}、定理G_D即得证。

定理 3　对于〔0,1〕上全体单峰函数，当$x_1=\omega$，按A类选点方法作无限多次试验，它是A、B、C、D四类选点方法中进行无限多次试验中的最优者。

证明　由定理$G_A^{\omega,\infty}$、G_B^{∞}定理G_{1C}、定理G_D即得证。

定理 1 就是通常所讲的分数法最优性的证明；定理 2 、3 就是黄金分割法的最优性证明。

参 考 文 献

〔1〕华罗庚，优选法平话及其补充，国防工业出版社，1971,28—29.
〔2〕华罗庚，数论导引，科学出版社，第十章.

On the Proof of the Optimal Property of the (Golden Section Method)

Wu Cigian (Wu Tzechine)

abstract

In this paper we used the method of the theory of numbers, in case of the definition with optimal accuracy, we proved the optimal method of trial in recur is golden section method (Fibonacci method).