

规范场专题讨论会述评报告专栏

编者按：1978年5月由中国科学院主办，中山大学负责组织，召开了全国基本粒子理论的规范场专题讨论会。参加的有来自中国科学院各有关研究所和各高等院校等二十六个单位的代表。会议对国外基本粒子理论研究中的重要方向——规范场理论的各个方面，进行了系统的介绍和述评。同时也交流了国内规范场研究工作的成果。会议上的述评报告有十篇，研究报告有二十一篇。本刊在规范场专题讨论会述评报告专栏里，将陆续选登其中的部分述评报告。这几篇报告比较系统地介绍了当前规范场研究中一些最活跃的课题，例如，量子色动力学，赝粒子（或称为瞬子）的物理意义，规范场方程的一些新的经典解（半子），规范场的点阵量子化，规范场的新的重正化方法，基本粒子的颜色模型，规范性的动力学自发破缺等，它们概括了规范场研究中特别是与强相互作用有关的一些重要方向。本专栏是由中山大学物理系基本粒子理论研究室供稿的。

量子色动力学(QCD)简介

沈鼎昌

(中国科学院高能物理研究所)

§ 1. 引言

人们对强作用的研究，可以追溯到量子场论发展的早期——三十年代。汤川理论⁽¹⁾的提出，无疑是强相互作用理论划时代的一件事，从那个时候起，人们逐渐对强相互作用和弱相互作用有越来越多的了解。但是，很快就发觉，要把强相互作用建立在拉氏场论的基础上，有着巨大的困难，一是发散的困难，二是缺乏可靠的计算方法。

在四十年代间发展起来的重正化方法⁽²⁾，对量子场论的发散问题有所澄清，在量子电动力学方面取得重要的突破，使得它成为一门精确的理论，经受了近三十年来一切极为精密的实验的考验，结果表明理论与实验符合。

量子电动力学得到如此重大成功的一个原因，在于它有一套可靠的计算方法。由于在那里，耦合常数是一个小量 ($\alpha = 1/137$) 微扰计算是有效而且可靠的办法，于是在原则上，可以用它来计算到任意精确的程度以同实验结果相比较。

941495

但是对于强相互作用，情况就困难得多，一个重要原因是耦合常数并非小量 ($\frac{g^2}{4\pi} \sim 15$)，微扰计算是完全无效的，这就使得强相互作用理论长期没有得到实质性的突破，尽管不少物理学工作者从各个角度作过很大的努力。

近年来，非阿贝尔规范场理论研究取得了重大的进展，理论的量子化、重正化问题都得到了解决⁽⁸⁾。接着，就出现了把非阿贝尔规范场理论和强子的夸克模型相结合以讨论强相互作用的尝试，这就是所谓量子色动力学⁽⁹⁾。



图1

在介绍量子色动力学 (QCD) 之前，我们先回忆一下色量子数的引入。

(a) 在讨论层子之间相互作用的对称性质时，我们早就知道，必须引入新的量子数以解决粒子束缚态的统计性质问题。以 Ω^- 粒子为例，它是由 3 个 S 层子构成的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 S 波的束缚态 (如图 1)。

显然，这样的波函数是全对称的。但由于层子是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子，这样就违反了 Pauli 原理。解决的办法是引入新的量子数⁽⁶⁾，使得：

$$q^A \rightarrow q_\alpha^A \quad (A=1,2,3, \text{时层子分别为 } u, d, s \text{ 型的层子。})$$

其中 α 取值 1, 2, 3，是标志这个新量子数 (颜色) 的指标，如果取波函数为颜色空间的标量：

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma e^{i\alpha\beta\gamma} / \sqrt{6} \tag{1.1}$$

显然它满足统计性的要求。颜色量子数引入后，使层子带有颜色：

$$q_1^A \text{ — 红色层子, } q_2^A \text{ — 白色层子, } q_3^A \text{ — 兰色层子。}$$

原来分辨 u, d, s, c 等层子的量子数叫做气味 (flavour) 量子数，这样，对称性便扩充为

$$(\text{气味}) \times (\text{颜色})$$

(b) 在流代数的讨论中，当 π^0 粒子的质量为零时，可以得出 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 衰变矩阵元的严格表达式⁽⁷⁾，这样算得的衰变率，在引入色量子数之前，与实验值相差九倍。可信的论证指出， π^0 质量的引入，只会带来约 5% 的改正。这九倍的差别，正好由三种颜色量子数所解释： $3^2 = 9$ 。

(c) 在讨论正负电子湮灭截面的无量度性 (Scaling) 性质时，许多重要的模型给出在高能极限下，

$$R = \frac{\sigma_T(e^+e^- \rightarrow \text{强子})}{\sigma_T(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_F Q_F^2 \tag{1.2}$$

Q_F 是层子的电荷。对于 $SU_F(3)$ 气味对称性来说

$$\sum_F Q_F^2 = (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \tag{1.3}$$

对于 $SU_F(4)$ 对称性来说

$$\sum_F Q_F^2 = (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{10}{9} \quad (1.4)$$

现在知道当质心能量 $E = 7\text{Gev}$ 时, $R \sim 5.5$ 。显然, 那怕连粲层子也考虑进去的 $SU_F(4)$ 模型 (1.4) 也不能给出如此大的 R 。在低能区域, 粲粒子的产生域之前, $R \sim 2-2.5$, $SU_F(3)$ 理论也显得太小!

在考虑到颜色后, (1.2) 修改为

$$R = N_c \sum_F Q_F^2 \quad (1.5)$$

其中 N_c 是颜色的数目。对于 $SU_c(3)$ 理论, $N_c = 3$ 。这样, 在低能区, (1.5) 给出 $R = 2$, 与实验大致相符。在 高能区下, (1.5) 给出 $R = 3.3$ 。这仍然显得太小。也许要考虑更多的气味, 并计及重轻子对 R 的贡献。但无论如何, 有一点是明显的, 即在不计及颜色时, 各种模型计算出的 R 是不可能对的。

基于以上的理由, 色量子数的引入看来是不可避免的。如果类比于量子电动力学, 在那里基本费米子场是电子场, 对称性是 $U(1)$ 对称性, 规范场是光子场, 现在把基本费米子场改为层子场, 对称性是色空间中的 $SU_c(3)$ 对称性, 规范场就是非阿贝尔规范场——胶子场。回忆起在 QED 的情况下, 规范协变微分为

$$\hat{D} \equiv [\partial_\mu + ieA_\mu(x)] \gamma^\mu \quad (1.6)$$

在非阿贝尔的情况下, 规范协变微分成为

$$\hat{D}_{\alpha\beta} \equiv \left[I \cdot \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \right]_{\alpha\beta} \gamma^\mu \quad (1.7)$$

其中 I 是 3×3 单位矩阵, $\lambda^a (a = 1, 2, \dots, 8)$ 是 $SU_c(3)$ 的矩阵, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ 是 $SU_c(3)$ 指标,

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \quad (1.8)$$

f^{abc} 是 $SU_c(3)$ 群的结构常数。

当基本费米场质量为零时, 在 QCD 的情况下, 电子——光子系统的拉氏函数可以写为

$$L_1(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \hat{D} \psi \quad (1.9)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu F_\nu(x) - \partial_\nu F_\mu(x).$$

推广到色空间中, 可以用如下的拉氏函数来描述层子——胶子系统:

$$L_1(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i\bar{q}_\alpha^A \hat{D}_{\alpha\beta} q_\beta^A \quad (1.10)$$

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

显然, (1.10) 是保持味对称性的。当基本费米场质量不为零时, 除 L_1 之外, 还有

费米场的质量项 L_m 。在QED的情况下,

$$L_m = -m \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \quad (1.11)$$

但在QCD的情况下, 层子质量项的引入是要破坏味对称性的。一种最简单的引入方法是令

$$L_M = -\bar{q}_a^A M^{AB} q_a^B, \quad (1.12)$$

$$M^{AB} = \delta^{AB} M^A.$$

对于QED, 完整的拉氏函数是

$$L = L_1 + L_m \quad (1.13)$$

但对于QCD, 由于规范场是非阿贝尔的, 我们必须引入规范固定项 $L_{\text{固}}$ 以进行量子化, 还要引入Faddeev-Popov鬼粒子项⁽³⁾ $L_{\text{鬼}}$ 以保证么正性。所以, QCD中的拉氏函数比较复杂:

$$L = L_1 + L_m + L_{\text{固}} + L_{\text{鬼}} \quad (1.14)$$

其中

$$L_{\text{固}} = -\frac{1}{2\alpha} \partial^\mu A_\mu^a \partial^\nu A_\nu^a \quad (1.15)$$

$$L_{\text{鬼}} = -\left[\partial_\mu \bar{C}^a \partial^\mu C_a + g f_{abc} \partial^\mu \bar{C}^a \cdot A_\mu^b C_c \right] \quad (1.16)$$

由此得出的Feynman规则是⁽³⁾

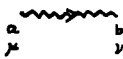
规范场传播子  $D_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon}$ (1.17)

图2a

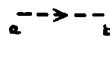
鬼粒子传播子  $G_{ab}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \delta_{ab}$ (1.18)

图2b


层子传播子  $S(p) = \frac{i}{\hat{p} - m + i\epsilon}$ (1.19)

图2c

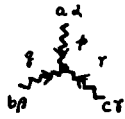
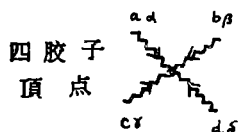
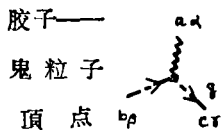
三胶子顶点  $ig f_{abc} [g_{\mu\nu}(r-q)_\alpha + g_{\nu\alpha}(p-r)_\beta + g_{\alpha\beta}(q-p)_\gamma]$ (1.20)

图2d



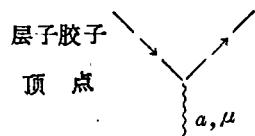
$$\begin{aligned}
 & ig^2 f_{lac} f_{lbd} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \\
 & + ig^2 f_{lad} f_{lbc} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) \\
 & + ig^2 f_{lab} f_{lcd} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

图 2 e



$$-ig f_{abc} g_a \tag{1.22}$$

图 2 f



$$\frac{ig}{2} \lambda^a \gamma_\mu \tag{1.23}$$

图 2 g

对封闭的鬼粒子圈乘一负号

由式(1.14)写下的拉氏函数是可重正化的。几年来，对QCD的研究，使人们对强相互作用产生很大的希望。它解释了很多实验的现象，如渐近自由、无量度性的破坏、注(Jet)现象、大横动量现象等，但理论本身又存在着许多问题，例如束缚态的计算，囚禁的问题、真空结构的问题等等。我们这个简介，不可能遍及这些问题，只能就一些最基本的方面作简要的介绍。

§ 2. 重正化方法简介

在这里我们温习一下重正化理论。为简单起见，用 $\lambda\phi^4$ 理论作为例子。这个理论的拉氏函数写为

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \tag{2.1}$$

定义n点格林函数 $G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ 如下：

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \prod_i \int d x_i e^{i \Sigma p_i x_i} \langle O | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | O \rangle \tag{2.2}$$

由于理论的平移不变性，在 p_1, \dots, p_n 个变量中只有 $n-1$ 个是独立的。


在这个理论中Feynman图的规则如下，

传播子 $\text{---} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \text{---}$

顶点 $\text{---} \times \text{---} = -$ (2.3)

内 p 线积分 $= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$

例如, 与图3相应的 $G^{(4)}$ 为



$$G^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_4) \prod_{j=1}^4 \frac{i}{p_j^2 - m^2} \quad (2.4)$$

图 3

现在定义

(a) 单粒子不可约(1PI)图形。

不能通过切割一条内部线而成为两个不连通的图形, 叫做单粒子不可约图形。

例子:



1PI不可约

非1PI不可约

图 4

(b) 1PI 格林函数 $\Gamma^{(n)}$

由与1PI不可约图形相应的 $G^{(n)}$, 把所有外部传播子去掉的表式, 称为1PI格林函数 $\Gamma^{(n)}$;

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \frac{G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}{\prod_{j=1}^n \frac{i}{p_j^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (2.5)$$

例如, 如式(2.4)相应,

$$\Gamma^{(4)}(p_1, \dots, p_4) = -i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad (2.6)$$

相应的1PI图形如图5。

由定义(2.5), 可知

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{\text{传播子}} \quad (2.7)$$

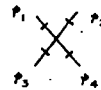


图 5

现在我们来对 $\Gamma^{(n)}$ 的一个特定的图形, 它有着:

- n 条外线;
- I 条内线;
- V 个顶点;
- L 个独立的内线积分,

由于动量守恒, 这些量之间有关系

$$L = I - V + 1 \quad (2.8)$$

与这特定的图相应,

$$\Gamma^{(n)} \propto \int \prod_{j=1}^L \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \frac{I}{i-1} \frac{1}{l_j^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (2.9)$$

这个积分是可能发散的。定义其表现发散度 $D(\Gamma^{(n)})$ 如下：

$$D(\Gamma^{(n)}) = 4L - 2I \quad (2.10)$$

当 $D(\Gamma^{(n)}) \geq 0$ 时，积分(2.9)必定发散。应用式(2.8)，及关系式

$$4V = n + 2I \quad (2.11)$$

可得

$$D(\Gamma^{(n)}) = 4 - n. \quad (2.12)$$

可见 $n > 4$ 时， $D < 0$ ；



$$D = 4 - 2 = 2$$

图6a



$$D = 4 - 4 = 0$$

图6b



$$D = 4 - 6 = -2$$

图6c

图6a及6b均是发散的。图6c虽然对应着 $D = -2$ ，但由于它的一个子图形是图6b，所以它仍是发散的。

当我们计算 ϕ 和 ϕ 散射时，那怕最简单的图形4b，也恰出对数发散的结果。例如对于图7计算的 $\Gamma^{(4)}(p_1 \cdots p_4)$ 为

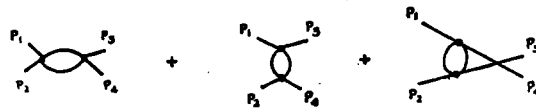


图 7

$$\Gamma^{(4)}(p_1 \cdots p_4) = (-i\lambda)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_4) \frac{i}{16\pi^2} \left\{ -3 \ln \frac{\Lambda}{m} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6m} [(p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2] + \cdots \right\} \quad (2.13)$$

式(2.13)中……项是动量的四次方以上的项， Λ 是动量截断。显然，当 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时，

(2.13)是对数发散的。为了消除这种发散，可以在拉氏量中加入抵消项 $L_i^{\text{抵消}}$

$$L_i^{\text{抵消}} = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} \cdot \frac{\phi^4}{4!} \quad (2.14)$$

这样可以使得在算到 λ^2 量级的精度时， $\Gamma^{(4)}$ 不发散。事实上，考虑到如下图形(图8)，

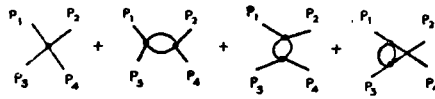


图 8

有:
$$\Gamma^{(4)}(p_i = 0) = -i\lambda\left(1 + \frac{3\lambda}{32\pi^2}\right) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(0) \quad (2.15)$$

这时(2.15)中不再出现发散。

加入抵消项(2.14)的办法,叫做重正化方法,因为这时

$$L \longrightarrow L + L_i^{\text{抵消}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \lambda_0 \frac{\phi^4}{4!} \quad (2.16)$$

其中
$$\lambda_0 = \lambda + A_{(2)} = \lambda \left(1 + \frac{3\lambda_2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m}\right) \quad (2.17)$$

是裸耦合常数。

类似地,可以计算由于图6a引起的 $\Gamma^{(2)}$ 的发散。这时,不难证明,需要加入的抵消项为

$$\frac{B_{(2)}}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \text{ 及 } -\frac{1}{2} C_{(2)} \phi^2 \quad (2.18)$$

$B_{(2)}$ 及 $C_{(2)}$ 同 $A_{(2)}$ 的表达式一样,是已知的、与 λ 及 $\ln \frac{\Lambda}{m}$ 有关的函数。

至此已经看到可重正化理论的一个重要性质,就是所需要的抵消项的形式,无论是(2.14)或(2.18),均已包含在原来的拉氏量(2.1)中,而且抵消项均与动量截断 Λ 有关。

可以逐阶来讨论抵消项的引入,以上的讨论很容易推广到一般的情况去,即加入抵消项后

$$L \longrightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{A}{4!} \phi^4 + \frac{B}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{C}{2} \phi^2 \quad (2.18)$$

其中 A 、 B 、 C 可按 λ 的阶次展开计算,以使精度到任一阶以下的发散都消去,当然它们与 λ 及 $\ln \Lambda/m$ 有关。

式(2.18)给出的重正化有时称为相乘重正化(multiplicative renormalization),因为当定义:

$$\begin{cases} \phi_0 = (1+B)^{\frac{1}{2}} \phi \\ m_0^2 = (m^2+C)(1+B)^{-1} \\ \lambda_0 = (\lambda+A)(1+B)^{-2} \end{cases} \quad (2.19)$$

(2.18)可写为

$$L \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{m_0^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \quad (2.20)$$

如果记

$$\begin{cases} Z_\phi = (1+B) \\ Z_m = (1 + \frac{C}{m^2})^{\frac{1}{2}} (1+B)^{-\frac{1}{2}} \\ Z_\lambda = (1 + \frac{A}{\lambda})(1+B)^{-2} \end{cases} \quad (2.21)$$

(2.19)相当于重新定义场量、质量以及耦合常数的尺度:

$$\begin{cases} \phi_0 = \sqrt{Z_\phi} \phi \\ m_0 = Z_m m \\ \lambda_0 = Z_\lambda \lambda \end{cases} \quad (2.22)$$

而(2.20)告诉我们,用重新定义后的这些量来进行计算,可以不导致发散。或(2.22)中所定义的 Z_ϕ, Z_m, Z_λ 称为重正化常数。

现在总结一下以上叙过的重正化步骤(通常这种重正化方案叫做BPHZ重正化方案):

(1) 计算1PI图形,直至遇到 $D \geq 0$ 的图形。

(2) 加入适当的抵消项到拉氏函数中,使得到这一阶为止,所有发散项在图形的Taylor展开式中(即所有的 $p_i = 0$ 的表达式)均被消去。

(3) 重复以上过程到更高阶,对已经修正过的拉氏函数加入更新的抵消项。

(4) Hepp定理⁽⁹⁾:对于可重正化的理论,以上过程确能消去一切的发散项。亦即,当 $A \rightarrow \infty$ 时,以上步骤的微扰展开式与 A 无关。

(5) 在选定重正化点之后(这里取 $p_i = 0$ 点为重正化点), Z_ϕ, Z_λ 及 Z_m 是 m, λ 及 A 的函数。这样定义的重正化 m, λ 及 ϕ 与通常在质壳上定义的量有所不同。但是由Hepp定理,当 $A \rightarrow \infty$ 时,它们与 A 无关,而只与理论结构本身有关,亦即,在质壳上定义的量可由微扰论展开成如此定义的量的级数。可见对于一个可重正化理论,重正化点的选择不应带来不同的物理结果。从这一考虑出发,便导致重正化群方程。

对于QCD的重正化方案,由于胶子是无质量的粒子,所以我们不能象讨论 $\lambda\phi^4$ 理论那样,选 $p_i = 0$ 为重正化点,我们选取某一类空点 $\mu^2, p_i^2 = -\mu^2$ 来重正化。与式(2.22)相对应的重正化是:

$$\begin{aligned} (A_\mu^a)_0 &= Z_3^{1/2} A_\mu^a \\ (C^a)_0 &= \tilde{Z}_3^{1/2} C \\ g_0 &= Z_1 Z_3^{-3/2} g \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\alpha_0 = Z_3 \alpha$$

$Z_1, Z_3, \widetilde{Z}_3$ 为重正化常数。对于传播子的重正化是

$$D_{\nu\sigma}^{\text{boc}}(k) \Big|_{k^2 = -\mu^2} = \frac{i}{\mu^2} Z_3 \left(g_{\nu\sigma} + \frac{k_\nu k_\sigma}{\mu^2} \right) \delta^{ab} \quad (2.24a)$$

$$G_0^{ab}(k) \Big|_{k^2 = -\mu^2} = -\frac{i}{\mu^2} \widetilde{Z}_3 \delta^{ab} \quad (2.24b)$$

对于三胶子顶点及胶子—胶子—鬼粒子顶点的重正化为

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r)_0 \Big|_{p^2 = q^2 = r^2 = -\mu^2} = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r)_{\text{BARE}} \quad (2.25a)$$

$$\Gamma_\mu^{abc}(p, q, r)_0 \Big|_{p^2 = q^2 = r^2 = -\mu^2} = \widetilde{Z}_1^{-1} \Gamma_\mu^{abc}(p, q, r)_{\text{BARE}} \quad (2.25b)$$

其中附标 0 指未重正化的量，而 BARE 指式(1.17—1.23)中耦合常数为 g_0 时的表达式。由于这些耦合常数满足 Slavnov 恒等式^[10],

$$\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{\widetilde{Z}_3}{\widetilde{Z}_1} \quad (2.26)$$

所以实际上只有三个是独立的，同 $\lambda\phi^4$ 理论一样，它们都是 $g, \alpha, A/\mu$ 的函数。

§ 3. 重正化群 Callan-Symanzik 方程

重正化群方程，是基于物理结果与重正化点 μ 的选择无关的考虑而推出的方程。为阐述简单起见，我们仍以 $\lambda\phi^4$ 理论为例推导出 Callan-Symanzik 方程^[11]。

由(2.2), (2.5)及(2.22)，我们有

$$\Gamma^{(n)}(p) = Z_\phi^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p) \quad (3.1)$$

此处 $p \equiv p_1, \dots, p_n$ 。在重正化前，所有的 1PI 图形均以 λ_0, m_0 及 A 计算，与 μ 无关，亦即

$$\Gamma_0^{(n)}(p) \equiv \Gamma_0^{(n)}(p; \lambda_0, m_0, A) \quad (3.2)$$

由 Hepp 定理， $\Gamma^{(n)}$ 应与 A 无关，

$$\Gamma^{(n)}(p) \equiv \Gamma^{(n)}(p; \lambda, m, \mu) \quad (3.3)$$

当然，

$$Z_\phi \equiv Z_\phi(\mu, m_0, \lambda_0, A) \quad (3.4)$$

如果我们改变 μ ，令 m_0, λ_0, p_i 保持不变，则由

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0^{(n)}(p; \lambda_0, m_0, A) = 0 \quad (3.5)$$

可以推出 Callan-Symanzik 方程

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n r(\lambda) + r_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma^{(n)}(p; \lambda, m, \mu) = 0 \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, m_0, A} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(Z^{-1} \lambda_0 \right) \Big|_{\lambda_0, m_0, A} \\ &= -\lambda \mu \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, m_0, A} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_2}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, m_0, A} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m(\lambda) &= \frac{\mu}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, m_0, A} = \frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(Z_n^{-1} m_0 \right) \Big|_{\lambda_0, m_0, A} \\ &= -\mu \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, m_0, A} \end{aligned} \quad (3.9)$$

由于Hepp定理, 对于 $A \rightarrow \infty$, β, γ 及 γ_m 均趋于确定的极限与 A 无关。由于 A 的发散以 $\lambda_n A/m$ 形式出现, 故当 $A \rightarrow \infty$ 时, 由量纲的考虑, 这些函数只能是无量纲量 λ 的函数。

Callan - Symanzik 方程的物理意义是: 当重正化点改变时, 只要重正化了的耦合常数及质量作相应的改变, 物理结果不引起任何的变质。

现在让我们来解方程(3.6)。由量纲分析,

$$\begin{aligned} [\phi] &= M \\ [\Gamma^{(n)}] &= M^{4-n} \end{aligned}$$

故一般而言, 有

$$\Gamma^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) = \mu^{4-n} F^{(n)}\left(\frac{e^t p}{\mu}; \frac{m}{\mu}, g\right), \quad (3.10)$$

$F^{(n)}$ 是一无量纲的函数, 式中 e^t 是一任意数, 表微动量尺度的改变。定义

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) &\equiv (e^{-t})^{4-n} \Gamma^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) \\ &= (e^{-t} \mu)^{4-n} F^{(n)}\left(\frac{e^t p}{\mu}; \frac{m}{\mu}, g\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

注意到

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi^{(n)} - m \frac{\partial}{\partial m} \Phi^{(n)}, \quad (3.12)$$

由(3.6)有

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] (e^{-t})^{4-n} \Gamma^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) = 0$$

或即

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) - (1 - \gamma_m(\lambda)) m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Phi^{(n)} = 0 \quad (3.13)$$

方程(3.13)是一阶拟线性偏微分方程, 与之相应的Monge向量是

$$(1, -\beta(\lambda), m[1 - \gamma_m(\lambda)], -n\gamma(\lambda)\Phi^{(n)})$$

故(3.13)的特征微分方程是

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{-\beta(\lambda)} = \frac{dm}{[1-\gamma_m(\lambda)]m} = -\frac{d\Phi^{(n)}}{n\gamma(\lambda)\Phi^{(n)}} \quad (3.14)$$

由之可解得

$$t_0 - t = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \quad (3.15a)$$

$$m_0 = m \exp \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{1-\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] \quad (3.15b)$$

$$\Phi_0^{(n)} = \Phi^{(n)} \exp \left[- \int_{\lambda_2}^{\lambda} \frac{n\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] \quad (3.15c)$$

其中 λ_0 、 λ_1 、与 λ_2 为任意点，而 t_0 、 m_0 与 $\Phi_0^{(n)}$ 则为与之相应的起始函数。由偏微分方程的一般理论，方程(3.13)的普遍解是

$$F(t_0, m_0, \Phi_0^{(n)}) = 0 \quad (3.16)$$

F 为任意的“好”函数，亦即

$$F\left(t + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}, m \exp \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{1-\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda', \Phi^{(n)} \exp \left[- \int_{\lambda_2}^{\lambda} \frac{n\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] \right) = 0 \quad (3.17)$$

由于 F 是“好”函数，可以把(3.17)中的 $\Phi^{(n)}$ 解成显函数的形式：

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(etp; m, \mu, \lambda) &= \Phi_0^{(n)}\left(t + \int_{\lambda_2}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}, m \exp \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{1-\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda'\right) \\ &\cdot \exp \int_{\lambda_2}^{\lambda} \frac{n\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \end{aligned} \quad (3.18)$$

引入有效耦合常数 $\bar{\lambda}(\lambda, t)$ ，它满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\lambda}(\lambda, t)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda}(\lambda, 0) = \lambda \end{cases} \quad (3.19)$$

由(3.19)直接有

$$t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda}'}{\beta(\bar{\lambda}')} \tag{3.20}$$

应用(3.20), (3.18)的右方可写成

$$\begin{aligned} & \Phi_0^{(n)} \left(\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} , m \exp \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{1-\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right) \cdot \\ & \cdot \exp \left\{ \int_{\lambda_2}^{\bar{\lambda}} \frac{n\gamma(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda})} d\bar{\lambda}' + \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_1} \frac{n\gamma(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda}') } d\bar{\lambda}' \right\} \\ & = \Phi_0^{(n)} \left(\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda}'}{\beta(\bar{\lambda}')} , e^{-tm} \exp \left(- \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_1} \frac{\gamma_m(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda}') } d\bar{\lambda}' \right) \exp \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{1-\gamma_m(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda}') } d\bar{\lambda}' \right) \cdot \\ & \cdot \exp \int_{\lambda_2}^{\bar{\lambda}} \frac{n\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \cdot \exp \left[- \int_0^t n\gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right] \\ & = \exp \left[- \int_0^t n\gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right] \cdot \\ & \cdot \Phi_0^{(n)} \left(\int_{\lambda_0}^{\bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda}'}{\beta(\bar{\lambda}')} , \bar{m} e^{-t} \cdot \exp \int_{\lambda_1}^{\bar{\lambda}} \frac{1-\gamma_m(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda}') } d\bar{\lambda}' \right) \cdot \\ & \cdot \exp \int_{\lambda_2}^{\bar{\lambda}} \frac{n\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \tag{3.21} \end{aligned}$$

式中 \bar{m} 为有效质量, 其定义为

$$\bar{m}(m, t) = m \exp \int_0^t \gamma_m(\bar{\lambda}(t')) dt'$$

$$= m \exp \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}} \frac{\gamma_m(\bar{\lambda}')}{\beta(\bar{\lambda}')} d\bar{\lambda}' \quad (3.22)$$

显然它满足微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{m}(m, t)}{\partial t} = \bar{m} \gamma_m(t) \\ \bar{m}(m, 0) = m_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

现在比较(3.21)最后一式及(3.18), 易见有

$$\Phi^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) = \exp \left(- \int_0^t n \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right) \Phi^{(n)}(p; e^{-t} \bar{m}, \mu, \bar{\lambda}) \quad (3.24)$$

亦即

$$\Gamma^{(n)}(e^t p; m, \mu, \lambda) = \exp \left\{ (4-n)t - n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right\} \cdot \Gamma^{(n)}(p; e^{-t} \bar{m}(t), \mu, \bar{\lambda}) \quad (3.25)$$

(3.25)是重正化理论的一个很重要的结果。它表明, 在大动量 $e^t p_i$ 下的动力学性质, 是由有效耦合常数 $\bar{\lambda}(t)$ 及有效质量 $e^{-t} \bar{m}(t)$ 所决定的。亦即, 当把所有外部动量乘以一个因子 e^t 时, 这等于

$$(a) \text{ 把每一条外线乘以指数因子 } \exp \left[- \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right],$$

(b) 把耦合常数 λ 及质量 m 分别换成有效耦合常数 $\bar{\lambda}$ 及有效质量 $e^{-t} \bar{m}$ 。

如果 $e^{-t} \bar{m}$ 可略去, 则这结果告诉我们, 在深度类空区域中, 动力学由有效耦合常数 $\bar{\lambda}$ 所确定。现在让我们来讨论 $\bar{\lambda}(t)$ 的性质。

由式(3.19), 可见(i)如果对所有的 $\lambda, \beta(\lambda) > 0$ 则有

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(t)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}) > 0,$$

$\bar{\lambda}(t)$ 是单调上升函数, $\bar{\lambda}(\infty) = \infty$

(ii) 如果对所有的 $\lambda, \beta(\lambda) < 0$, 则有

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(t)}{\partial t} = \beta(\bar{\lambda}) < 0,$$

$\bar{\lambda}(t)$ 是单调下降函数, $\bar{\lambda}(+\infty) = -\infty$.

(iii) 设 $\beta(\bar{\lambda})$ 的形状如图9, 在 λ_+ 有零点。设 $t=0$ 时 λ 的位置小于 λ_+ 。则当 t 增大时, 由于 $\beta(\lambda) > 0$, 故 $\bar{\lambda}(t)$ 应增大, 一直增加到 λ_+ 为止, 其解为

$$\bar{\lambda}(\infty) = \lambda_+ \tag{3.26}$$

这种零点 λ_+ :

$$\begin{cases} \beta(\lambda_+) = 0 \\ \beta'(\lambda_+) < 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

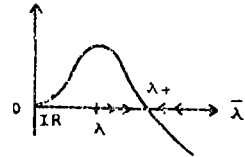


图 9

称为紫外固定点(UVSFP)。

(iv) 如果函数 $\beta(\bar{\lambda})$ 如图10所示, 在 $\bar{\lambda} = \lambda_-$ 有一个零点, 当 $t=0$ 时 $\bar{\lambda}(0) = \lambda$ 的位置如图10中所示, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\bar{\lambda} \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $\bar{\lambda} \rightarrow \lambda_-$ 。 $\beta(\bar{\lambda})$ 的这种零点

$$\begin{cases} \beta(\lambda_-) = 0 \\ \beta'(\lambda_-) > 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

称为红外固定点(IRSFP)。

(v) 如图11所示的函数 $\beta(\bar{\lambda})$ 的零点, 不是稳定的固定点

(vi) 对于QCD, 我们希望有这样的 $\beta(\bar{\lambda})$ 图形: (图12), 这样, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\bar{\lambda} \rightarrow 0$, 得到渐近自由; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时 $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ 得到红外囚禁。

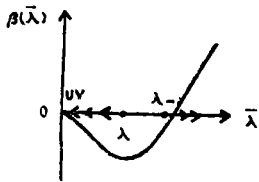


图 10

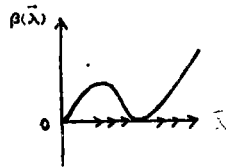


图11



图12

一个理论, 如果其原点是一个紫外稳定固定点, 这个理论称为渐近自由的理论, 因为由式(3.25), 对于这种理论, 当所有动量都类空地趋于无穷大时, 其格林函数相当于无相互作用的格林函数, 所不同者, 只是质量换成有效质量而已。与图10相应的理论, 是一个渐近自由的理论。图12相应的也是渐近自由的理论。

图9的原点, 是一个红外稳定固定点, 可能QED理论就是这种情况: 它没有红外发散, 当 $p \rightarrow \infty$ 时有效耦合常数趋于恒值。

对于只有一个耦合常数的理论, 原点必定是 β 函数的零点, 因为耦合常数与截断的关系, 最少是通过二级微扰而来, 例如, 对于QED的情况,

$$e = e_0 \left(1 + c e_0^2 \ln \frac{\Lambda}{m} + \dots \right) \quad (3.29)$$

由此算得的 $\beta(e)$ 为:

$$\beta(e) = ce^3 + \dots \quad (3.30)$$

显见原点是红外稳定固定点。

§ 4. 重正化群方程与物质的无限层次

重正化问题是讨论理论的紫外渐近的问题。我们知道当传递动量越来越大, 被看到的层次就越来越深。我们用 N 给不同的层次来标号, 例如对于 $N=0$, 令其为强子的层次, 其特征半径为

$$R_0 = 10^{-13} \text{cm} \quad (4.1)$$

$N=1$ 则为比强子深入一层的层次, $N=2, 3, \dots$ 则是其后依次的层次, 假设层次 N 的特征半径 R_N 可用一常数 A 来表征,

$$R_N = A^{-N} R_0 \quad (4.2)$$

为了要“看到”第 N 个层次, 探测粒子的传递动量 Q 相应的波长应当小于 R_N , 亦即

$$Q \simeq \frac{1}{\text{波长}} \gtrsim \frac{1}{R_N} \quad (4.3)$$

现在来看重正化的意义。在QED中, e_0 是点电子的裸电荷, 而重正化后的 e 则是物理电子(带有虚光子及正反电子对的)电荷。如果把 e_0 和 e 看成在与同层次相应的电荷, 则由(3.29), 可以预期, 与不同层次相应的耦合常数, 一般有关系

$$\lambda_{N+1} = f_N(\lambda_N) \quad (4.4)$$

λ_N 是对于第 N 层次的耦合常数。

重正化群主要的概念是当 N 够大时,

$$f_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f \quad (4.5)$$

亦即这时相邻的层次之间耦合常数的关系都是一样的,

$$\lambda_{N+1} = f(\lambda_N) \quad (N \gg 1) \quad (4.6)$$

对于微扰论, 有

$$f(\lambda) = \lambda[1 + a\lambda^2 + b\lambda^4 + \dots] \quad (4.7)$$

如果 λ 够小, λ^4 以上的项可忽略, 则有

$$\lambda_{N+1} = \lambda_N + a\lambda_N^3 \quad (N \gg 1)$$

亦即

$$\frac{d\lambda_N}{dN} = a\lambda_N^3 \tag{4.8}$$

式(4.8)的解为

$$\lambda_N^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + 2aN\lambda_0^2} \quad (N \gg 1) \tag{4.9}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时 λ 的性质取决于 a 。

(a) 若 $a > 0$, 则当 $N \rightarrow \infty$

$$\lambda_N^2 = \frac{1}{2a} \frac{1}{N} \tag{4.10}$$

λ 与 λ_0 无关, 且在 $N \rightarrow \infty$ 时趋于零, 这是渐近自由的理论, 即对于越深的层次, 耦合常数就越小。如果用

$$Q \approx \frac{1}{R_N} A^N R_0^{-1}$$

则(4.10)可写作

$$\lambda^2(Q^2) = \frac{1}{a} \frac{1}{\ln\left(\frac{Q^2}{A^2}\right)} \tag{4.11}$$

可见耦合常数以对数趋于零。

(b) 若 $a < 0$, 则式(4.9)分母当

$$2|a| N \lambda_0^2 = 1$$

时出现奇点。故不能只考虑到 λ^3 的项, 但这时代替(4.8), 一般地有

$$\frac{d\lambda_N}{dN} = \beta(\lambda_N) \tag{4.12}$$

其解为

$$N = \int_{\lambda_0}^{\lambda_N} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \tag{4.13}$$

这实质上就是等效耦合常数的方程(3.19)及(3.20)。

§ 5. QCD中的重正化群方程及渐近自由⁽¹²⁾

在以上, 我们以 $\lambda\phi^4$ 理论为例, 说明了重正化群方程的推导方法, 现在我们推导出QCD中的重正化群Callan-Symanzik方程。

由1PI格林函数的定义及式(2.23), 对于 n 条胶子外线的格林函数

$\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(p_1 \dots p_n)$, 有如下的重正化关系:

$$\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(p_1 \dots p_n) = Z_3^{n/2} \Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(p_1 \dots p_n). \tag{5.1}$$

$\nu_1 \cdots \nu_n$ 是罗伦兹指示, 附标 0 是指未重正化的 1PI 格林函数。在以下, 我们将略去罗伦兹指示 $\nu_1 \cdots \nu_n$, 并以一个 p 来代替 $p_1 \cdots p_n$ 的集合。而且, 我们首先不考虑层子的质量, 加入层子的质量项后对讨论没有实质性的改变。这样,

$$\Gamma^{(n)} \equiv \Gamma^{(n)}(p, \mu, \lambda, \alpha) \quad (5.2)$$

$$Z_3 \equiv Z_3(\mu, \lambda_0, \alpha_0, A) \quad (5.3)$$

$$\Gamma_0^{(n)} \equiv \Gamma_0^{(n)}(p; \lambda_0, \alpha_0, A) \quad (5.4)$$

由

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0^{(n)}(p; \lambda_0, \alpha_0, A) = 0 \quad (5.5)$$

可以导出

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda, \alpha) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma_v(\lambda, \alpha) + \delta(\lambda, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \Gamma^{(n)}(\mu, \lambda, \alpha) = 0 \quad (5.6)$$

其中

$$\beta(\lambda, \alpha) = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, \alpha_0, A} = \lambda \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(Z_3^{\frac{3}{2}} Z_1^{-1}) \Big|_{\lambda_0, \alpha_0, A} \quad (5.7)$$

$$\gamma_v(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_3 \Big|_{\lambda_0, \alpha_0, A} \quad (5.8)$$

$$\delta(\lambda, \alpha) = -\frac{\alpha_0}{Z_3^2} \mu \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} \Big|_{\lambda_0, \alpha_0, A} = -2\alpha\gamma_v(\lambda, \alpha), \quad (5.9)$$

在式(5.7)中, 似乎 β 除是 λ 的函数外, 还是规范参数 α 的函数。事实上, 可以证明, β 是规范不变的, 即

$$\beta(\lambda, \alpha) = \beta(\lambda) \quad (5.10)$$

在 Landau 规范中 ($\alpha = 0$), $\delta(\lambda, 0) = 0$, 方程(5.6)有特别简单的形状:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma_v(\lambda, 0) \right] \Gamma^{(n)}(p; \mu, 0, \lambda) = 0 \quad (5.11)$$

此方程与(3.6)在形式上完全一样, 故其解为

$$\Gamma^{(n)}(e^t p; \mu, \lambda) = \exp \left\{ (4-n)t - n \int_0^t \gamma_v(\bar{\lambda}(t')) dt' \right\} \cdot \Gamma^{(n)}(p; \mu, \lambda), \quad (5.12)$$

现在来看 QCD 中的 $\beta(\lambda)$ 。由(5.7)式, 有

$$\beta(\lambda, \alpha) = \lambda \frac{\partial}{\partial \ln \mu} \ln \left(\frac{Z_3^{\frac{3}{2}}}{Z_1} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial \ln A} \ln \left(\frac{Z_3^{\frac{3}{2}}}{Z_1} \right) \quad (5.13)$$

(5.13)中最后一行用了 λ 与 μ 以 $\ln \frac{\lambda}{\mu}$ 的形式一起出现的事实。同样,有

$$\gamma_1(\lambda, \alpha) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln \Lambda} \ln Z_3 \quad (5.14)$$

Z_3 是由矢量胶子的自能图计算的。准确到单圈图,它由如下的Feynman图(图13),



图 13

计算给出为

$$Z_3 = 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi} \left(\frac{13}{3} - \alpha \right) C_2(G) \ln \Lambda \quad (5.15)$$

其中 $C_2(G)$ 是群 G 的伴随表示的二次型Casimir不变量

$$C_2(G) \delta_{ab} = f_{acd} f_{bcd} \quad (5.16)$$

当 $G = SU(N)$, $C_2(G) = N$ 。

Z_1 由三胶子顶点所确定。在精确到单圈图的近似中,它由Feynman图14给出为:

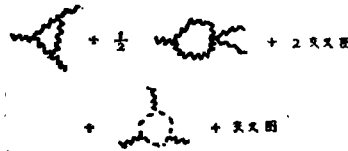


图 14

$$Z_1 = 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{17}{6} - \frac{3\alpha}{2} \right) C_2(G) \ln \Lambda \quad (5.17)$$

以上只考虑了胶子场及鬼粒子场。考虑层子场时,层子的圈也对 Z_1 及 Z_3 有贡献——通过

$$\lambda \bar{q}_\alpha^A A_\mu^a t_{a\beta}^A \gamma^\mu q_\beta^A \quad \alpha = 1, \dots, 8 \quad (5.18)$$

的耦合。 t^a 是色对称群的矩阵表示 R 的生成元,层子场组成此对称群的表示的基, $d(R)$ 是表示的维数, r 是对称群 G 的维数(生成元的数目),这时有

$$Tr(t^a t^b) = \delta_{ab} T(R) \quad (5.19)$$

$$C_2(R) = r T(R) / d(R) \quad (5.20)$$

当 $R = (N)$ 为 $SU(N)$ 的基础表示时,

$$T((N)) = \frac{1}{2} \quad (5.21)$$

$$C_2((N)) = \frac{N^2 - 1}{N}$$

费米子圈对 Z_3 的贡献为



图 15

费米子圈对 Z_1 的贡献为,

$$-\frac{\lambda_2}{8\pi^2} \frac{4}{3} T(R) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \quad (5.21)$$



图 16

$$-\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \frac{4}{3} T(R) \ln \frac{\Lambda}{\mu} \quad (5.22)$$

比较式(5.21)、(5.22)与(5.15)、(5.17),可见费米子圈图的贡献与胶子圈图的贡献有相反的符号。(5.15)+(5.21)得

$$Z_3 = 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[\left(\frac{13}{3} - \alpha \right) C_2(G) - \frac{8}{3} N_F T(R) \right] \ln \frac{\mu}{\Lambda} \quad (5.23)$$

(5.17)+(5.22)得

$$Z_1 = 1 + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left[\left(\frac{17}{6} - \frac{3\alpha}{2} \right) C_2(G) - \frac{8}{3} N_F T(R) \right] \ln \frac{\Lambda}{\mu} \quad (5.24)$$

式中 N_F 是气味的数目,因为按(5.21)及(5.22),每一种气味的层子,贡献一个圈图于 Z_3 及 Z_1 。

由此算得

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_F T(R) \right] + O(\lambda^5) \quad (2.25)$$

只要

$$N_F T(R) < \frac{11}{4} C_2(G) \quad (5.26)$$

这个理论是渐近自由的。对于 $SU(3)$ 色对称群来说, $G = SU(3)$, $C_2(G) = 3$, 只要

$$N_F T(R) < \frac{33}{4} \quad (5.26)$$

理论保持渐近自由。当 $R = (N)$ 时,取4种味道,

$$\beta(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{24\pi^2} \cdot 25 \quad (5.26)$$

当然是渐近自由,不难看出,这里导出的 β 可容许有16套颜色三重态而不失渐近自由。

现在来看这种理论趋向渐近自由的情况。由(3.19)及(5.25),注意到在 $SU_c(3)$ 理论中 $C_2(G) = 3$, $T(R) = \frac{1}{2}$,我们有

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\frac{\bar{\lambda}^3}{16\pi^2} \cdot \frac{33 - 2N_F}{3} \quad (5.27)$$

定义

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \tag{5.28}$$

代入(5.27), 有

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -\bar{\alpha}^2 \frac{33-2N_F}{6} \tag{5.29}$$

其解为

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{6}{33-2N_F} \frac{1}{t} \tag{5.30}$$

由于 e^t 是动量的尺度, 令

$$e^t p = Q \tag{5.31}$$

由于 $p^2 = \mu^2$, 于是有

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \tag{5.32}$$

亦即

$$\bar{\alpha}(Q^2) = \frac{1}{\frac{25}{12} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \tag{5.33}$$

有效耦合常数在高能下以对数趋于零。这一点和第四节中简单的考虑是一致的。

以上只讨论了单圈图对 Z_3 及 Z_1 的贡献。曾经讨论过双圈图对 β 的贡献⁽¹⁴⁾, 其结果为

$$-\frac{\lambda^5}{32\pi^4} \left[\frac{17}{2} C_2^2(G) - \frac{1}{2} C_2(R) N_F T(R) - \frac{5}{6} C_2(G) N_F T(R) \right] \tag{5.34}$$

在标准 $SU(3)$ 模型中取基础表示((1.7)), $C_2(R) = \frac{4}{3}$, 由(5.25)及(5.34), 应用(5.28), 有

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = -\bar{\alpha}^2 \frac{33-2N_F}{6} - \bar{\alpha}^3 \frac{153-19N_F}{12} \tag{5.35}$$

当 t 足够大时, 其解为

$$\bar{\alpha}(t) \underset{t \text{ 很大}}{\sim} \frac{6}{33-2N_F} \frac{1}{t} - \frac{18(153-19N_F)}{(33-2N_F)^3} \frac{\ln t}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \tag{5.36}$$

由(5.32), 设 $N_F = 4$ 故 $\bar{\alpha}(t)$ 与 Q^2 的关系是

$$\bar{\alpha}(Q^2) \sim \frac{0.48}{\ln \frac{Q^2}{\mu^2}} - 0.355 \frac{\ln \ln(Q^2/\mu^2)}{[\ln(Q^2/\mu^2)]^2} \tag{5.37}$$

$\bar{\alpha}(Q^2)$ 随 Q^2 的变化如下,

Q^2/μ^2	3	4	5	10	20	30	60	100	1000
$\bar{\alpha}(Q^2)$	0.433	0.339	0.292	0.206	0.159	0.141	0.117	0.104	0.070

可见在 $3\mu^2 \leq Q^2 \leq 60\mu^2$ 处, $\bar{\alpha}(Q^2)$ 的变化较大, 然后作对数衰减。

§ 6. QCD与轻子的深度非弹散射中的无量度性(Scaling)的破坏

6.1 轻子的深度非弹散射的矩阵元

考虑如下轻子的深度非弹散射过程

$$l + N \rightarrow l' + X \tag{6.1}$$

X 表示各种可能的强子态。考虑到最低级近似的电磁相互作用或弱相互作用, 过程(6.1)可由如图17的 Feynman 图表示。

定义

$$\begin{aligned} q &= k - k' \\ q^2 &= -Q^2 = \text{对强子的传递动量} \\ \nu &= p \cdot q = \text{对强子的能量传递} \end{aligned} \tag{6.2}$$

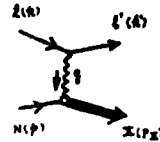


图 17

图中括号内的量为相应的动量

Bjorken 无量度性变量 x 定义为

$$x \equiv \frac{1}{w} \equiv \frac{Q^2}{2\nu} \tag{6.3}$$

另外一个无量度性变量 y^* 定义为

$$y^* \equiv \frac{q^0}{k^0} \tag{6.4}$$

在以后的讨论中, 我们常常把轻子的质量略去。在质心系中,

$$k = (\sqrt{P^2 + m_l^2}, 0, 0, P) \simeq (P, 0, 0, P), \tag{6.5}$$

$$p = (\sqrt{P^2 + m_N^2}, 0, 0, -P) \simeq (P, 0, 0, -P),$$

定义

$$q^2 = q_0^2 - q_s^2 - q_f^2 \tag{6.6}$$

则由以上各式, 可得

$$\begin{cases} \nu \simeq P(q_0 + q_s) \\ q^2 \simeq -2k \cdot k' \simeq -2P(k'_0 - k'_s) \\ \simeq 2k \cdot q \simeq 2P(q_0 - q_s) \end{cases} \tag{6.7}$$

由之有

$$\begin{aligned}
 q_0 + q_3 &\simeq \frac{\nu}{P}, \quad q_0 - q_3 \simeq \frac{q^2}{2P} \\
 q_T^2 &= -q^2 \left(1 - \frac{q_0^2 - q_3^2}{q^2} \right) \\
 &\simeq Q^2 \left(1 - \frac{\nu}{2P^2} \right) \\
 q_0 &\simeq \frac{2\nu - Q^2}{4P} \\
 q_3 &\simeq \frac{2\nu + Q^2}{4P}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

利用

$$q_0 = \frac{2\nu - Q^2}{4P} = \frac{2\nu(1-x)}{4P} = y^*P, \tag{6.9}$$

有

$$\begin{aligned}
 \nu &\simeq 2P^2 \frac{y^*}{1-x}, \\
 Q^2 &\simeq 4P^2 \frac{xy^*}{1-x} \\
 q_3 &\simeq P \frac{1+x}{1-x} y^* \\
 q_T^2 &\simeq 4p^2 \frac{xy^*}{(1-x)^2} (1-x-y^*)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

与图15相应的S矩阵元为

$$\begin{aligned}
 \langle Xl' | S | lN \rangle &= ie^2(2\pi)^4 \delta^4(k+p-k'-P_x) \cdot \\
 \langle l' | j_\mu(o) | l \rangle \langle X | J^\mu(o) | p \rangle &\frac{1}{q^2}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中 j_μ 是轻子的电磁流或弱流, J_μ 是强子的电磁流或弱流。注意到

$$\begin{aligned}
 \sum_X (2\pi)^4 \delta(k+p-k'-P_x) \langle N | J_\alpha^\dagger(o) | X \rangle \langle X | J_\beta(o) | N \rangle \\
 \sim \int d^4x \sum_X e^{iqx} \langle N | J_\alpha^\dagger(x) | X \rangle \langle X | J_\beta(o) | N \rangle \\
 \sim \langle N | J_\alpha^\dagger(x) J_\beta(o) | N \rangle
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

可知深度非弹散射截面由张量 $W_{\alpha\beta}$ 确定:

$$W_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle p | J_\alpha^\dagger(x) J_\beta(o) | p \rangle \tag{6.13}$$

谱条件允许我们把式(6.13)改写为对易子的形式:

$$W_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle p | [J_{\alpha}^{\dagger}(x), J_{\beta}(0)] | p \rangle \quad (5.14)$$

所以, 它又可写成

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} I_m T_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha\beta}(p, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T \{ J_{\alpha}^{\dagger}(x) J_{\beta}(0) \} | p \rangle \quad (6.15)$$

由罗伦兹协变性及C、P、T 变换性质考虑, $T_{\alpha\beta}$ 最一般的结构是

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & - \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{q^2} \right) T_1(q^2, \nu) + \frac{1}{m_N^2} \left(p_{\alpha} - \frac{\nu q_{\alpha}}{q^2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(p_{\beta} - \frac{\nu q_{\beta}}{q^2} \right) T_2(q^2, \nu) - i \frac{\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} p^{\sigma} p^{\tau}}{2m_N^2} T_3(q^2, \nu) \\ & + \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{m_N^2} T_4(q^2, \nu) + \frac{1}{2m_N^2} (p_{\alpha}q_{\beta} + p_{\beta}q_{\alpha}) T_5(q^2, \nu) \\ & + \frac{i}{2m_N^2} (p_{\alpha}q_{\beta} - p_{\beta}q_{\alpha}) T_6(q^2, \nu) \end{aligned} \quad (6.16)$$

其中 m_N 是核子的质量。如果时间反演守恒, 则 $T_6 = 0$; 如果流守恒, 则 $T_4 = T_5 = 0$; T_3 是 $V-A$ 的干涉项, 故对电生的过程, $T_3 = 0$; 各 T_i 是标量函数, 由(6.15), 显然有

$$W_i \equiv \frac{1}{2\pi} I_m T_i \quad (6.17)$$

对于电生过程, 微分截面为:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \frac{\alpha^2}{4m_N^2 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (6.18)$$

θ : 散射轻子的实验室系角度, E : 入射电子能量。

对于中微子或反中微子产生过程, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx dy} = & \frac{G^2 m_N E}{\pi} \left[xy^2 W_1^{\nu, \bar{\nu}} + \left(1 - y - \frac{m_N xy}{2E} \right) \frac{\nu W_2^{\nu, \bar{\nu}}}{m_N^2} \right. \\ & \left. + y \left(1 - \frac{y}{2} \right) \frac{x\nu W_2^{\nu, \bar{\nu}}}{m_N^2} \right], \end{aligned} \quad (6.19)$$

其中

$$y = \frac{E - E'}{E}$$

E = 入射中微子(反中微子)能量

E' = 散射后中微子(反中微子)能量

x 对应于 $(\frac{\nu}{E})$ 的情况

在实际计算中, 经常应用到如下的无量纲结构函数 $F_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned} F_1 &= m_N W_1 \\ F_2 &= \frac{\nu W_2}{m_N^2}, \quad F_3 = \frac{\nu}{m_N} W_3 \end{aligned} \quad (6.20)$$

式(6.19)可改写为

$$\frac{d^2 \sigma^{\nu, \bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G^2 m_N E}{\pi} [ay^2 + by + c] \quad (6.21)$$

$$a = xF_1^{\nu, \bar{\nu}} \pm \frac{x}{2} F_3^{\nu, \bar{\nu}}$$

$$b = -F_2^{\nu, \bar{\nu}} \mp xF_3^{\nu, \bar{\nu}}$$

$$c = F_2^{\nu, \bar{\nu}}$$

Bjorken 极限是 $Q^2, \nu \rightarrow \infty$, x 保持固定, 许多简单的模型预言, 在此极限下,

$$F_1 \rightarrow F_1(x)$$

$$F_2 \rightarrow F_2(x)$$

$$F_3 \rightarrow F_3(x) \quad (6.22)$$

且(6.21)中

$$a \equiv a(x), \quad b \equiv b(x), \quad c \equiv c(x)$$

结构函数(6.22)在 Bjorken 极限下的行为, 叫做无量度性(Scaling)。实验上发现, 无量度性不是准确的, 有一定的偏离, 我们在本节中来察看 QCD 预言的对无量度性的偏离。

6.2 深度非弹散射作为矩阵元在光锥上性质的测量

现在我们指出, 在 Bjorken 极限下, 深度非弹实验结果, 实际上是给出重子流算符乘积在光锥附近的一个测量。

我们出发的公式是(6.15)。考虑指数 $e^{iq \cdot x}$:

$$q \cdot x = \frac{q_0 + q_3}{\sqrt{2}} \frac{x_0 - x_3}{\sqrt{2}} + \frac{q_0 - q_3}{\sqrt{2}} \frac{x_0 + x_3}{\sqrt{2}} - \vec{q}_T \cdot \vec{x}_T \quad (6.23)$$

\vec{x}_T 及 \vec{q}_T 分别是坐标及动量的横向分量。在实验室座标中,

$$p = (m_H, 0, 0, 0)$$

$$q = \frac{1}{m_H} \left(\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 + Q^2 m_H^2} \right) \quad (6.24)$$

在Bjorken 极限下,

$$x = \frac{Q^2}{2\nu},$$

$$Q^2, \nu \rightarrow \infty \quad (6.25)$$

有

$$\left\{ \begin{aligned} q_0 + q_3 &= \frac{\nu}{m_H} + \frac{\sqrt{\nu^2 + m_H^2 Q^2}}{m_H} \sim \frac{2\nu}{m_H} \\ q_0 - q_3 &= \frac{\nu}{m_H} - \frac{\sqrt{\nu^2 + m_H^2 Q^2}}{m_H} \sim -m_H x \end{aligned} \right. \quad (6.26)$$

一般矩阵元的位相变化缓慢, 于是由(6.24)式, 可以预期, 在(6.15)的空间积分中, 只有

$$x_0 - x_3 = 0 \left(\frac{m_H}{\nu} \right)$$

$$x_0 + x_3 = 0 \left(\frac{1}{m_H x} \right) \quad (6.27)$$

的区域中的贡献最大。式(6.27)意味着

$$x_0^2 - x_3^2 = 0 \left(\frac{1}{Q^2} \right), \quad (6.28)$$

亦即积分的主要贡献来自

$$0 \left(\frac{1}{Q^2} \right) = x_0^2 - x_3^2 \geq x_0^2 - x_3^2 - \vec{x}_T^2 = x^2 > 0 \quad (6.29)$$

处, 亦即很靠近光锥之处。

6.3 算符乘积在光锥附近的展开及小距离展开

由式(6.15), 我们要讨论的是在光锥附近, 矩阵元

$$i \langle p | T \{ J_a^+(x) J_b(0) \} | p \rangle$$

的性质。让我们首先来讨论量子场论中算符乘积在光锥附近的性质。

在量子场论中, 两个定域算符乘积的一些简单运算, 如编时乘积, 对易子等, 在此二算符的距离缩小为零时, 会出现奇点, 此奇点的领头奇异性与质量无关。

例1 $\phi(x)$ 是自由标量场, 相应质量为 m ^[15]。

$$A_t(x, m^2) = -i \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(0) \} | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) + \frac{1}{4\pi^2 i x^2}
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

带头奇异性为 $\delta(x^2)$ ，与质量无关。

例 2

$$\begin{aligned}
 \Delta(x_1, m^2) &= i \langle 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle = -2\epsilon(x_0) I_m[i\Delta_F(x_1, m^2)] \\
 &\xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) - \frac{m^2}{4\pi} \epsilon(x_0) \theta(x^2) \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

带头奇异性与质量无关。

例 3

定义流算符 $J(x)$ 为

$$J(x) = N \{ \phi(x) \phi(x) \} \tag{6.32}$$

式中 N 表示正规乘积。现在来看流算符的编时乘积。

$$\begin{aligned}
 T \{ J(x) J(0) \} &= \theta(x_0) N \{ \phi^2(x) \} N \{ \phi^2(0) \} \\
 &\quad + \theta(-x_0) N \{ \phi^2(0) \} N \{ \phi^2(x) \} \\
 &= -2[\Delta_F(x, m^2)]^2 + 4i\Delta_F(x, m^2) N \{ \phi(x) \phi(0) \} \\
 &\quad + N \{ \phi^2(x) \phi^2(0) \} \\
 &\xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^4 (x^2 - i\epsilon)^2} - \frac{N \{ \phi(x) \phi(0) \}}{\pi^2 (x^2 - i\epsilon)} + N \{ \phi^2(x) \phi^2(0) \}
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

其中注意到 $N \{ \phi(x) \phi(0) \}$ 及 $N \{ \phi^2(x) \phi^2(0) \}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时没有奇异性。从式(6.33)可见，带头的奇异性与 ϕ 场的质量无关。式(6.33)可写成另一形状。将双定域算子 $N \{ \phi(x) \phi(0) \}$ 在小 x 处展开：

$$N \{ \phi(x) \phi(0) \} = N \{ \phi^2(0) \} + x_\mu N \{ \phi(0) \partial^\mu \phi(0) \} + \dots \tag{6.34}$$

把式(6.34)代入(6.33)，便有

$$\begin{aligned}
 T \{ J(x) J(0) \} &= \frac{1}{8\pi^4} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^2} - \frac{J(0)}{\pi^2 (x^2 - i\epsilon)} \\
 &\quad - \frac{x_\mu J^\mu(0)}{\pi^2 (x^2 - i\epsilon)} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

其中 $J^\mu(0) = N \{ \phi(0) \partial^\mu \phi(0) \}$ 。式(6.33)的形式为

$$T \{ J(x) J(0) \} \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \sum_m \tilde{C}^m(x^2) \tilde{O}_m(x, 0) \tag{6.36}$$

而式(6.35)的形式为

$$T \{ J(x)J(0) \} \underset{x_\mu \rightarrow 0}{\sim} \sum_n C^n(x) O_n(0) \quad (6.37)$$

其中 $O_n(0)$ 为定域算子, $\widetilde{O}_m(x,0)$ 为双定域算子, $\widetilde{C}^m(x^2)$ 及 $C^n(x)$ 是普通的奇异函数, 在 $x^2 \rightarrow 0$ 及 $x_\mu \rightarrow 0$ 分别有奇点.

在以上三个例子中, 应用自由场的讨论, 得到式(6.36)及(6.37)的结论. 在一般有相互作用的场论中, 要说明这点就不是那么简单. 但是我们有:

例4 流代数的等时对易子^[16]

$$\delta(x_0)[J_a^a(x), J_b^b(0)] = i f_{abc} J_c^c(0) \delta^4(x) \quad (6.38)$$

式中 $J_a^a(x)$ 是流, a, b, c 是流的群对称指标, f_{abc} 是群的结构常数. 显然, 式(6.38)有式(6.37)右方的结构, 即为一在原点奇异的普通函数乘以一定域算子.

总结以上四个例子, 可以相信如下的小距离^[17]及光锥上^[18]的算符乘积展开式:

$$P \{ A(x)B(0) \} \underset{x_\mu \rightarrow 0}{\sim} \sum_n C^n(x) O_n(0) \quad (9.39)$$

$$P \{ A(x)B(0) \} \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_m \widetilde{C}^m(x^2) \widetilde{O}_m(x,0), \quad (6.40)$$

式中 $C^n(x)$ 及 $\widetilde{C}^m(x^2)$ 是普通的奇异函数, $O_n(0)$ 是定域算符, $\widetilde{O}_m(x,0)$ 是双定域算符, 其形式与具体的场论模型有关. P 是编时乘积、正规乘积, 对易子或其他运算. Wilson曾指出, 在式(6.39)中, 奇异函数 $C^n(x)$ 的带头奇异性是

$$C^n(x) \underset{x_\mu \rightarrow 0}{\sim} x^{-\lambda_n} \quad (6.41)$$

$$\lambda_n = d_A + d_B - d_{O_n} \quad (6.42)$$

d_A, d_B 及 d_{O_n} 分别是算符 A, B 及 O_n 的量纲, 例如:

$$d_I = 0, d_\phi = 1, d_\psi = \frac{3}{2}, d_J = 2, d_{J_\mu} = 3 \quad (6.43)$$

式中 $J = N(\phi^2)$, $J_\mu = N(\phi \partial_\mu \phi)$. 由式(6.42), 可见在小距离展开中, 只有不多的项占主要的贡献. 例如, 在式(6.35)中, 占主要地位的展开项来自单位算符 I 的项.

6.4 渐近自由理论与深度非弹散射

现在来具体讨论在光锥附近矩阵元 $i \langle p | T \{ J_a^+(x) J_b(0) \} | p \rangle$ 的性质. 我们可以首先用光锥附近算符乘积的展开式(6.37), 以下为阐述简单起见, 把流的协变指标完全略去, 到最后才添补进来.

$$iT \{ J(x)J(0) \} \underset{x^2 \rightarrow 0}{\simeq} \sum_i C^i(x^2) B^i(x,0), \quad (6.44)$$

$B^i(x, 0)$ 是双定域算子, 由于它们在原点无奇异性, 故可作展开

$$B^i(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(0), \quad (6.45)$$

$B_{\mu_1 \dots \mu_n}^i(0)$ 是定域算子, 对 $\mu_1 \dots \mu_n$ 为对称, 且是无迹的。 $C^i(x^2)$ 是奇异函数, 由 (6.42), 有

$$C^i(x^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\simeq} O\left(\left(\frac{1}{-x^2 + i\epsilon}\right)\right)^{1-i} \quad (6.46)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

其 Fourier 变换的性质是

$$\int d^4x e^{iqx} C^i(x^2) = O\left(\left(\frac{1}{-q^2 - i\epsilon}\right)^{1+i}\right) \quad (6.47)$$

$q \rightarrow \infty$

定义函数 \tilde{C}_n^i 如下:

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{iqx} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} C^i(x^2) &= \\ &= \frac{q^{\mu_1} \cdots q^{\mu_n}}{(q^2)^{1+n+i}} \tilde{C}_n^i + \dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

加上把展开式(6.45)的矩阵元写成

$$\langle p | B_{\mu_1 \dots \mu_n}^i | p \rangle \equiv B_n^i p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_n} + \dots \quad (6.49)$$

式中 \dots 表示由其它张量, 如 $y_{\mu_1 \mu_2}$ 等构成的 n 阶张量, 于是(6.15)中的积分可写成

$$\begin{aligned} T\left(x = -\frac{q^2}{2\nu}, q^2\right) &\equiv i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T \{ J(x) J(0) \} | p \rangle \\ &\simeq \frac{1}{q^2} \sum_{i,n} \tilde{C}_n^i B_n^i \frac{(p \cdot q)^n}{(q^2)^{n+i}} + \dots \end{aligned} \quad (6.50)$$

式中略去不写的项是由(6.49)的 $y_{\mu_1 \mu_2}$ 等项及(6.48)中的非带头项所贡献。由(6.50)可见, 这些项的贡献只少比第一项的贡献小 $O\left(\frac{1}{Q^2}\right)$ 或 $O\left(\frac{1}{\nu}\right) = O(p \cdot q)$ 。从量纲分析

$$\tilde{C}_n^i \equiv C_n^i \left(\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) \quad (6.51)$$

式中 μ 是重正化点, g 是耦合常数。

考虑到定义(6.2)及(6.3), 有

$$T(x, q^2) \simeq \frac{1}{q^2} \sum_{i, n} \frac{\widetilde{C}_n^i \left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g \right)}{(q^2)^i} B_n^i x^{-n} \frac{(-)^n}{2^n} \quad (6.52)$$

由于按定义, $0 \leq |x| \leq 1$, 故 $T(x, q^2)$ 作为 x 的复变函数, 在实轴上 $-1 \leq x \leq 1$ 处有割线。且在割线上,

$$\frac{1}{2\pi} \text{Im} T(x, q^2) = W(x, q) \quad (6.53)$$

W 是深度非弹散射的物理的结构函数。注意, (6.53) 式即 (6.17) 式略去协变指标后的结果。对 (6.52) 两边乘以 x^{n-1} 后作如图 18 所示的回路积分,

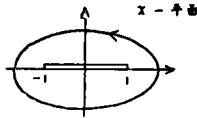


图 18

$$\text{便有} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C dx x^{n-1} T(x, q^2) \simeq \frac{1}{q^2} \frac{1}{2^n} \widetilde{C}_n^0 \left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g \right) B_n^0 \quad (6.54)$$

在式 (6.54) 的右方, $i \geq 1$ 的项全部略去。使回路 C 与割线的边缘重合, 应用 (6.53), 便有

$$\int_0^1 dx x^{n-1} W(x, q^2) \simeq -\frac{1}{q^2} \frac{1}{2^{n-2}} \widetilde{C}_n^0 \left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g \right) B_n^0 \quad (6.55)$$

式 (6.55) 的左方称为深度非弹散射结构函数的 n 次矩, 而 (6.55) 的右方是矩阵元在光锥上展开的系数, 所以式 (6.55) 具体地给出深度非弹散射作为矩阵元在光锥附近的性质的一个测量关系。

现在把自旋指标加入到上述的讨论中, 这时式 (6.44) 及 (6.45) 变成

$$i T \left\{ J^\mu(x) J^\nu(0) \right\}_a \simeq \sum_n \left[-g^{\mu\nu} i^n \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} F_{1a}^n(x^2) + g_{\mu_1}^\mu g_{\mu_2}^\nu i^{n-2} \partial_{\mu_3} \cdots \partial_{\mu_n} F_{2a}^n(x^2) \right] O_a^{\mu_1 \cdots \mu_n}(0) \quad (6.56)$$

其中 a 是对称性指标, 我们这里讨论的是对称性的非单态的情况 $F_{1a}^n(x^2)$ 及 $F_{2a}^n(x^2)$ 是 C -数奇异函数, 算符 $O_a^{\mu_1 \cdots \mu_n}(0)$ 与具体的物理模型有关。在通常的部分子模型中, 它无非是由部分子场, γ 矩阵及协变微分 D^μ 构成的、具有一定协变性质及内部对称性的算符:

$$O_a^{\mu_1 \cdots \mu_n}(0) \equiv \frac{i^{n-1}}{n!} \left[\overline{\psi} \frac{\lambda^a}{2} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \cdots D^{\mu_n} \psi + \text{各种对易项} \right] \quad (6.57)$$

记 $F_{1,2a}^n(x^2)$ 的富氏变换为 $\tilde{F}_{1,2a}^n(q^2)$ 并定义函数 $f_{1,2a}^n(q^2)$ 如下:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{1a}^n(q^2) &\equiv \left(\frac{1}{q^2}\right)^n f_{1a}^n(q^2) \\ \tilde{F}_{2a}^n(q^2) &\equiv \left(\frac{1}{q^2}\right)^{n-1} f_{2a}^n(q^2) \end{aligned} \tag{6.58}$$

与(6.49)相仿, 有

$$\langle p | O_a^{\mu_1 \dots \mu_n}(0) | p \rangle \equiv A_a^n p^{\mu_1} \dots p^{\mu_n} + \dots \tag{6.59}$$

式(6.55)变作

$$\begin{cases} \int_0^1 dx x^{n-1} W_1^a(x, q^2) = \frac{1}{2^{n+2}} f_{1a}^n\left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) A_a^n \\ \int_0^1 dx x^{n-2} \nu W_2^a(x, q^2) = \frac{m_a}{2^{n+1}} f_{2a}^n\left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g\right) A_a^n \end{cases} \tag{6.60}$$

这是深度非弹散射结构常数的 n 阶矩的定义。

深度非弹散射结构常数的矩在 *Bjorken* 极限下对 q^2 的关系, 在 *QCD* 中, 可以由重正化群方程算得式(6.60)右方的展开函数 $f_{1,2a}^n\left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g\right)$ 对 q^2 的关系, 从而作出比较。

现在我们来推这个重正化群方程。为简便起见, 也是首先把协变指标略去, 到后再把它们加上。

$$iT \{ J(x)J(0) \} \simeq \sum_n F_a^n(x^2) O_a^n(0) \tag{6.61}$$

a 是对称性指标。

由于式(6.61)的左方的两个流算符的守恒性质, 它们没有反常量纲, 而式右方的诸定域算符 $O_a^n(0)$ 有反常量纲, 所以在矩的计算中, 高 q^2 性质很大程度上决定于 $O_a^n(0)$ 的反常量纲,

注意到矩阵元 $\langle p | T \{ J(x)J(0) \} | p \rangle$ 与无外线的矩阵元

$\langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) J(x)J(0) \psi(p) \} | 0 \rangle$ 的关系, 和在第三节中的讨论一样, 可以首先写出矩阵元 $\langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) J(x)J(0) \psi(p) \} | 0 \rangle$ 的重正化群方程:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_F\right) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) J(x)J(0) \psi(p) \} | 0 \rangle = 0 \tag{6.62}$$

式中 γ_F 是场的反常量纲。由(6.61)及(6.62), 注意到不同的 F_a^n 有不同的张量结

构, 所以应当对于每一 n 均有

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_F\right) F_a^n(x) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) O_a^n(0) \phi(p) \} | 0 \rangle = 0 \quad (6.63)$$

但是, 另一方面, 可以直接写出矩阵元 $\langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) O_a^n(0) \phi(p) \} | 0 \rangle$ 的重正化群方程:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_F + \gamma_{O_a^n}\right) \langle 0 | T \{ \bar{\psi}(-p) O_a^n(0) \phi(p) \} | 0 \rangle = 0 \quad (6.64)$$

式中 $\gamma_{O_a^n}$ 是算符 O_a^n 的反常量纲。比较方程(6.63)及(6.64), 便可得到展开系数

F_a^n 的重正化群方程:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{O_a^n}\right) F_a^n = 0 \quad (6.65)$$

在渐近自由的规范理论中, β 及 $\gamma_{O_a^n}$ 都是可以计算的。例如, 对于气味非单态的计

算, 准确到 $O(g^2)$, $\gamma_{O_a^n}$ 实际上可由如下的算符插入图来算得



图 19

$$\left[O_a^n \right]_{\text{裸}} = Z_a^n O_a^n \quad (6.66)$$

$$Z_a^n = 1 + g^2 b_a^n \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \quad (\text{非单态})$$

$$\therefore \gamma_{O_a^n} = -\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_a^n = 2g^2 b_a^n \quad (6.67)$$

b_a^n 是常数, 算出为⁽¹⁷⁾

$$b_a^n = -\frac{C_3}{16\pi^2} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right] \quad (6.68)$$

C_3 为只与对称性有关的因子, 对于颜色 $SU(3)$, $C_3 = \frac{4}{3}$ 。现在把旋量指标加入,

(6.65) 变作对 $f_{1,2a}^n$ 的方程, 其解可用和节3类似的方法得到,

$$f_{1,2a}^n \left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g \right) = f_{1,2a}^n (1, \bar{g}) \exp \left\{ -\int_0^t \gamma_{\alpha_a}^n(\bar{g}(t')) dt' \right\} \quad (6.69)$$

由(3.19)及(5.25), 有

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \beta(\bar{g}) = -b\bar{g}^2 \quad (6.70)$$

$$b = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f T(R) \right]$$

应用初始条件 $\bar{g}(g, t=0) = g$, 可以积出

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 + 2bg^2t} \quad (6.71)$$

由(6.67)及(6.62)得到,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \gamma_{\alpha_a}^n(\bar{g}(t')) dt' \\ &= \int_0^t 2b_{\alpha_a}^n \frac{g^2}{1 + 2bg^2t'} dt' \\ &= \left(\frac{b_{\alpha_a}^n}{b} \right) \ln(1 + 2bg^2t) \\ &= \left(\frac{b_{\alpha_a}^n}{b} \right) \ln \left(\frac{g^2}{\bar{g}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

把(6.72)代入(6.69), 便有

$$f_{1,2a}^n \left(-\frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \approx f_{1,2a}^n(1, 0) \left(\frac{\bar{q}}{g} \right)^{2b_{\alpha_a}^n/b} \quad (6.73)$$

$q^2 \rightarrow -\infty$

回忆到

$$\bar{g}^2 \sim \frac{1}{2bln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (6.74)$$

于是由(6.73)、(6.74)可以看到, QCD预言深度非弹散射在 Bjorken 极限下, 对Scaling的偏离为

$$\sim \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-b_{\alpha_a}^n/b} \quad (6.75)$$

由于式(6.68), 我们有

$$b_a^1 = 0 \quad (6.76)$$

这是由于 J_a^α 的守恒性质而致的结果, J_a^α 不必重整, $\gamma_{J_a^\alpha} = 0$. 对于所有 $n > 1$, b_a^n 均为正值, 且 n 越大, b_a^n 也越大, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$b_a^n \propto \ln n \quad (6.77)$$

这意味着越高阶的矩趋于零越快. 回忆到

$$\bar{g}^2 \underset{Q^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2b \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (6.74)$$

于是由(6.73)、(6.74)可以看到, 渐近自由的QCD理论预言在 Bjorken 极限下, 深度非弹散射对无量度性(Scaling)的偏离是对数性的

$$\sim \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-b_a^n/b} \quad (6.75)$$

偏离的幂次是可以计算出来的.

当 $n=1$ 时, 由于式(6.59), 我们有

$$b_a^1 = 0 \quad (6.76)$$

这是由于 J_a^α 是对称性的生成元, 因此 J_a^α 不必重整, $\gamma_{J_a^\alpha} = 0$ 的结果. 由(6.73)有

$f_{1,2a}^1 = \text{常数}$, 于是由(6.60)有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \nu W_2^a = \text{常数} \quad (6.77)$$

注意到 a 是气味的非单态指标, 对于中微子散射, 式(6.77)就是 Adler 求和规则:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} (\nu W_2^{\bar{\nu}P} - \nu W_2^{\bar{\nu}n}) = \int_0^1 \frac{dx}{x} (\nu W_2^{\nu n} - \nu W_2^{\nu P}) = \text{常数} \quad (6.78)$$

对于所有的 $n > 1$, b_a^n 均为正值, 且 n 越大, b_a^n 也越大, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$b_a^n \propto \ln n \quad (6.79)$$

这意味着越高阶的矩趋于零越快. 例如, 对于 $n=2$ 的情况, 由于 $b_a^2 > 0$, 应有

$$\int_0^1 dx (\nu W_2^{ep} - \nu W_2^{en}) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \tag{6.80}$$

即电子深度非弹散射中，中子及质子的结构函数平均值在 $Q^2 \rightarrow \infty$ 时应相等，这结论与目前的实验结果是相符的。

(6.80)只给出两个结构函数的平均值之差，要计算它们个别的在大 Q^2 下的性质，就要牵涉到非单态的情况，稍为复杂一些。这时由于有两组算符都具有同样的自旋及正则量纲：

$$\begin{aligned} O_6^n &\equiv \frac{i^{n-1}}{n!} [\bar{\psi} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} \psi + \text{各种排列}] \\ O_B^n &\equiv \frac{i^{n-2}}{2n!} [F^{\mu_1 \mu_2} D^{\mu_3} \dots D^{\mu_{n-1}} F^{\mu_n \mu_1} + \text{各种排列}] \end{aligned} \tag{6.81}$$

式中 D^μ 是规范协变微商， $F^{\mu\nu}$ 是规范场强，所以按重整化的一般理论， O_6^n 及 O_B^n 不能分别单独重整，必须有混合，故算符的重整常数变成一个 2×2 的矩阵：

$$\begin{aligned} O_i &\equiv Z_{ij} O_j^{\text{裸}} \\ ij &= \psi \text{ 或 } B \end{aligned} \tag{6.82}$$

由此定出的反常量纲 $\gamma_{O_i}^n$ 也是一个矩阵，可通过如下的图形来计算：

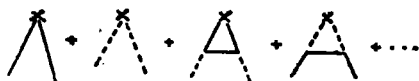


图 20

计算就要复杂得多。计算的结果⁽¹⁸⁾表明，对于电子：

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 dx \nu W_2^{ep, en}(x, Q^2) = 2m_H \langle Q^2_{Q\text{ARK}} \rangle \frac{n_F}{2n_B + n_F} \tag{6.83}$$

n_B 是理论中玻色子的数目 (=8, 对于颜色 $SU(3)$ 理论)， n_F 是理论中费米子的数目 (= $3N$, N 是气味的三重态数目)。

注意到式(6.74)的右方是常数，即 $\nu W_2^{en, ep}$ 在图21曲线下的面积在大 Q^2 时是一常数。由于在矩的定义(6.60)中有 x 的权 x^{n-1} 及 x^{n-2} 存在，所以当 Q^2 增大时， νW_2^n 在 $x \sim 1$ 处应减小，但由于总面积不变，于是在小 x 处应增大，结果就会出应图21中所示的情况，这个图象已由实验所证实。

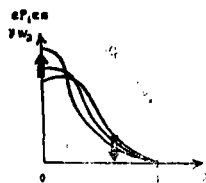


图 21

深度非弹结构函数的Scaling破坏的图象。箭头方向是 Q^2 增加的方向。

另外一个实验上的证实, 是最近的中微子实验。定义矩 $M_s(n, Q^2)$,

$$M_s(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} \frac{\nu W_s^a(x, Q^2)}{m_H} \quad (6.84)$$

由(6.73)及(6.74), 有

$$M_s(n, Q^2) = \text{const} (\ln \frac{Q^2}{\mu^2})^{-b_a^n/b} \quad (6.85)$$

由此有

$$\frac{\ln M_s(n, Q^2)}{\ln M_s(n', Q^2)} = \frac{b_a^n}{b_a^{n'}} \quad (6.86)$$

如果把各种不同的矩的对数画在同一图上, 应是一条直线, 其斜率是 $b_a^n/b_a^{n'}$, 可由渐近自由的QCD理论算得。与实验的比较是

斜率	b_a^5/b_a^3	b_a^7/b_a^3	b_a^9/b_a^3	b_a^8/b_a^4
理论	1.46	1.76	2.53	1.29
实验	1.50 ± 0.08	1.84 ± 0.20	3.00 ± 0.51	1.29 ± 0.08

在结束这一节时, 我们想指出, 如果理论不是渐近自由, 而是有紫外稳定点, 那么, 上面提到的对Scaling破坏的图象将有很大的不同。因为

$$\bar{g} \xrightarrow[Q^2 \rightarrow \infty]{} g_+ \quad (6.87)$$

这时代替(6.72), 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \gamma_{0n}(\bar{g}(t')) dt' &= \int_0^1 2g_+^2 b_c^n dt' \\ &\sim_{t \rightarrow \infty} \text{const} + 2g_+^2 b_a^n t \\ &\stackrel{(5.82)}{\sim} \text{const} + g_+^2 b_a^n \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \end{aligned} \quad (6.88)$$

这时代替(6.73), 将有

$$f_{1,2n}^n \left(-\frac{g^2}{\mu^2}, g \right) \underset{q^2 \rightarrow -\infty}{\approx} \text{const} (Q^2)^{g_+^2} b_a^n \quad (6.89)$$

即对scaling的破坏不是 $\ln Q^2$ 的幂次, 而是 Q^2 的幂次。看来, 这是与实验事实不符的。

参考文献

- [1] H. Yukawa, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 17 (1935), 48.
H. Yukawa, S. Sakata, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 19 (1937), 1084.
- [2] S. Tomonaga, *Progr. Theor. Phys.*,
J. Schwinger, *Phys. Rev.*, 74 (1948), 439.
R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, 76 (1949), 749, 769.
- [3] 这方面的文献很多, 可参阅 E. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rep.*, 9C(1973), 1
所引的文献
- [4] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, 16th Intern. Conf. on High Energy Physics.
Chicago-Batavia, 1972, Vol 2, 135.
H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. *Phys. Lett.*, 47B(1973), 365.
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 31 (1973), 494.
D. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.*, D8(1973), 3633.
- [5] 这个名称是 Gell-Mann 引入的
- [6] M. Gell-Mann, *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, 9, (1972), 733.
刘耀阳, 原子能, 1966, 1.
- [7] S. L. Adler, *J. Phys. Rev.*, 177 (1969), 2426.
J. S. Bell, R. Jackiw, *Nuovo Cimento*, 1969.
- [8] L. Faddeev, U. Popov, *Phys. Lett.*, 25B(1969), 29.
- [9] K. Hepp, *Acta. Phys. Austriaca*, 17(1963), 85.
- [10] A. A. Slavnov, *Sov. J. Particle Nucl.*, 5,(1975) 303.
J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, B33 (1971), 416.
- [11] C. G. Callan, *Phys. Rev.*, D2 (1970), 1541.
K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.*, 18, (1970), 227.
- [12] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1346.
D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1343.
- [13] L. Banyai, S. Marculescu, *Lett. Nuovo Cimento*, 11 (1974), 151.
- [14] W. Caswell, *Phys. Rev. Letters*, 38 (1974), 244.
- [15] 博戈留波夫、舒尔科夫, 量子场论引论, 科学出版社, 1966, § 15.
- [16] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, 125 (1962) 1067; *Physics*, 1(1964), 63.
- [17] D. J. Gross, F. Wilczek, *J. Phys. Rev.*, D8 (1973), 3633; D9 (1974), 980.
- [18] H. Politzer, *Phys. Reports*, 14C (1974), 4, 129.
H. Georgi, H. Politzer, *Phys. Rev.*, D9 (1974), 416.