综合述评

磁单极的非相对论理论引论

李华钟　　　　洗鼎昌
（中山大学物理系）　（科学院高能所）

一、引　　言

正如本文标题所申明，这是一篇导论性的综合报告，它的目的是向那些不是从事于量子场论理论的物理学工作者们，简单地介绍磁单极的有关概念和理论问题。为此目的，比较合适的把讨论的范围限于非相对论理论的范畴，因为这样的叙述足以解说磁单极的基本概念和实质，而不致陷入形式的讨论。同时这种叙述较能保持一定程度的直觉性。

一个电子在一个磁单极场中运动的独特性质，在很早的时候就有所讨论[1]。但是以有说服力的论证指出磁单极很可能存在，并强调它的重要意义的则是Dirac 1931年的工作[2]。Dirac 指出自然界存在的一个基本的实验事实：一切电量都是由电子电荷的整数倍。这个现象称为“电荷量子化”。如果存在有磁单极就能够自然地解释电荷量子化，Dirac 又指出从不可积的位相这种观点出发，在量子力学的已有框架之中引入磁单极也是较为自然的事，磁单极的强度与电子电荷存在一简单的关系

$$eg=\frac{n}{2} \tag{1.1}$$

称为Dirac电荷量子化条件。

但是，存在有磁单极时，电磁场的矢量势就不能是空间区域的无奇异性函数。它必须在某些区域内的奇异的，对于一个磁单极的场，这奇异的区域是某些曲线，称为“奇异弦”。由于这种奇异性，使带有磁单极的物理系统的量子力学和电动力学有许多独特的问题，需要予以特殊的研究[3][4]，例如理论的自洽性问题，奇异性的物理效应问题，空间转动不变性问题，规范变换问题等等……，此外在有磁单

本文1976年10月25日收到。

极的系统中，时空变换如P.T变换性质，交叉对称性等都与单纯电荷系统有所不同。在这篇引论中，对于上述的问题给予入门的讨论，至于相对论量子场论的磁单极理论[5]则还有像S阵的存在性问题，二次量子化的许多多余自由度的处理方法问题等这些问题经过一些作者的研究，表明可以构造自洽的磁单极和电荷的量子场论，但本文将不作讨论。

磁单极理论近年来有两方面重要的发展，一是非亚贝尔规范场理论中的磁单极理论的研究[6]，另一发展的方向是吴大峻、杨振宁的整体规范理论的磁单极理论[7]，这两种理论的共同重要之处，是无须引入奇异弦，因而免去了许多形式上的问题。

磁单极的概念在“基本粒子”模型的研究中有一些应用。例如有的工作假设层子同时带有电荷和磁荷，称为“偶子”(Dyon)模型[8]，有的把磁单极引进“基本粒子”弦模型中去作为弦的端点[9]，有的把带“颜色”的层子认作是带磁荷。这些工作只是一种设想，还没有什么实验的根据。

至于磁单极的实验工作方面，已有不少的工作从自然界中或从加速器产生过程中找寻磁单极，但是一直都没有发现[10]。1975年8月美国的一个实验工作组曾宣称在宇宙线中找到一个磁单极径迹的事例[11]。当时曾引起十分广泛的注意，然而仔细的分析表明，作出这个结论的根据是不够充分的，所发现的径迹可以解释为一种罕见的重核级联衰变。磁单极的存在与否，仍然是一个实验上尚待探索的问题。[12][10]

值得提出的是，如果实验上确实找到有磁单极，这固然是一项重要的发现，然而即使磁单极被认为不存在，探讨磁单极理论仍然可能有它的意义，因为既然磁单极如果是一种成功的理论的合理推论，那末它的不存在是否意味着还有一种根本的原理起制约作用，禁戒了此种形式的解，而这一未知的原理，如果果真有的话，亦必将在物质结构的深一层起着重要的作用。

本文对于磁单极理论的两种新发展和应用到基本粒子理论等问题都不涉及，但是本文的讨论将给出这些发展的先导和提供了解这些新发展必要的基础。本文的叙述方案如下：在§1引言中对磁单极的各个方面简要说明之后，在头几节中将先假定存在一磁单极点荷，讨论这种静场的各种性质和引起的问题，§2指出磁单极如何导致矢量势的奇异性，§3讨论由此导致的电荷量子化条件及其作用，§4讨论规范变换对奇异弦的关系，§5讨论奇异性与空间转动不变性问题，怎样保证在有奇异弦情况下保持空间转动不变性，§6讨论磁单极的C.P.T.变换性，在这几节讨论了磁单极点荷的各种问题及其解决办法之后，§7介绍Dirac原先的推理，如何从不可积的相因子的观点出发，在量子力学框架中引进磁单极。在这里特别着重于讨论不可积相因子，规范场（亚贝尔的）和磁单极三者的关系。这就提供了解近年来规范场磁单极理论的基础。

关于磁单极的文献资料，据说已有数百篇之多。近年来发表的资料更有增加的

趋势*。鉴于本文的引论性质和限于编写者的水平，所引用的文献将只限于必要的最低限度，它们也不一定都是有代表性的。

二、奇异势和奇异弦

设有一磁荷为g的磁单极，位于原点；这个磁单极产生一磁场

$$\vec{B}=\frac{g}{r^2}\hat{r} \tag{2.1}$$

$\hat{r}$为沿径矢$\vec{r}$的单位矢量。

为写出非相对论量子力学的哈密顿量，必须写出能给场强为(1.1)式的矢量势$\vec{A}(\vec{r})$。但是由磁单极的场$\vec{B}$可得

$$\nabla\cdot\vec{B}=-4\pi g\delta(\vec{r}) \tag{2.2}$$

这个式子与通常的磁场所满足的$\nabla\cdot\vec{B}=0$不同。这就使到通常用以引入矢量势的定义

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{2.4}$$

在包围磁单极的复连通区域内都不成立。因为(2.3)式与(2.2)式是矛盾的。

Dirac解决这一问题的办法是，引入有奇异性的矢量势。例如取

$$A_r=0,\quad A_\theta=0,\quad A_\phi=\frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \tag{2.5}$$

这个势$\vec{A}(r,\theta,\phi)$沿负z轴($\theta=\pi$)是奇异的，由(2.5)式得

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{g}{r^2}\hat{r}+\vec{B}_h \tag{2.6}$$

$$\vec{B}_h=\begin{cases}4\pi g\delta(x)\delta(y)\vec{r}_z & z<0(\theta=\pi)\\ 0 & z>0(\theta=0)\end{cases} \tag{2.7}$$

$\vec{B}_h$是在负z轴上为奇异的场。

磁单极的场强这时应表为

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}-\vec{B}_h \tag{2.8}$$

---

* 本文写于1976年上半年，此后有更多的新文献资料。——校稿时注

即是说，物理的场是$\nabla\times\vec{A}$减去一奇异场$\vec{B}_h$，将(2.3)式修改为(2.8)式后，则(2.1)(2.2)(2.5)(2.6)之间不互相矛盾。

以上所定义的磁单极矢量势，从原点沿负z轴是奇异的，这个$\vec{A}$为奇异的区域，称为奇异弦，它从原点沿负z轴到无穷远。(2.5)式就称为 Dirac 的单弦奇异势，在奇异上有一虚拟的奇异场$\vec{B}_h$。物理的场是(2.8)式，(2.5)式不是唯一的奇异势，还可以有其他的解，例如有另一种解

$$\overset{1}{A}_r=0,\quad \overset{1}{A}_\theta=0,\quad \overset{1}{A}_\phi=-\frac{g\cos\theta}{r\sin\theta} \tag{2.9}$$

这个解沿全z轴都是奇异的

$$\nabla\times\vec{A}^1=\frac{g}{r^2}\hat{r}+\vec{B}_h^1 \tag{2.10}$$

$$\vec{B}_h^1=\begin{cases}2\pi g\delta(x)\delta(y)\hat{r}_z & z<0(\theta=\pi)\\ -2\pi g\delta(x)\delta(y)\hat{r}_z & z>0(\theta=0)\end{cases} \tag{2.11}$$

$$\vec{B}=\frac{g}{r^2}\hat{r}=\nabla\times\vec{A}^1-\vec{B}_h^1 \tag{2.12}$$

这个解，称为 Schwinger 的双弦奇异势。

在量子力学的哈密顿量中可以用(2.5)或(2.9)式作为矢量势，但当计算能量张量时则要用(2.8)即(2.12)式的物理的场$\vec{B}$。

用普遍的办法可以证明点源磁单极的矢量势必定是奇异的，这个证明如下：

假如在除原点外的区域R中存在有一无奇异性的矢量势$\vec{A}(\vec{r})$，则考虑环路积分$\oint_c\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$，取回路如图(1)此积分之值$\Omega(r,\theta)$，$r>0$等于边界为$c$的球面部分所通过的磁通

$$\Omega(r,\theta)=2\pi g(1-\cos\theta) \tag{2.13}$$

当$\theta=0$时，$\Omega(r,0)=0$

当θ连续地由θ增至π，则Ω也连续地增加到

$$\Omega(r,\pi)=4\pi g$$

但是当$\theta=\pi$时，回路c收缩为一点，因为已假设$\vec{A}(\vec{r})$无奇异性

$$\Omega(r,\pi)=0 \tag{2.15}$$

这就同(2,14)矛盾，因此$\vec{A}(\vec{r})$在R中不可能无奇异性。

既然必须引用奇异的矢势来描述磁单极，这就自然引起一系列的问题：例如，物理上可观测的量值必须不依赖于奇异场$\vec{B}_h$，这是否能做到?哈密顿量中含有奇异的矢势，这就会破坏三维空间的转动不变性，那末怎样才能保持空间转动不变性以

保持角动量守恒?规范变换下奇异弦怎样交换,奇异弦如何保持理论的规范不变性?……这些问题就是以下几节要讨论的问题。

三、电荷量子化条件

现在考虑在什么条件下能保证奇异弦奇异场没有物理的效果。

讨论一个电子在磁单极点荷的静场中运动。磁单极场有一奇异区域,因此电子是在一复连通区域运动,这个情况同电子在 Bohm - Aharonov 实验中的情况相同。Bohm - Aharonov 实验如图2(a)所示。

Bohm - Aharonov 实验指示,在有磁通量的复连通区域中,如图 2(a) 的斜线区域磁通$\Omega\neq 0$,在此外面区域 $\Omega=0$,电子在 $\Omega=0$区域中运动,但其波函数的位相却受到一定的影响,一束相干电子束分开接路径a,b 到达屏幕,由于其位相的差异,可以在屏幕上观察到干涉现象。电子波函数的位相是依赖于路径的,如一电子绕 $\Omega\neq 0$区域的一闭合回路其位相环路积分不为零。现在一电子在磁单极的奇异场中运动情况也一样,环绕奇异弦一周回路,电子波函数的位相积分不为零。这个位

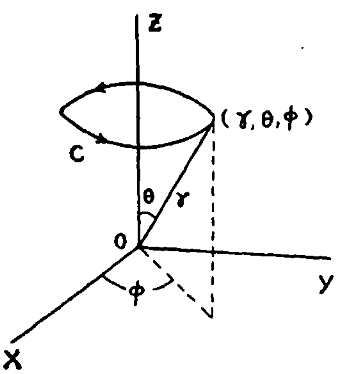

图 1

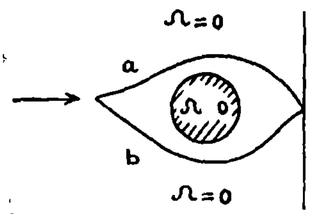

图 2 (a)
Bohm - Aharonov实驗

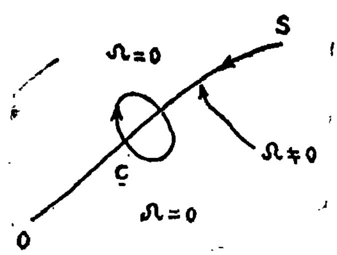

图 2 (b)
电子在奇異場中运动

相差如Bohm - Aharoonv实验所表明,是会产生可观察的物理效应的,如果要求奇异弦不产生物理效应,必要求此位相差为2π的整数倍。

电子波函数的位相可以写为*

$$i\Delta\varphi = i\int_C e\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3.1}$$

$(h=c=1)$,将(2.5)式的单弦奇异势代入(3.1),取回路c为环绕负z轴的小回路,可

* 对于电子波函数位相的这种表述的詳細討論,参看§7,(7.8)式。

计算出

$$\Delta\varphi = e\int_{c}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 4\pi ge \tag{3.2}$$

要求奇异弦及有物理贡献，必须

$$\Delta\varphi = 2\pi n \tag{3.3}$$

n为整数

$$4\pi ge = 2\pi n \tag{3.4}$$

$$eg = \frac{n}{2} \tag{3.5}$$

这条件称为Dirac电荷量子化条件。

如果用Schwinger的双弦奇异势代入，则导致

$$eg = n \tag{3.6}$$

这条件则称为Schwinger的电荷量子化条件。Schwinger曾论证，n不只是整数倍而且应为偶数，但是他的论证不是被普遍接受的。

电荷量子化条件保证奇异场无物理的贡献，在§1中已提到过，由于电荷量子化条件，如果自然界只要存在一个磁单极的话，则一切电量都是某一最小量值的整数倍。

$$e = ne_0 \tag{3.7}$$

$$e_0 = \frac{1}{g} \text{ 或} \frac{1}{2g}$$

这就解释了自然界的一个普遍的实验事实。

在以下几节中还要讨论到，这个电荷量子化条件在磁单极理论的许多问题上都起着关建的作用，它是保证理论的自洽性所必须的。Schwinger曾经研究过，对于相对论量子场论的磁单极理论，电荷量子化条件也是保证存在自洽的S阵的条件，否则将写不出S阵，做不出微扰论。

现在再进一步讨论电子在固定的磁单极场中的运动，其运动方程可写为

$$\dot{\vec{\pi}} = \frac{i}{\hbar}\left[H, \vec{\pi}\right], \qquad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}A\right)^2 \tag{3.8}$$

$\vec{\pi}$为广义动量，m为电子质量。

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{3.9}$$

$$\vec{P} = -i\hbar\Delta$$

H为电子—磁单极系统的哈密顿量

$$\dot{\vec{\pi}}=\frac{1}{c}\dot{\vec{j}}\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{3.10}$$

$\dot{\vec{j}}$为电流密度。从(3.10)式可以得到，由于存在奇异场，“罗仑兹力”中就有一非物理的项来自奇异场$\vec{B}_h$，这一项的存在使(3.10)没有确切的意义。要使(3.10)保持确定，则要求

$$j_x=j_y=0\text{，沿奇异弦上。} \tag{3.11}$$

满足这一要求的一充分条件就是电子的波函数在奇异弦上为零，

$$\phi(\vec{r})=0\text{，沿奇异弦上。} \tag{3.12}$$

这亦即要求“奇异弦决不能碰上电子”。对于奇异弦的这一要求，称为Dirac戒律(Dirac′s veto)[4]。

这里，自然会提出这样的问题，在电子的运动过程怎样能做到使奇异弦永不触及电子，对于这一问题的解答是下一节的内容之一。在§4中将指出奇异弦在空间中位置的变更相当于作规范变换。因此，为满足Dirac戒律需对奇异弦的位置作变动，也就只需作规范变换。而这样作规范变换自然是允许的，它不导致任何物理的改变。

四、奇异弦和规范变换

正如大家所熟知，可以有无穷多个势等效地描述一定的电磁场，相应于不同的势的奇异弦的选择也是无穷多的可能。本节要证明，不同的空间取位的奇异弦相当于取不同的规范。只要电荷量子化条件满足，奇异弦空间位置的变动等效于规范变换。

如§2所述，磁单极的场

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}-\vec{B}_h \tag{4.1}$$

$\vec{B}$为物理的场，$\vec{B}_h$为奇异的场只在奇异弦上不为零。

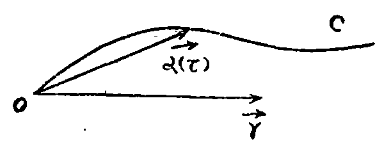

图 3

取奇异弦的矢量参数表示为$C=\vec{\alpha}(\tau)$，图3，从原点伸向无穷远处，奇异场$\vec{B}_h$可以一般地表示为

$$\vec{B}_h=-g\int_0\delta^3(\vec{r}-\vec{\alpha})d\vec{\alpha} \tag{4.2}$$

易见$\vec{B}_h$能满足

$$\nabla\cdot\vec{B}_h=g\delta^3(\vec{r})\tag{4.3}$$

满足(4.1)式的矢量势的形式解，可写为

$$\vec{A}(\vec{r})=\int\vec{h}(\vec{r}-\vec{r}')\times B(\vec{r}')d\vec{r}'\tag{4.4}$$

其中　$$\vec{B}_h=g\vec{h}(\vec{r})\tag{4.5}$$

$\vec{A}(\vec{r})$又可写成为

$$\vec{A}(\vec{r})=-\int_{c}d\vec{\alpha}\times\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})\tag{4.6}$$

易证如取奇异弦$C=\vec{\alpha}(\tau)$为负z轴，则(4.6)式化为(2.5)式的单弦解。现考虑取两根不同的奇异弦C_1,C_2，它们各自对应于矢量势$\vec{A}_1,\vec{A}_2$，

$$\vec{A}_1(\vec{r})=-\int_{c1}d\vec{\alpha}\times\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})$$

$$\vec{A}_2(\vec{r})=-\int_{c2}d\vec{\alpha}\times\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})\tag{4.7}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r})-\vec{A}_1(\vec{r})=\left(-\int_{c2}+\int_{c1}\right)d\vec{\alpha}\times\vec{B}(\vec{r}-\vec{Y})\tag{4.8}$$

令σ为以C_2-C_1为边界伸向无穷远处的一个曲面，则

$$\vec{A}_2(\vec{r})-\vec{A}_1(\vec{r})=-\iint_{s}[\nabla_\alpha(\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})\cdot d\vec{\sigma}-\nabla_\alpha\cdot\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})d\vec{\sigma}]\tag{4.9}$$

令　$$\wedge_{21}(\vec{r})=\iint_{\sigma}\vec{B}(\vec{r}-\vec{\alpha})\cdot d\vec{\sigma}$$

$$=-g\iint_{\sigma}\frac{(\vec{r}-\vec{\alpha})\cdot d\vec{\sigma}}{(\vec{r}-\vec{\alpha})^3}\tag{4.10}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r})-\vec{A}_1(\vec{r})=\nabla\wedge_{21}-g\int_{\sigma}\delta^3(\vec{r}-\vec{\alpha})\,d\vec{\sigma}\tag{4.11}$$

$\wedge_{21}(\vec{r})$中$\vec{\alpha}$积分跑遍σ曲面，$\wedge_{21}(\vec{r})$当$\vec{r}$在σ曲面上是不连续的，$\hat{r},\hat{\alpha}$为$\vec{r},\vec{\alpha}$的单位矢。由(4.10)式第二个等号，$\wedge_{21}(\vec{r})$在σ曲面上的不连续正比于σ曲面在两边所张的立体角的差。这立体角的跃变量为4π，

$$\Delta\wedge_{12}=4\pi g\tag{4.12}$$

当电荷量子化条件

$$eg = \frac{n}{2} \tag{4.13}$$

满足时，这一跃变量可表为

$$e\Delta\wedge_{21} = 2\pi n \tag{4.14}$$

从(4.11)式，撇开δ函数一项暂时不管，除了$\wedge_{21}$在σ面上有不连续性这一点之外，奇异弦C_2，C_1相应的矢量势$\vec{A}_2$，$\vec{A}_1$之差别，相当于一个规范变换，规范函数为$\wedge_{21}$当$\vec{A}_1 \longrightarrow \vec{A}_2$作规范变换时，电子的波函数应用时作位相变换

$$\phi_1(\vec{r}) \longrightarrow \phi_2(\vec{r})e^{ie\wedge_{21}} \tag{4.15}$$

由于电荷量子化条件导致的(4.14)式，$e\Delta\wedge_{21} = 2\pi n$，于是$\wedge_{21}$的不连续量对于电子波函数规范变换没有影响。就是说，即使$\wedge_{21}$在跨过σ面有不连续性，但变换效果同通常规范变换没有不同。现在再来讨论(4.11)式中的δ函数项，这一奇异项实际上要同$\nabla\wedge_{21}$中由于$\wedge_{21}$不连续性微商导致的δ型奇异性相抵消。因此对于$\vec{A}_1 \to \vec{A}_2$的变换，这些奇异性对没有贡献，(4.11)式对于$\vec{A}(\vec{r})$来说也是相当于一规范变换。

五、角动量和空间转动不变性

继续讨论一个电荷e在磁单极g的场中的运动，设电荷质量为m，它是一标量粒子，自旋为0。磁单极质量很大，固定在原点不动，其自旋也假设为0，如前几节所述，有磁单极的系统的矢量势有奇异弦。这一奇异性使系统的哈密顿量失去明显的空间转动不变性。如果电荷量子化条件满足，奇异弦不导致物理的效应，因此系统仍应保持实质的空间转动不变性。空间转动不变性同系统的角动量守恒是一致的。本节要讨论在电荷和磁单极作用系统中怎样构造正确的守恒的角动量算子[13]，以及这个系统的角动量的一些独特的性质及其引起的新问题。

磁单极在原点，电荷的径矢为$\vec{r}$，运动的轨道角动量

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{5.1}$$

然而容易以直接计算证明，由于磁单极场性质(§2)，这个角动量是不守恒的

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \tag{5.2}$$

而守恒的量是

$$\vec{J} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} - e\frac{eg\vec{r}}{r} \tag{5.3}$$

即除轨道角动量之外还附加一项$\frac{-cg\vec{r}}{r}$，其方向沿径矢，它的值即使在$r\to\infty$处仍不会消失。存在有这样奇特的一附加角动量是早在1900年出版的J.J.Thomson的著作中已指出过[1]，那时还不知道有角动量量子化，如果知道把这一附加角动量量子化的话，取它在$\vec{r}$方向的投射，令此投射值为$\frac{h}{2}$的整数倍，就立即得到

$$eg=\frac{u}{2}h \tag{5.4}$$

这恰好就是Dirac量子化条件！

(5.3)式还不是规范不变的形式，正确的规范不变形式应为

$$\vec{J}=\vec{r}\times(\vec{p}-\vec{A})-\frac{eg\vec{r}}{r} \tag{5.5}$$

其中为过渡到量子力学，上式作为算子表示式，$p=-i\hbar\nabla$.

空间转动的算子必须满足

$$[J_i,\ J_j]=i\epsilon_{ijk}J_k \quad i\ j\ k=1,2,3. \tag{5.6}$$

ϵ_{ijk}为全反对称的，$\epsilon_{123}=1$.

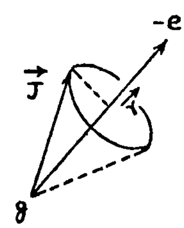

图　4

算子(5.5)确实满足对易关系(5.6)所以它是一正确的角动量算子，值得注意的是，如果丢掉了附加角动量一项，那末$\vec{J}$就不能满足(5.6)式，因此这附加角动量是保证角动量守恒亦即空间转动不变性所必需。这角动量的量子化条件也导致电荷量子化条件，这也说明理论的一致性。

经典的图象附加角动量$\frac{-eg\hat{r}}{r}$沿径矢方向，$-e$,g和其间的电磁场构成一系统，$\frac{-eg\vec{r}}{r}$是电磁场的角动量。在量子化的矢量模型来看，$\vec{J}$是绕$\hat{\vec{r}}$旋动，这个系统好象陀螺，角动量$\vec{j}=-\frac{eg\vec{r}}{r}$的性质好似自旋（图4）。

如果Dirac量子化条件成立。则$\vec{j}$好象是半整数的自旋。这就引起一个很有兴趣的问题：e和g都是自旋为0的粒子，它们服从玻色统计，可是它们如形成一束缚态，则呈现为一自旋为半整数的费米系统，服从费米统计，从玻色子可以构成费米子！这是突破了传统的概念。因此，如果存在磁单极，如果其电荷量子化条件是Dirac型的，那末对于自旋统计也提出新的问题。

再稍为涉及一点相对论S阵的问题。S阵的交叉对称性要求在一个电荷e和磁

单极g的散射过程，描述反应道s

$$s:\ e+g\longrightarrow e+g \tag{5.7}$$

的散射矩阵，与描述反应道t

$$t:\ e+\tilde{e}\longrightarrow g+\tilde{g} \tag{5.8}$$

的S阵，有互相解析延拓的关系。上式中$\tilde{e}$，$\tilde{g}$为相应记号的反粒子。可是，在(5.7)式，s道过程中(e,g)系统有角动量$\vec{j}$的贡献，而在t道反应(5.8)中$(e,\tilde{e})$，$(g,\tilde{g})$系统则没有角动量$\vec{j}$。因此，难于设想两个反应道能用同一个函数来描述。交叉对称的原来的含义是否能适用也就成为一个问题[14]。

六、C,P,T变换性质，磁荷共轭变换M

寻求完全的电磁对称性是Dirac原先引入磁单极的动机之一，如存在有磁单极，描述电磁现象的Maxwell方程组，便有完全的电磁对称形式，这时修改了的Maxwell方程组，在C,P,T变换下的性质也随之有所不同。本节讨论引入磁单极系统的C,P,T变换性质。

通常的Maxwell方程组为

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\rho & (6.1a)\\ \nabla\times\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 & (6.1b)\\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & (6.1c)\\ \nabla\times\vec{B}-\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j} & (6.1d)\end{cases}$$

这方程组在C,P,T变换下是不变的。电磁相互作用在电荷共轭C空间反射p，时间反演T转变换下是不变的，这要求：

$$\text{在}P\text{变换下：}\ \vec{E}\to-\vec{E},\ \vec{B}\to\vec{B},\ \rho\to\rho,\ \vec{j}\to-\vec{j} \tag{6.2a}$$

$$\text{在}C\text{变换下：}\ \vec{E}\to-\vec{E},\ \vec{B}\to-\vec{B},\ \rho\to-\rho,\ \vec{j}\to-\vec{j} \tag{6.2b}$$

$$\text{在}T\text{变换下：}\ \vec{E}\to\vec{E},\ \vec{B}\to-\vec{B}\ \ \rho\to\rho,\ \vec{j}\to-\vec{j} \tag{6.2c}$$

有磁单极时，*Maxwell*方程组修改为

$$
(\mathrm{II})\quad\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E}=\rho & (6.3a)\\
\nabla\times\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{j}_m & (6.3b)\\
\nabla\cdot\vec{B}=\rho_m & (6.3c)\\
\nabla\cdot\vec{B}-\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j} & (6.3d)
\end{cases}
$$

其中
$$\vec{j}=\rho\vec{v} \tag{6.4}$$
$$\vec{j}_m=\rho_m\vec{v}$$
$\vec{v}$ 为速度。

对(Ⅱ)施以变换(6.2a)，得出在 p 变换下，Maxwell 方程组(Ⅱ)不是不变的。同样，施以变换(6.2c)，也得(Ⅱ)对T变换也不是不变的。如果引入一新的变换，磁荷共轭变M,使[15]在M变换下：

$$\vec{E}\to\vec{E},\quad \vec{B}\to\vec{B},\ \rho_m\to-\rho_m,\ \vec{j}_m\to-\vec{j}_m \tag{6.5}$$

则在变换 PM,TM,下Maxwell 方程组(Ⅱ)才是不变的，CPT不变性应换为CMPT不变性。又虽然(Ⅱ)在 P,T 变换下不是不变。但是在 PT 变换则是不变的。

以上的表述是有些问题的，容易看出(6.2a)定义的P在有磁荷存在时，实际上是没有意义的。例如一个磁单极 g 的静场$\vec{B}=g\vec{r}/r^3$，在 P 作用下，如$\vec{r}\to-\vec{r}$时 $g\to g$则$\vec{B}\to-\vec{B}$，即磁荷产生的场强是矢量，而不是轴矢，这与(6.2a)矛盾。只有 PM操作才有意义。才不导致与(6.2a)矛盾。

但是(6.5)式定义的 M 变换与电荷共轭变换 C 是很不对称的，从物理上说磁荷改变符号，而不改变其余的量，如场强，也是不自然的。这些缺点以可用另一种表述而避免。注意到：

由电荷 ρ_e 产生的电场$\vec{E}_e$为矢量，

由电流$\vec{j}_e$产生的磁场$\vec{B}_e$为轴矢，

由磁荷ρ_m产生的磁场$\vec{B}_m$ 为矢量，

由磁流j_m产生的电场$\vec{E}_m$ 为轴矢；

总电场，磁场可有两种成份

$$\vec{E}=\vec{E}_e+\vec{E}_m,\quad \vec{B}=\vec{B}_e+\vec{B}_m \tag{6.6}$$

这时，在空间反演的作用下，记为P'

$$
\begin{aligned}
P':\ &\vec{E}_e\to-\vec{E}_e\quad \vec{B}_e\to\vec{B}_e\to\vec{B}_e\quad \rho_e\to\rho_e\quad \vec{j}_e\to-\vec{j}_e\\
&\vec{E}_m=\vec{E}_m\quad \vec{B}_m\to-\vec{B}_m\quad \rho_m\to\rho_m\quad \vec{j}_m\to-\vec{j}_m\to-\vec{j}_m
\end{aligned}\tag{6.7}
$$

Maxwell 方程组对P'在有电荷磁荷时是不变的。P'在有磁荷时也有意义的。这时可以引入一与电荷共轭C'完全对称的磁荷共轭M'：

$$
\begin{aligned}
C':&\quad \vec{E}_e\to-\vec{E}_e,\ \vec{B}_e\to-\vec{B}_e,\ \rho_e\to-\rho_e,\ \vec{j}_e\to-\vec{j}_e\\
M':&\quad \vec{E}_m\to-\vec{E}_m,\ \vec{B}\to-\vec{B}_m,\ \rho_m\to-\rho_m,\ \vec{j}_m\to-\vec{j}_m\ .
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

这种形式的电荷共轭变换C'和磁荷共轭变换M'是完全对称的了。有电荷磁荷的 Maxwell 方程组(Ⅱ)对于$C'M'$不变。类似地可得推广的时间反演变换T'：

$$
\begin{aligned}
T':&\quad \vec{E}_e\to\vec{E}_e\quad \vec{B}_e\to-\vec{B}_e,\quad \rho_e\leftarrow\rho_e,\ \vec{j}_e\to-\vec{j}_e\\
&\quad \vec{E}_m\to-\vec{E}_m,\quad \vec{B}_m\to-\vec{B}_m,\quad \rho_m\to\rho_m,\quad \vec{j}_m\to-\vec{j}_m
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

由G', M', $P'T'$ 得 $C'M'P'T'=1$，不变性。

电荷磁荷系统的 C, P, T 变换性质问题，即使是在经典的水平上(非量子场的也还不是一个讨论得很清楚的问题，在文献上常有互不一致的说法。这里所叙述的是一种说法，也可能并非正确。关于这方面的问题和讨论可以参考一篇较新的资料[16]及其中所引用的资料。还要指出，在普遍意义上说，电荷共轭实质应该是粒子——反粒子共轭，记之为C，在粒子——反粒子共轭变换下，$\rho_e\to-\rho_e$，$\rho_m\to-\rho_m$，有的文献所说的电荷共轭实际上是指C，它相当于CM。

Schwinger[8]曾提出一种模型，认为强子的组分粒子是同时带有电场和磁荷的粒子，他称之为偶子(dyon)按照 Schwinger 的论证，偶子的电荷磁荷量子化条件，允许分数的电荷和磁荷。强子的磁中性导致偶子电荷为$(2e_o, -e_e, -e_o)e_o=\frac{1}{3}e$，这就是夸克的电荷取值。偶子磁荷$(2g_o,\ -g_o,\ -g_o)$，$g_o=\frac{1}{3}g$，Schwinger 指出这种电荷磁荷取值自然导致CP不守恒[8]。

七、不可积相因子和规范场

Dirac 论证从量子力学波函数位相性质的分析可以允许存在有磁单极，而整个理论体系无须改动，也不须引入新的原则，因此没有外加以更多的任意性，从这个角度来引进磁单极，也就是比较自然的。

电子波函数记为$\psi(x)=\psi_o(x)e^{i\gamma}$，$\psi_o(x)$为实函数$\gamma$称为位相，$e^{i\gamma}$称为相因子。正如大家所熟知，在空时某点的位相值没有物理意义，因此在某一点的位相可以是不确定的而对于物理没有影响。只有两点间的位相差，才有确定的值，它也有物理意义。Dirac 指出进一步设想，只有相邻两点的位相差才有确定的值。在有限距离的两点间波函数的位相差也是不确定的，它依赖于联结两点的路径。这样的位相性质称为位相的不可积性。问题是：这样设想是否在理论上一致，是否会由于这种不确定性而导致量子力学推论的变得含糊不确定了？而且这样设想是否有新的有意义的

推论？答案是：能够明确给出必要条件，使引入不可积的位相不导致量子力学任何含糊或任何修正；相反，量子力学并没有要求有限距离两点位相差要确定的，这种确定性是多余的，一旦排除了这种多余的过分要求，就能揭露出新的物理内容——规范场和磁单极，这就是从 Weyl 到 Dirac 到最近杨振宁对于不可积相因子，规范场和磁单极的相互关系的物理思路。

现在讨论能保证免除任何物理上不确定性的条件。

电子空间波函数的交叠

$$I_{mn} = \int \Phi_m^*(x)\phi_n(x)dx \tag{7.1}$$

其模的平方是有物理意义的可观测量。这个量值依赖于$\Phi_m^*(x)\phi_n(x)$在两点间的位相差，不论两点是邻近或有限距离，交叠量的位相差值必须是一确定的值。因此，$\Phi_m^*(x)\phi_n(x)$在绕闭回路一周的位相差为零。还要求$\phi_n(x)$绕闭回路一周的位相差与$\Phi_m^*(x)$绕同一闭回路的位相差在数值上大小相等，符号相反，使这两个值恰好抵消。这要求导致：对于一个给定的物理系统，描述它的可能状态的全体波函数的位相，在绕闭回路一周的位相差都必须相同。这个条件就能使波函数的不可积位相在量子力学的体系中不引起任何物理上的不确定性。这一条件从物理上来看是要求波函数位相的改变完全由系统的基本动力学性质来决定，而不依赖于系统处于那一个特定的状态。对于一个电子的系统，基本的动力学就是电子与电磁场的互作用。电子波函数的位相位变与电子受到的力场有关，且只与此力场有关。这里就引伸出位相与电磁场—规范场的关系。这里所叙述的思想可以精确地表述如下。

把电子波函数写成为具有不可积相因子

$$\Psi(x) = \phi(x)e^{i\beta(x)} \tag{7.2}$$

$\phi(x)$为通常的单值的波函数，$e^{i\beta(x)}$代表不可积的相因子，$\beta(x)$是不确定的，即$\beta(x)$是x的多值函数。$\beta(x)$虽不确定，但它在邻近两点之差值则是确定的。即其空间导数是确切定义的*

$$k_\nu = \frac{\partial\beta(x)}{\partial x_\nu} \tag{7.2}$$

k_ν是完全确定的，但$x(x)$满足不可积条件

$$\frac{\partial k}{\partial x_\nu} \neq \frac{\partial k_\mu}{\partial x_\nu} \tag{7.3}$$

取$k_\mu(x)$的环流积分，应用$Stokes$定理

$$\oint k_\mu(x)dx_\mu = \iint_s curl\,\vec{k}\cdot\vec{ds} \tag{7.4}$$

---

* 在本节討論中μ,ν取0，1，2，3。这样取相对论协变形式比非相对论更为方便。

此处$\vec{k}$，$\vec{ds}$均是四维矢量。由于不可积条件(7.3)，(7.4)式不为零。

如前所述，闭回路一周电子波函数位相差与系统状态无关，而完全由系统的动力学——力场所决定，因此，令$k_\nu(x)$与电磁势成正比

$$k_\nu(x) = -eA_\nu(x) \tag{7.5}$$

则

$$\frac{\partial K_\nu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial x_\mu(x)}{\partial x_\nu} = e\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu}\right)$$
$$= eF_{\mu\nu}(x) \tag{7.6}$$

可以证明由(7.6)式定义的$F_{\mu\nu}(x)$自动满足

$$\epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{7.7}$$

这就是Maxwell方程，其中$\epsilon_{\sigma\lambda\mu\nu}$为全反对称的。

电子波函数的位相依赖于路径

$$\beta(x) = -e\int_p^x A_\nu(x)dx_\nu \tag{7.8}$$

p为从无穷处到x点的路径。

(7.8)式在§3中(3.1)式已经应用过。

现在再指出用不可积的相因子可以自然地引入规范场。(7.8)式的电磁势就是规范势。考虑以不可积位相表述的电子波函数：

$$\Psi(x) = \phi(x)e^{i\beta(x)} \tag{7.9}$$

取其导数

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu} = e^{i\beta(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} + ik_\nu(x)\right]\phi(x)$$
$$= e^{i\beta(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ieA_\nu(x)\right]\phi(x)\ , \tag{7.10}$$

上式表明如果$\phi(x)$满足一个包含一阶微商算子$\frac{\partial}{\partial x_\nu}$的运动方程，则$\phi(x)$满足同一个方程，但是要作下列代换

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ieA_\nu(x)\right)\ , \tag{7.11}$$

或者

$$P_\mu \longrightarrow P_\mu + eA_\mu(x) \tag{7.12}$$

如写成包含有不可积位相因子的电子波函数$\overline{\Psi}(x)$满足$Dirac$方程

$$\left[\gamma_\mu\left(ih\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) - m\right]\overline{\Psi}(x) = 0 \tag{7.13}$$

则电子波函数的通常形式$\phi(x)$，不含不可积相因子的波函数，满足

$$\left[\gamma_\mu\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}+eA_\mu(x)\right)-m\right]\phi(x)=0 \tag{7.14}$$

这就是通常的电子与电磁场作用的运动方程。

显然，$\phi(x)$的方程(7.14)式对于定域规范变换

$$\phi(x)\longrightarrow\phi(x)e^{i\lambda(x)}$$

$$A_\mu(x)\longrightarrow A_\mu(x)+\frac{\partial\lambda(x)}{\partial x_\mu} \tag{7.15}$$

是不变的，因此$A_\mu(x)$是规范场。

由此可见，对于电磁相互作用有两种表述方式。

（1）依赖规范的表述，概括为(7.14)(7.15)式，这时波函数位相位是不依赖于路径的，是一般通常的波函数，这是不依赖路径的表述。

（2）依赖于路径的表述，概括为(7.8)(7.9)(7.13)式，这时波函数位相是依赖于路径的，但是却是与规范无关的，是不依赖于规范的表述。

波函数

$$\Psi(x,p)=\phi(x)exp\left[-ie\int_{-\infty}^{x}A_\mu(x)dx_\mu\right] \tag{7.16}$$

在作规范变换时，规范效应都被不可积相因子中的变换抵消掉，所以$\Psi(x,p)$是依赖路径而与规范无关的形式。这两种方式是等价的。又由此可见，对于规范场有两种表述方式。

（1）通常的表述方式，从定域规范变换(7.15)出发，要求系统的拉格朗日量对于定域规范不变，导致(7.11)或(7.12)式，这是一般传统的做法，杨振宁称之为微分的形式。

（2）本节讨论的方式，从不可积相因子出发来引入规范场，这是近年杨振宁所提倡的规范场和积分形式，这两种表述也是等价的。

虽然这两种表述是等价的，但是在揭露和讨论磁单极时，则依赖路径的表述，应用不可积的相子是更为有效的工具。在下一节中就是这种表述出发来讨论 Dirac 原先引入磁单极的思想。

还指出一点，在上文中曾经使用位相和位相因子两词而没有作什么严格的区分，在所讨论的空间为单连通区域来说是可以的。对于一般情形，例如Bohm-Aharonov实验的复连通区域，最近吴大峻、杨振宁[7]明确指出具有基本意义的是相因子，而不是位相。他们证明，对于描述电磁现象，位相过分地描述电磁现象，即不同的位相可以描述同一的物理情况。而场强$E_{\mu\nu}$则不足以完全描述电磁现象，即不同的物理情况可以有相同的场强，而只有位相因子才是不多不少地恰好地描述电磁现象。因此在依赖路径的表述中应该强调的是不可积的相因子。

八、不可积相因子和磁单极

本节从不可积的相因子的观点，按照Dirac原来的论证，对波函数的性质作分析，导致可以允许存在一种独特的源，解释为磁单极，这就是Dirac引进的磁单极。

繞一闭合回路C一周不可积位相的位相差

$$\Delta\beta(x) = -\oint_c eA_\mu(x)dx_\mu \tag{8.1}$$

$$= -e\iint_{S_1}\vec{B}(x)\cdot\vec{d\sigma} \tag{8.2}$$

S_1为以C边界的曲面，$\vec{d\sigma}$为其面积元。(8.2)将位相差与磁通联系起来。

把电子波函数记为用不可积相因子的表述

$$\psi(x) = \varphi(x)e^{i\beta(x)} \tag{8.3}$$

其中$\varphi(x)$是通常的单值波函数$\varphi(x) = \varphi_0(x)e^{i\gamma(x)}$，$\varphi_0(x)$是实函数，$\gamma(x)$是普通的位相。$\psi(x)$的总位相

$$\theta(x) = \gamma(x) + \beta(x) \tag{8.4}$$

对于位相当然可以有一任意性，加上$2\pi n$，n为整数，而不影响$\psi(x)$。但是对于位相差则不然，特别地，取闭合回路一周的位相差

$$\Delta\theta(x) = \Delta\gamma(x) + \Delta\beta(x) \tag{8.5}$$

是确定的，对它一般地说不能有加上$2\pi n$的任意性，因为对于$\Delta\beta$由(8.2)可知它与磁通联系，物理上是确定的。对于$\Delta\gamma$，由于$\varphi(x)$连续性，无穷小回路引起位相的改变也为无穷小，将回路C收缩而$\to 0$时，位相改变$\Delta\gamma$也应$\to 0$，$\Delta\gamma$不依赖于路径，所以$\Delta\gamma = 0$。

因此一般而言$\Delta\theta$没有$2\pi n$的任意性，Dirac指出可以有一种例外情况，即当$\varphi(x) = 0$时，此时$\Delta\gamma$可以加上任意的$2\pi n$而与$\psi(x)$的连续性不矛盾。$\varphi(x)$为一复数，$\varphi(x) = 0$相当于两个实数条件，在空间中确定一条空间曲线，在此线上，$\varphi(x) = 0$，这曲线叫做节点线(Nodal line)。取闭合回路绕节点线一周$\psi(x)$的位相差取为$2\pi n$，n为节点线的特征数字，为一整数。连续性的要求当此闭合回路为无穷小，位相差不改变保持$2\pi n$，而在节点线上$\varphi(x) = 0$，其位相差没有任意意义，可以任意取为$2\pi n$，并不违反连续性。这样绕节点线一周的总位相改变为

$$\Delta\theta = 2\pi n - e\iint_{s_1}\vec{B}(x)\cdot\vec{ds} \tag{8.6}$$

n的符号正负依回路方向而定，而回路方向又可以与节点线的方向按右手定则定义。

取回路正反方向各一周，闭曲面$s=s_1+s_2$

$$0=2\pi n-e\oiint_s\vec{B}(x)\cdot\vec{ds} \tag{8.7}$$

$n=\Sigma_i n_i$，n_i为s面内的节点线的特征数，如s内的节点线无端点则$\Sigma_i n_i=0$ 如$\Sigma n_i\neq 0$表明在s内有节点线的端点。这些端点的存在只能系统的动力学相联系，而与系统的特定状态无关。它们决定于$\vec{A}(x)$或$\vec{B}(x)$，对系统的一切波函数都相同。因此从(8.7)可解释为磁通的源其强度为g

$$\oiint\vec{B}(x)\cdot\vec{ds}=4\pi g \tag{8.8}$$

$$2\pi n=4\pi g \tag{8.9}$$

$$eg=\frac{\pi}{2}$$

这也就是Dirac量子化条件，在§3中导出电荷量子化条件是先假定存在点荷磁单极，分析它的奇异的矢量势，导致奇异弦，然后要求奇异弦没有物理的贡献。在本节中并不预先假设存在磁单极，也不引用矢量势的奇异性。但是引入了节点线。它的性质和作用与奇异弦十分相似，它们都是以磁单极为端点，它们都服从Dirac戒律（参看(3.11)(3.12)）的要求，在它们的位置上$\phi(x)=0$。

以上对于磁单极的非相对论作了初步的介绍。这个理论可以说是言之成理，逻辑一贯，比较自然的。然而，虽说比较自然，但仍然有着虚拟的奇异弦这一类东西，还是有相当的不自然的地方。近年来磁单极理论的发展都同这奇异弦的处理有关。在这里存在两种完全相反的观点。一种是力图消除奇异弦这种虚拟的因素。例如吴大峻、杨振宁的一系列的工作[7]，在他们的理论中完全排除了奇异弦及类似的奇异性。又如把电磁规范群嵌入于紧致的非亚贝尔规范群的磁单极理论也是属于无奇异弦之列[8]。另一种相反的观点，是把虚拟的弦变为物理的，把它同“基本粒子”结构的弦模型联系起来，这弦是代表“基本粒子”结构的几何的图象，例如介子是以正反的带磁荷的层子为端点的弦；重子是以带磁荷的层子为端点的Y形弦等等。这一方向以Nambu的工作[9]为代表。

还必需强调，不管磁单极理论的发展怎样完善，看起来如何合理，这些理论的正确程度及其价值都只有经受实验的检证才能核定。科学实验是检验物理理论的唯一客观标准。

参 考 资 料

〔1〕J. J. Thomson, "Elements of Mathematical Theory of Electrieity" (1900) 转引自A. H. wilson Phys. Rev. 75, 309(1949).

〔2〕P. A. M. Dirac Proc. Roy. Soc. (London) 133A, 60 (1931), Phys Rev. 74, 817 (1948).

〔3〕B. Zumino "Strong and Weak Interaction-Present Problems" 1966 Erice Lecture. Ed. A. Zichichi.

〔4〕G. Wentzel Supp. Prog. theor. Phys. 37-38, 163 (1966).

〔5〕J. Schwinger Phys. Rev. 125, 1047(1962); 144, 1087 (1966).

〔6〕G'. tHooft Nucl, Phys B79, 279 (1974).
李华钟，冼鼎昌，郭硕鸿，中山大学学报，1975，No 3。物理学报 25,507 (1976).
李华钟，冼鼎昌，郭硕鸿，无奇异弦的SU_2磁單极， 中山大学学报 1977 No.1.

〔7〕T. T. Wu, C. N. Yang Phys. Rev. D12, 3845 (1975).

〔8〕J. Schwinger Science 165, 757 (1969).

〔9〕Y. Nambu phys. Rev, D10, 4262 (1974).

〔10〕Phys. Today. Oct, (1975) Vol. 28, No. 10, p. 17. New S cientist vol 67, No. 963, p.412 Aug. (1975).

〔11〕P. B. Price etal Phys. Rev. Lett 35, 487 (1975).

〔12〕B. L. Robinson Science 190, 137 (1975).

〔13〕A. Peres Phys. Rev. 1676, 1449 (1968).

〔14〕A. S. Goldhaber Phys. Rev. 140 B, 1407 (1965).

〔15〕N. F. Ramsey Phys. Rev. 109, 225 (1958).
W. C. Carither, R. Stefanski, P. K. Adair Phys. Rev. 149, 1070 (1966).

〔16〕R. Mignani Phys. Rev. D 13, 2437 (1976).