关于非标准分析

数学力学系　　邓永录

在微积分的创立和发展过程中，无限小量和无限小量方法起着重要的作用。长期以来，数学家和哲学家们围绕着“无限小量是什么？它们是否实在的量？实数直线上的点是否就是不可再细分的最小元素？”等问题展开争论。到十九世纪下半叶马克思和恩格斯分别在《数学手稿》和《自然辩证法》中才对这些问题给出了正确的回答。在本世纪六十年代初，数学家A.鲁宾逊利用数理逻辑的严谨方法奠定了非标准分析（这名称是相对于现在一般称做标准分析——十九世纪在极限理论基础上发展的微积分理论而取的）的基础。在这个非标准模型中，论域从一般的实数域R拓广到包含无限小量、无限大量和一般实数的域R^*，它既保存了无限小量又把微积分演算建立在严格的逻辑基础上。可以说，它对马克思、恩格斯关于无限小量的光辉思想提供了一种数学上的描述。尽管A.鲁宾逊的哲学观点有错误的地方，但是，对于他所提出的体系和方法是应该认真研究的。本文就是从这种思想出发、一方面用一种比较直观具体的方法简略介绍非标准分析的基本思想、方法和某些简单结果，另一方面结合微积分学发展的历史谈谈通过学习非标准分析对《数学手稿》和《自然辩证法》中有关论述的一些理解和体会。

（一）

首先，让我们简要地回顾微积分学发展以及伴随着它的关于无限小量的争论的历史。

十七世纪六十年代和七十年代，牛顿和莱布尼兹在大体上完成微积分学的时候，他们基本上是承认“实在无限小”的，这也就是认为无限小量是实际上存在的绝对值小于任何正数而又大于零的数，并且在这基础上广泛地使用了无限小量方法以发展微积分学的演算法则。牛顿在他的“流数法”中把一个随时间x而变化的量y称做“流动量”（fluent），其增加（或减小）的速度称做“流数”并记为$\dot{y}$（按现在的说法是流动量y对时间x的导数）。在证明微分学的一些运算法则时，牛顿引入流动量的“契机”（moment）这一新概念，所谓契机就是流动量的无限小部分，由于它们在时间的无限小部分中的累积使该量本身不断增大，这些契机与量的变化速度

(流数)成比例。牛顿引入了无限小量 o (注意：这是实有的无限小时间增量！)，并把量y的契机写成 $o\dot{y}$ 例如，在求$y=x^2$的流数时，在上式分别以 $y+\dot{y}o$ 和 $x+o$ 代y和x就得到 $y+\dot{y}o=x^2+2xo+o^2$，将两式相减得 $\dot{y}o=2xo+o^2$，去掉o^2项之后两边用o除即得$\dot{y}=2x$。莱布尼兹则不是从速度而是从切线出发得到微分法则，他用 dx和dy分别表示两个极近的坐标x和y之差(differentia)，它们相应于牛顿的0和 $\dot{y}o$，同样在略去$(dx)^2$项之后得到两个微分之商$\frac{dy}{dx}$，以此来表示曲线$y=f(x)$在点x的切线的斜率。总之，他们两人从不同的原始概念出发，但都是通过引入实有无限小量而得到同样的结果。不过，限于当时人们对无限小量的认识深度，还说不清楚为什么可以用无限小推理，所以这时的微积分免不了带有某种神秘性，因而马克思称之为“神秘的微分学”。例如在上面求导数$\dot{y}$的过程中 o^2 项像变魔术似地被去掉(或者说被“镇压”掉)，这就产生了一些逻辑上的困难和含混。尽管牛顿、莱布尼兹也意识到并试图解决这些问题，但因为他们还不懂得“只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程：运动。”(《自然辩証法》第249页)，只看到结果而忽略了过程，人为地把结果与过程割裂开来，因而抓不住问题的本质。后来，他们本人也在不同程度上对实有无限小量产生了怀疑。

尽管微积分在形成的初期还存在缺陷，但是，它的产生是人类对客观规律认识的一大进步。唯心主义者(特别是宗教神学界)对微积分的发展非常恼怒，他们中间的一些人抓住当时微积分学的某些神秘性，利用无限小推理中的某些含混，攻击微积分和无限小量。其中最有代表性的人物之一是后来被列宁批判的贝克莱主教，他除了对无限小量进行恶毒的咒骂之外，还给无限小量推理设置了一个人们称之为贝克莱悖论的陷井，其内容大致是：人们希望求x^2的导数，取比例$((x+d)^2-x^2)/d$，其中d是无限小量，由此得到$(2xd+d^2)/d$。因为d是无限小量，但不等于零，我们就能够约去d而得到 $2x+d$。又因d极小，故可忽略它而得到$2x$作为x^2的导数。但是，要注意这里做的是严格的数学推理而不是近似的结果，因此除非d是零，否则不能省略，但若d是零，就不能用它作除数约去因子d。所以在上面的求导过程就有双重的错误——先把d当作非零然后又当作零，他认为这都是为了适应人们的意志和方便，是通过荒谬的过程得到科学的所谓真理。

为了回击贝克莱等人对微积分的攻击，数学界中如达兰贝尔、拉格朗日、泰勒、马克劳林等人做了不少的工作，马克思在《数学手稿》中对他们(特别是达兰贝尔和拉格朗日)的方法作了详细的评述，对他们的工作给予充分的肯定。但是，在十七世纪下半叶到十九世纪初这一百多年间，微积分的神秘性并没有得到解决，而且在发展过程中又暴露出一些新问题，即除了无限小量是什么之外，还有实数和实数系统是什么？如何科学地定义无穷级数、函数连续性等概念并找出它们的运算规则和判别准则……等问题。十九世纪的数学家柯西、维尔斯特拉斯、狄德金和康托等在前人实践的基础上逐步解决了这些问题。他们建立了连续统(*continuum*)的概念，这

就是说实数系统R是一个有序的连续统，它是一个具有有序性、稠密性、完备性的阿基米德域。所谓阿基米德性质，就是对任意两个正实数$a>0$和$b>0$，不论a多么小b多么大，总存在一个自然数n，使得$na>b$。连续统R的引入一般是通过对于有理数作所谓狄德金分划引入无理数而达到，但是也可以用基本序列的方法，在这里我们较为详细地介绍这种方法，因为它对了解本文下一部分有帮助。

有理数序列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，称做基本序列$\{a_n\}$，如果对于有理数域$Q$的每个正数$\varepsilon>0$，存在一自然数$N=N(\varepsilon)$，使当$p>N$和$q>N$时恒有

$$|a_p-a_q|<\varepsilon。$$

易知每个基本序列都是有界的，我们可以在基本序列之间定义加法、乘法和序，即对于任意两个基本序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，易证由$c_n=a_n+b_n$和$d_n=a_n\cdot b_n$定义的序列$\{c_n\}$和$\{d_n\}$也是基本序列，我们就称$\{c_n\}$是$\{a_n\}$与$\{b_n\}$之和，$\{d_n\}$是$\{a_n\}$与$\{b_n\}$之积。此外，若对充分大的n，有$a_n\leqslant b_n$，我们称$\{a_n\}\leqslant\{b_n\}$，这就定义了基本序列间的一种大小顺序关系。我们把这样的基本序列的全体记作F_Q。在F_Q中有一类起着特殊作用的“零序列”，所谓零序列就是具有下述性质的基本序列$\{z_n\}$：对每一正有理数$\varepsilon>0$，存在一自然数N。当$n>N_0$时恒有$|z_n|<\varepsilon$。我们把零序列的全体记为Z_Q。现在，我们把F_Q按Z_Q分类，即对F_Q中任意两个序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，若$\{a_n-b_n\}\in Z_Q$，则把$\{a_n\}$和$\{b_n\}$归入同一类。易证这样分类具有自反性，对称性和传递性，因而是一种等价类。这样分类的结果，就是对F_Q的所有元素(即基本序列)加以分组，彼此相差是个零序列的所有基本序列归为一组。如果把这样的一组基本序列看成一个点的话，F_Q就是(严格地说是同构于)实数域R，而零序列Z_Q就是R的零元素，通常记为0。

实数域R的建立是人类对数的认识的一次飞跃，由于它比有理数域Q增加了完备性，因此对于取极限而言R自身是封闭的，这就给微积分学中取极限运算提供了一个完整的论域，从而促使微积分学又向前发展了一大步。柯西、维尔斯特拉斯等人就是在此基础上逐步建立了较严谨的极限理论。但是，由于思想方法的片面性，当时一些数学家还不能从现实来说明无限小量是什么，因而感到迷惑和不解，并且设法予以回避。这样一来，他们就只能退入他们的“不可攻克的抽象堡垒，即所谓纯数学”（恩格斯《自然辩証法》248页）来回答这问题，结果又是导致把过程和结果割裂开来，突出了过程，忽略了结果，使“潜在无限小量”的思想占了上风。于是，柯西、维尔斯特拉斯等人否定了实有无限小量，他们不再把无限小量看作是一种实在的数(正无限小数和负无限小数)，而是作为特定的过程和特定的变量。他们定义无限小量是极限为零的变量。这样一来，虽然对解决微积分学的神秘性起了一定的作用，从形式逻辑看来理论的严谨性是增强了，但是在微积分的论域中却排除了无限小量而只囿于实数域R，他们就是以这样的代价迴避了贝克莱的陷阱而没有从正面攻破它。

(二)

现在，人们通常把十九世纪柯西、维尔斯特拉斯等人基于极限理论在连续统R上发展起来的微积分理论称做标准分析。在本世纪六十年代之前，数学家们仍然没有摆脱传统观念的束缚，继续在形式逻辑的圈子里摸索而没有超出标准分析的范围。直到1960年，A.鲁宾逊[1],[2]用数理逻辑的严谨方法证明存在大于零而小于任何正实数的数，从数学上解决了无限小量的存在问题，从而把微积分的论域从实数域R扩大到包含无限小量的更广的数域R^*(R^*的定义在后面给出)，建立了非标准分析。由于A. 鲁宾逊是利用数理逻辑中所谓“形式语言”来构造一个包含无限小的系统，然后在这系统上发展非标准分析，所以对于数理逻辑不很熟悉的人来说，他的叙述方式是比较难懂的。我们现在介绍另一种较为直观的叙述方式[3]，其中只要用到集合论的一些基本知识以及过滤器(filter，也有译作渗透)和超滤器(Ultrafilter，也有译作极大渗透)这两个概念。

空间X中的集族F称做过滤器，如果它满足条件：

1° 空集中$\phi\notin$ F；

2° 若S_1，$S_2\in$F，则$S_1\cap S_2\in$F；

由此易得对任意正整数n，若S_1，S_2，$\cdots S_n\in$F，则 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} S_k\in$F。

3° 若$S\in$F，且$S\subseteq T\subseteq X$，则$T\in$F。

易知只含整个空间X的集族平凡地满足条件1°－3°，这说明如上定义的过滤器确实存在，因而定义是有意义的。进而，这样的过滤器往往不止一个，那么，在这些过滤器之间可以比较它们的精细程度，即当两个过滤器F_1和F_2有关系$F_1\subseteq F_2$(即由$F\in F_1$可推出$F\in F_2$)时我们说F_2比F_1精细。按照这个标准，利用集合论中著名的$Zorn$引理，可以证明对于任意一个过滤器F，存在一个包含它的最大过滤器，即所谓超滤器U。易证一个超滤器U除了满足性质1°—3 外，还具有性质。

4° 对任一$S\subseteq X$，关系$S\in U$或$X-S\in U$中有且只有一个成立。

现在以N表示所有自然数组成的集合，容易验证N的子集族G$=\{S|\ N-S$为有限$\}$是N中的一个过滤器。假定我们已选好包含G的一个超滤器H，于是可以用它来定义实数理论的一个特殊的非标准模型。以R^N表示所有由N到R的函数（即所有无穷的实数序列）组成的集合，并且在这集合中以H作标准来判别真假。下面通过H定义关系“$=$”：对于R^N中任意两个函数a、b，若$\{n|n\in N,a(n)=b(n)\}\in H$，则定义$a$“等于”$b$，记作$a=b$。易证这关系具有自反性、对称性和传递性（由性质2°、3°）。因此R^N可按这等价关系分类，以R^*表一切等价类组成的集合，并把R^*中包含$a\in R^N$的等价类记作$\langle a\rangle$（注意$\langle a\rangle$是R^*中的元素）。因此R^*中两个元素$\langle a\rangle=\langle b\rangle$，当且仅当$\{n|a(n)=b(n)\}\in H$。可以证明$R^*$继承了$R$的许多性

质，例如

（1）R^*是一个域。定义$\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle a+b\rangle$及$\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle=\langle ab\rangle$，由超滤器的性质2°、3°知这样的定义与等价类中的代表选法无关，因而是合理的。又对任意$x\in R$,把R^N中的常数函数$x(n)=x$（对一切自然数n)也记作x，则R^*中的加法单位元素是$\langle o\rangle$，乘法单位元素是$\langle 1\rangle$，元素$\langle a\rangle$的加法逆元是$\langle -a\rangle$，对于不等于$\langle o\rangle$的元素$\langle a\rangle$，乘法逆元可定义为$\langle a\rangle^{-1}=\langle d\rangle$，其中$d\in R^N$的定义是

$$d(n)=\begin{cases}a(n)^{-1} & \text{当}a(n)\neq 0,\\ 0 & \text{当}a(n)=0。\end{cases}$$

至于R^*上加法和乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律容易根据R^*上加法与乘法的定义和在R上这些律成立的事实推出。

（2）R^*是有序的。对于$\langle a\rangle$、$\langle b\rangle\in R^*$,当$\{n|a(n)\leqslant b(n)\}\in H$时定义$\langle a\rangle\leqslant\langle b\rangle$。易知这样的定义也和$\langle a\rangle\langle b\rangle$的代表元素的选取无关。不难看出，$\langle a\rangle\leqslant\langle b\rangle$且$\langle a\rangle\neq\langle b\rangle$,当且仅当$\{n|a(n)<b(n)\}\in H$，这时记作$\langle a\rangle<\langle b\rangle$。不难证明三分律成立，即对任意$\langle a\rangle$、$\langle b\rangle\in R^*$，关系式$\langle a\rangle=\langle b\rangle$、$\langle a\rangle<\langle b\rangle$和$\langle a\rangle>\langle b\rangle$中有且只有一式成立。

（3）R可嵌入R^*中作为其有序子域。换句话说，R^*是R的一个真正的扩充。事实上，若定义R到R^*的映像i为$i(x)=\langle x\rangle$,则i是一个域同态映象,因而是一个保序的嵌入映象（所以我们有时直接把$i(x)$简写为x，即把R中的元素x和R^*中的元素$i(x)$混同起来）。注意R^*并不继承R的完备性和阿基米德性，但却增加了"无限大"和"无限小"元素,即若对每个$\langle a\rangle\in R^*$，定义其绝对值为$|\langle a\rangle|=\langle c\rangle$，其中$c(n)=|a(n)|$，则$R^*$中的元素$\langle a\rangle$称做无限大，如果对每个$x\in R$都有$i(x)\leqslant|\langle a\rangle|$；$R^*$中的元素$\langle b\rangle$称做无限小，如果对$R$中任意正数$x$均有$i(o)\leqslant|\langle b\rangle|\leqslant i(x)$（当然，无限大和无限小也可分正负）。例如，取$a(n)=n$，则$\langle a\rangle$是一个无限大,因为对每个$x\in R$，$\{n|a(n)\geqslant x\}=\{n|n\geqslant x\}\in G\subseteq H$。若取$b(n)=\frac{1}{n}$，则$\langle b\rangle$是一个（非零）无限小，因为对任意正数$x\in R$。$\{n|b(n)\leqslant x\}=\{n|\frac{1}{n}\leqslant x\}\in G\subseteq H$。

如上利用超滤器将R扩充为R^*实质上就是对R中每一个实数a进行分裂而形成一个单子($monad$)$\mu(a)$，这单子是一个具有内部结构的集合，它包含许多个R^*中的元素$\langle x\rangle$，这些元素与$i(a)$（即$\mu(a)$的核）之差等于无限小（故$\mu(a)$中任意两个元素$\langle a_1\rangle$、$\langle a_2\rangle$之差亦为无限小，记作$\langle a_1\rangle\simeq\langle a_2\rangle$）。在单子$\mu(a)$中除$i(a)$之外的所有数都称做非标准数，而$a$本身就称做$\mu(a)$中所有非标准数$\langle x\rangle$的标准部分，记作$°\langle x\rangle$或$St\langle x\rangle$。$R^*$中的元素$\langle a\rangle$称做有限数,如果存在一个实数$C\in R$，使得$|\langle a\rangle|<C$。对于$R^*$中的有限数，其标准部分〔注〕有以下性质：

（1） ${}^{\circ}\langle a\rangle=0$ 　　当且只当$\langle a\rangle$是无限小；

（2） ${}^{\circ}\langle a\rangle={}^{\circ}\langle b\rangle$ 当且只当$\langle a\rangle\simeq\langle b\rangle$；

（3） ${}^{\circ}|\langle a\rangle|=|{}^{\circ}\langle a\rangle|$；

（4） ${}^{\circ}\langle a\pm b\rangle={}^{\circ}\langle a\rangle\pm{}^{\circ}\langle b\rangle$，

（5） ${}^{\circ}\langle ab\rangle={}^{\circ}\langle a\rangle{}^{\circ}\langle b\rangle$；

注：对于R^*中任一有限数$\langle a\rangle$，可以通过它对R所提供的一个狄德金分划来确定其标准部分。事实上，令集合$A_a=\{x|x\epsilon R;i(x)<\langle a\rangle\}$和$B_a=\{x|x\epsilon R;i(x)>\langle a\rangle\}$，则由$\langle a\rangle$之有限性知这两集合非空，故集合对$(A_a,B_a)$确定一实数$a$。这时对任給$\varepsilon>0$，有$a+\varepsilon\epsilon B_a$和$a-\varepsilon\epsilon A_a$因而$\{n|a+\varepsilon>a(n)\}\epsilon H$和$\{n|a-\varepsilon<a(n)\}\epsilon H$，这两集合之交$\{n||a-a(n)|<\varepsilon\}$亦属于$H$，即$\langle a\rangle-i(a)$是无限小，$a$就是$\langle a\rangle$的标准部分。

（6）由$\langle a\rangle\geqslant\langle b\rangle$可推知${}^{\circ}\langle a\rangle\geqslant{}^{\circ}\langle b\rangle$

注意由$\langle a\rangle>\langle b\rangle$只能推知${}^{\circ}\langle a\rangle\geqslant{}^{\circ}\langle b\rangle$。

若以N^*表示经扩充后的自然数集。上面举出的无限大的例子——由$a(n)=n$定义的$\langle a\rangle$就是一个不属于N而属于N^*的自然数（它比N中任意自然数都大），因此N^*真正比N大，以后也把N^*中的数称做自然数，而把其中属于N的标准自然数称做有限自然数。

下面再给出两个常用的定义。

对任意$X\subseteq R$，定义$X^*=\{\langle a\rangle|\langle a\rangle\epsilon R^*,\{n|a(n)\epsilon X\}\epsilon H\}$。

对任意从X到R的映象α，定义从X^*到R^*的映象α^*为$\alpha^*(\langle a\rangle)=\langle b\rangle$，其中

$$b(n)=\begin{cases}\alpha(a(n)) & \text{当}a(n)\epsilon X\text{；}\\ 0. & \text{当}a(n)\notin X\text{。}\end{cases}$$

因为R中的序列（即标准序列）S可看作是定义在N上而取值于R中的函数，所以用上面的办法定义S^*，它是S在R^*中的伸延，即是一个从N^*到R^*的函数。

现在，我们就能够利用R^*来给出序列和函数的极限、连续性、导数和积分的定义。首先讨论序列的极限。

定理1 标准序列S收斂于$r\epsilon R$的充分必要条件是对每个无限自然数$\langle\nu\rangle\epsilon N^*$有$S^*(\langle\nu\rangle)\simeq i(r)$，亦即要求两者之差是一无限小。

〔证〕 必要性：若S收斂于r，由标准分析中收斂性的定义知对任意$\varepsilon>0$，存在一个$m\epsilon N$，使当$n>m$时有$|s(n)-r|<\varepsilon$。另一方面，对于$\langle\nu\rangle\epsilon N^*-N$，由定义显有

$$F=\{n|\nu(n)>m\}\epsilon H,$$

和

$$G=\{n|\nu(n)\epsilon N\}\epsilon H,$$

故$F\cap G\epsilon H$，而集合$K=\{n||s(\nu(n))-r|<\varepsilon\}\supseteq F\cap G$，所以$K\epsilon H$，即$S^*(\langle\nu\rangle)\simeq i(r)$。

充分性：假若S不收敛于r，则存在某一$\varepsilon>0$，对每一$m\epsilon N$，在N中可找到一$m_0\geqslant m$，使得$|S(m_0)-r|\geqslant\varepsilon$。现在定义序列

$$\nu(m)=m_0 \qquad m=1,2,\cdots\cdots,$$

易见$\langle\nu\rangle$是一无限自然数，并且$\{m|s(\nu(m))-r|\geqslant\varepsilon\}=N\epsilon H$，故$S^*(\langle\nu\rangle)-i(r)$不是无限小

这定理的直观意义是明显的：一个标准序列$S(n)$收敛于某一标准实数r的充分必要条件是它的伸延$S^*(n)$当n取值无限大时，对应的$S^*(n)$值都落在单子$\mu(r)$中。由此可见，单子所起的作用和标准分析中“足够小的邻域”所起的作用有类似之处，只不过前者是固定的一个“无限小邻域”，后者是可以不断变小的“普通的”邻域。

下面证明柯西判别准则的非标准形式。

定理2 标准序列S收敛的充分必要条件是对所有无限自然数$\langle\nu\rangle$和$\langle\lambda\rangle$，$S^*(\langle\nu\rangle)$和$S^*(\langle\lambda\rangle)$均为有限，而且$S^*(\langle\nu\rangle)\simeq S^*(\langle\lambda\rangle)$。

〔证〕 必要性 设S收敛于$r\epsilon R$，由定理1知对任意$\langle\nu\rangle,\langle\lambda\rangle\epsilon N^*-N$，有$S^*(\langle\nu\rangle)\simeq r$及$S^*(\langle\lambda\rangle)\simeq r$，由此即得所欲证。

充分性 任取一$\langle\nu\rangle\epsilon N^*-N$，由题设知$S^*(\langle\nu\rangle)$为有限，令${}^\circ S^*(\langle\nu\rangle)=r$，则序列$S$的极限就是$r$。事实上，由题设知对任意$\langle\lambda\rangle\epsilon N^*-N$，均有$S^*(\langle\lambda\rangle)\simeq S^*(\langle\nu\rangle)\simeq r$，根据定理1即得序列$S$以$r$为极限。

从本定理出发易得标准分析中的柯西判别准则。

转到讨论函数的极限和连续性。

定理3 设标准函数$\alpha(x)$在$x_0\epsilon R$附近有定义，C是某一个标准实数，则$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=C$的充分必要条件是对任意不等于$i(x_0)$的$\langle x\rangle\epsilon\mu(x_0)$(即$\langle x\rangle$与$i(x_0)$之差$x\to x_0$为一非零无限小)有$\alpha^*(\langle x\rangle)\simeq C$。

〔证〕 必要性 若$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=C$，则由标准分析知对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|\alpha(x)-C|<\varepsilon$。现设$\langle x\rangle\epsilon\mu(x_0)$且$\langle x\rangle\neq i(x_0)$，则集合

$$F_1=\{n|0<|x(n)-x_0|<\delta\}\epsilon H。$$

又因$\alpha(x)$在x_0附近有定义，故当n够大时$\alpha(x\langle n\rangle)$是有定义的，所以集合

$$F_2=\{n|\alpha(x\langle n\rangle)\text{有定义}\}\epsilon H。$$

因为集合$\{n||\alpha(x\langle n\rangle)-C|<\varepsilon\}\supseteq F_1\cap F_2$，故它也属于$H$，即$\alpha^*(\langle x\rangle)\simeq C$。

充分性 若结论不真，则存在一$\varepsilon>0$，对每一自然数$n\epsilon N$，存在满足$0<|x_0-x_n|<\dfrac{1}{n}$的x_n，使得$|\alpha(x_n)-C|\leqslant\varepsilon$。现在定义序列$x(n)=x_n$，记$R^*$中由$x(n)$确定的元素为$\langle x\rangle$，这时有

$$\{n||\alpha(x(n))-C|\geqslant\varepsilon\}=N\epsilon H,$$

故$\alpha^*(\langle x\rangle)-C$不是无限小。另一方面，对任意正数$\eta>0$，有$\{n|0<|x_0-x_n|<\eta\}\supseteq$

$\{n|0<|x_0-x_n|<\frac{1}{n}$且$n\eta>1\}\epsilon H$，故$i(x_0)\simeq\langle x\rangle$，这就导出了矛盾。

定理4 一个定义域为$X\subseteq R$，值域为R的函数α在$x\epsilon X$处连续的充分必要条件是对于使得$\langle y\rangle\simeq i(x)$的$\langle y\rangle\epsilon X^*$（即对所有$\langle y\rangle\epsilon\mu(x)$）有$\alpha^*(i(x))\simeq\alpha^*(\langle y\rangle)$。

〔证〕必要性 若α在$x\epsilon X$处连续，则由标准分析知对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|x-y|<\delta$时有$|\alpha(x)-\alpha(y)|<\varepsilon$。现设$\langle y\rangle\simeq i(x)$且$\langle y\rangle\epsilon X^*$，则集合

$$F=\{n||x-y(n)|<\delta\}\cap\{n|y(n)\epsilon X\}\epsilon H。$$

又因集合

$G=\{n|y(n)\epsilon X\}\cap\{n||\alpha(x)-\alpha(y(n))|<\varepsilon\}\supseteq F$，故$G\epsilon H$，这就证明了$\alpha^*((ix))\simeq\alpha^*(\langle y\rangle)$。

充分性 若α在$x\epsilon X$处不连续，则存在一正数$\varepsilon>0$，对每一自然数$n\epsilon N$，都存在满足$|x-y_n|<\frac{1}{n}$的$y_n\epsilon X$，使得$|\alpha(x)-\alpha(y_n)|\geqslant\varepsilon$。现在定义序列$y(n)=y_n$，由$y(n)$确定的$\langle y\rangle\epsilon X^*$，而且集合$\{n||\alpha(x)-\alpha(y(n))|\geqslant\varepsilon\}=N\epsilon H$，故$\alpha^*(i(x))-\alpha^*(\langle y\rangle)$不是无限小。另一方面，对任意正数$\eta>0$，有

$\{n||x-y(n)|=|x-y_n|<\eta\}\supseteq\{n||x-y_n|<\frac{1}{n}$，且$n\eta>1\}$后一集合属于$H$，故前一集合属于$H$，即$i(x)\simeq\langle y\rangle$，矛盾。

定理4表明，若函数α在$x\epsilon R$处连续，则它在R^*上的伸延α^*具有如下性质：α^*在单子$\mu(x)$中的取值必在$\mu(\alpha(x))$中，这一点的直观意义是明白的。

定理5 一个定义域为$X\subseteq R$，值域为R的函数α在X上一致连续的充分必要条件是对于X^*中任意两个满足条件$\langle u\rangle\simeq\langle v\rangle$的数$\langle u\rangle$、$\langle v\rangle$，均有$\alpha^*(\langle u\rangle)\simeq\alpha^*(\langle v\rangle)$。

〔证〕 必要性 若α在X上一致连续，则对任意$\varepsilon>0$，存在一个与x无关的$\delta>0$，使当$x,y\epsilon X$且$|x-y|<\delta$时恒有$|\alpha(x)-\alpha(y)|<\varepsilon$。故若$\langle u\rangle$、$\langle v\rangle\epsilon X^*$且$\langle u\rangle\simeq\langle v\rangle$，则

$$\{n|u(n)\epsilon X,\ v(n)\epsilon X\}\cap\{n||\alpha(u(n))-\alpha(v(n))|<\varepsilon\}$$

$$\supseteq\{n|u(n)\epsilon X,\ v(n)\epsilon X\}\cap\{n||u(n)-v(n)|<\delta\}\epsilon H,$$

故前面两集合之交也属于H，即$\alpha^*(\langle u\rangle)\simeq\alpha^*(\langle u\rangle)$。

充分性 若α不是在X上一致连续，则存在一$\varepsilon>0$，对每一$n\epsilon N$，都能找到满足$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$的$x_n,y_n\epsilon X$，使有$|\alpha(x_n)-\alpha(y_n)|\geqslant\varepsilon$。现在定义序列$x(n)=x_n$，$y(n)=y_n$，用类似于证明定理4的方法可证由这两个序列定义的$\langle x\rangle$和$\langle y\rangle$之差是无限小，但$\alpha^*(\langle x\rangle)-\alpha^*(\langle y\rangle)$却不是无限小。定理证完。

定理5表明函数α在X上一致连续相当于要求它的伸延α^*把X^*中无限接近的点映为R^*中无限接近的点

现在讨论函数的导数。在标准分析中，函数$f(x)$在x_0处的导数定义为

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

这就是说要求函数 $Fx_0(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 当 $h\to 0$(但$h\neq 0$)时存在极限 $f'(x_0)$，由定理3知这等价于对任意不等于零的无限小h有

$$F^*_{x_0}(h)\simeq f'(x_0).$$

我们称每个这样的 h 为x在 x_0 处的微分，记作 dx_0 又令 $df=(f^*(<x_0+h>)-f^*(i(x_0))$（注意当把 $i(x_0)$简写为x_0时有$f^*(i(x_0))=f^*(x_0)$)，称之为$f(x)$在x_0处的微分。于是上式可改写为

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\simeq f'(x_0).$$

如果左边取标准部分则等号成立，即

$$^\circ\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}=f'(x_0).$$

由此看出，在标准分析中定义的导数是取$\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_0}$的标准部分。因为这时我们是在$R$上考虑问题，所以这样做是合理的。

我们可把上述归纳为

定理6 函数$f(x)$在x_0点存在导数的充分必要条件是对任意不等于零的无限小h_1和h_2，$F^*_{x_0}(h_1)$和$F^*_{x_0}(h_2)$均为有限，而且$F^*_{x_0}(h_1)\simeq F^*_{x_0}(h_2)$。它们的共同标准部分(记作$f'(x_0)$)就是$f(x)$在$x_0$点的(标准)导数，这里的$F^*_{x_0}(h)$是函数$Fx_0(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$在$R^*$上的伸延。

我们现在来考察怎样利用非标准方法定义黎曼积分。在标准分析中，闭区间$[a,b]$上的黎曼积分是籍助于$[a,b]$上的有限分划作和数逼近。已经知道$[a,b]$上全部有限分划所构成的集合具有连续统的势。因此，可以在这个集合与实数域R之间建立一一对应关系，即对每个有限分划$a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b$有唯一的实数r与之相对应。现设这种对应关系已取定，这时分划的各个分点、分点个数以及分划的最大子区间长度（称做分划的模）可看作是r的函数，我们以$N(r)$和$\delta(r)$分别表示与实数r对应的分划的分点个数和模。

设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，对于r所对应的分划，以B_i和b_i分别表示$f(x)$在子区间$[a_{i-1},a_i]$的上确界和下确界。作有限和数

$$S(r)=\sum_{i=1}^{N(r)} B_i(a_i-a_{i-1})$$

及

$$s(r)=\sum_{i=1}^{N(r)} b_i(a_i-a_{i-1})\ 。$$

在标准分析中，$f(x)$在$[a,b]$上积分存在充要条件是

$$\lim_{\substack{N(r)\to\infty\\ \delta(r)\to 0}} S(r)=\lim_{\substack{N(r)\to\infty\\ \delta(r)\to 0}} s(r)$$

或

$$\lim_{\substack{N(r)\to\infty\\ \delta(r)\to 0}} \sum_{i=1}^{N(r)}(B_i-b_i)(a_i-a_{i-1})=0\ 。$$

现在过渡到非标准方法的描述。函数$\delta(r)$和$N(r)$都可开拓到R^*上（对应的和数也是如此）。当$\delta(r)$为无限小，$N(r)$为无限自然数时，称r给出$[a,b]^*$的一个精分划（fine partition）。利用定理1的结果和类似的证明方法可得：

定理7 有界函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上积分存在的充分必要条件是对于$[a\ b]^*$的每个精分划（设它是由r给出）均有

$$S(r)\simeq s(r)\ .$$

或者若$N(r)=\omega(\omega\in N^*-N)$，则有

$$\sum_{i=1}^{\omega}(B_i-b_i)(a_i-a_{i-1})\simeq 0\ .$$

最后，我们用非标准方法描述某些常用的拓扑概念和结果。

定理8 集合$X\subseteq R$是闭集的充分必要条件是对每个$\langle x\rangle\in X^*$，若$y\in R$使得$\langle x\rangle\simeq i(y)$，则必有$y\in X$。

〔证〕 必要性 设X是闭集，$\langle x\rangle\in X^*$，$y\in R$和$\langle x\rangle\simeq i(y)$。又令$\overline{U}=(y-a,y+a)$是$y$的一个基本邻域，其中$a$是任一正实数，则由$\langle x\rangle\in X^*$有$F=\{n\,|\,x(n)\in X\}\in H$。另一方面，由$\langle x\rangle\simeq i(y)$知$G=\{n|\ |x(n)-y|<a\}\in H$故$K=F\cap G\in H$，因而$H$非空，所以存在$n\in N$，使得$x(n)\in X\cap U$，即$y$的每一个基本邻域均与$X$相交。因$X$是闭集，故$y\in X$。

充分性 若X不是闭集，则有一$y\in R$，使得y的每个邻域均与X相交，而且$y\notin X$。这时，对每一$n\in N$，可选出$x_n\in(y-\frac{1}{n},y+\frac{1}{n})\cap X$，定义$x(n)=x_n$，则由$\{x(n)\}$确定的$\langle x\rangle$属于$X^*$且$\langle x\rangle\simeq i(y)$，但$y\notin X$，与题设矛盾。

定理9 集合$X\subseteq R$是开集的充分必要条件是对每个$x\in X$和每个$\langle y\rangle\in R^*$，若$\langle y\rangle\simeq i(x)$，则必有$\langle y\rangle\in X^*$

〔证〕 必要性 设X是开集，由开集的定义知对每一$x\in X$，存在一正数$\delta>0$，使得$(x-\delta,x+\delta)\subseteq X$。另一方面，若$\langle y\rangle\in R^*$满足$\langle y\rangle\simeq i(x)$，则对任意正数$\varepsilon>0$，集合$\{n\,|\,|y(n)-x|<\varepsilon\}\in H$，特别地，我们取$\varepsilon=\frac{\delta}{2}$时有$F=\{n\,|\,|y(n)-x|<\frac{\delta}{2}\}\in H$，所以集合

$$G=\{n\,|\,y(n)\in X\}\supseteq\{n\,|\,y(n)\in(x-\delta,x+\delta)\}\supseteq F\in H\text{，故}G\in H\text{，即}\langle y\rangle\in X^*\text{。}$$

充分性 若X不是开集，则存在一$x\in X$，使得对每一$n\in N$，x的基本邻域$(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})$与$R-X$有非空交，亦即存在一$y_n\in(R-X)\cap(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})$令$y(n)=y_n$，则对于由$\{y(n)\}$确定的$\langle y\rangle\in R^*$和任给$\varepsilon>0$，$\{n\,|\,|y(n)-x|<\varepsilon\}\supseteq\{n\,|\,|y_n-x|<\frac{1}{n}\text{且}n>\frac{1}{\varepsilon}\}\in\mathbf{G}\subseteq H$，故前一集合也属于$H$，即$\langle y\rangle\simeq i(x)$。但是这时$\{n\,|\,y(n)\in X\}=\phi\notin H$，即$\langle y\rangle\notin X^*$。与题设矛盾。

定理10 集合$X\subseteq R$是紧集的充分必要条件是对每一$\langle x\rangle\in X^*$，存在唯一的$y\in X$，使得$\langle x\rangle\simeq i(y)$。

〔证〕必要性 设X是紧集且$\langle x\rangle\in X^*$，若对每一$y\in X$，$\langle x\rangle-i(y)$都不是无限小，则对每一$y\in X$，存在一正数$\varepsilon_y>0$，使得集合

$$F_y=\{n\,|\,x(n)\in X\text{ 且 }|x(n)-y|\geqslant\varepsilon_y\}\in H\text{。}$$

显然，开区间族$(y-\varepsilon_y,y+\varepsilon_y)$复盖$X$，由$X$的紧性知有一有限子复盖$(y_1-\varepsilon_{y_1},y_1+\varepsilon_{y_1})$，……$(y_m-\varepsilon_{y_m},y_m+\varepsilon_{y_m})$。因而$\phi=F_{y_1}\cap\cdots\cap F_{y_m}\in H$，与过滤器的性质1矛盾，这说明至少有一个$y\in X$，使得$\langle x\rangle\simeq i(y)$。若有某一$z\in X$满足$\langle x\rangle=i(z)$，则$i(z)-i(y)=(i(z)-\langle x\rangle)+(\langle x\rangle-i(y))$也是无限小，实即$z=y$。

充分性 设X不是紧集，且$\mathbf{B}$是X的一个开复盖，它没有有限子复盖。不妨一般性，可以假设$\mathbf{B}$中集合是具有有理端点且是真正复盖X的开区间，因此$\mathbf{B}$是一可数开复盖，记为$\mathbf{B}=\{B_1,B_2,B_3,\cdots\}$。我们通过$\mathbf{B}$再构造$X$的一个开复盖$\mathbf{C}$，其办法如下，首先从$\mathbf{B}$中抽出与$X$的交包含在$B_1$内的一切集合($B_1$保留)，设余下的集系是$\mathbf{B}_1\subseteq\mathbf{B}$，$\mathbf{B}_1$仍是$X$的一个开复盖。令$k_1$是使得$B_n\in\mathbf{B}_1$的大于1的最小整数$n$（因$B_1$不复盖$X$，故$\mathbf{B}_1$中除$B_1$外还有其它集合），从$\mathbf{B}_1$中抽出与$X$的交包含在$B_1\cup B_{k_1}$内的一切集合（$B_1,B_{k_1}$保留），把余下的集系记作$\mathbf{B}_2\subseteq\mathbf{B}_1$，令$k_2$是使得$B_n\in\mathbf{B}_2$的大于$k_1$的最小整数$n$。又从$\mathbf{B}_2$中抽出与$X$的交包含在$B_1\cup B_{k_1}\cup B_{k_2}$内的一切集合($B_1B_{k_1}B_{k_2}$保留)，余下集系记作$\mathbf{B}_3\subseteq\mathbf{B}_2$，……继续这样做下去，我们就得到一串集合$B_1,B_{k_1}\ B_{k_2}$……，$B_{k_n}$，……。令$C_1=B_1$，$C_2=B_{k_1}$，……$C_{n+1}=B_{k_n}$……，则$\mathbf{C}=\{C_n\,|\,n\in N\}\subseteq\mathbf{B}$也是$X$的一个开复盖，并且对每一$n\in N$均有$C_n-(\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i)\neq\phi$(因为$C_n$不含于$\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i$内)。

在X中取$x_1 \epsilon C_1$，而对于每一$n \geqslant 2$则取$x_n \epsilon C_n - (\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i)$。定义$x(n) = x_n$，则由序列$\{x(n)\}$确定的$\langle x \rangle$属于$X^*$，这时对任意$m \epsilon N$，有$\{n | x(n) \notin C_m\} \supseteq \{m+1, m+2, \cdots\} \epsilon H$，故$\langle x \rangle \notin \overset{*}{C}_m$。但因C是X的一个复盖，故对任意$y \epsilon X$，必有某一$n \epsilon N$使得$y \epsilon C_n$，$C_n$是开集，由定理9推得$\langle x \rangle - i(y)$不可能是无限小(否则就要有$\langle x \rangle \epsilon C_n^*$)，与题设矛盾。

我们应当注意定理8和定理10的区别。集合$X \subseteq R$是闭集等价于要求对每一$\langle x \rangle \epsilon X^*$，如果存在$y \epsilon R$使得$\langle x \rangle \simeq i(y)$(即$\langle x \rangle$的标准部分$^\circ\langle x \rangle$等于$y$)，则有$y \epsilon X$。这相当于说若$\langle x \rangle$是有限数，则由$\langle x \rangle \epsilon X^*$可推出$\langle x \rangle$所在的单子的核$^\circ\langle x \rangle$属于$X$。如果$\langle x \rangle$是无限大，这时就谈不上$\langle x \rangle$的标准部分了。所以，闭集的条件没有保证$^\circ\langle x \rangle$的存在。但是，集合$X \subseteq R$是紧集则等价于要求对每一$\langle x \rangle \epsilon X^*$，存在唯一的$y \epsilon X$，使得$\langle x \rangle \simeq i(y) = {}^\circ\langle x \rangle$，即$\langle x \rangle$所在的单子的核属于$X$。$^\circ\langle x \rangle$存在相当于$\langle x \rangle$是有限数，因此$X^*$不能包含无限大。总而言之，$R$中闭集和紧集的差别在于是否肯定$^\circ\langle x \rangle$的存在，但由$X^*$不能包含无限大可推出$X$必须有界(反之亦然)，故差别也反映在$X$是否有界。例如，整个空间$R$是闭集，但它不是紧集，因为对于任意无限大$\langle \omega \rangle \epsilon R^*$，在$R$中不存在使得$\langle \omega \rangle \simeq i(y)$的$y$。

对于R中的开集X，就是要求对每一$x \epsilon X$，以$i(x)$为核的整个单子$\mu(x)$都属于X^*(回忆标准分析中开集的一种定义：$X \subseteq R$是开集，当且只当对每一$x \epsilon X$，存在x的一个足够小的邻域$U(x)$，使得整个领域$U(x)$都属于X)。

(三)

现在回过头来讨论无限小量和无限大量的现实背景，以及如何利用非标准分析来更好地学习和理解马克思在《数学手稿》中论述函数的导数时所发挥的思想。

恩格斯教导我们："数学的无限是从现实中借来的，尽管是不自觉地借来的，所以它不能从它自身，从数学的抽象来说明，而只能从现实来说明。"(《自然辩証法》第249页)"物质是按质量的相对的大小分成一系列较大的、容易分清的组，使每一组的各个组成部分互相间在质量方面都具有确定的、有限的比值，但对于邻近的组的各个组成部分则具有在数学意义下的无限大或无限小的比值。可见的恒星系，太阳系，地球上的物体，分子和原子，最后是以太粒子，都各自形成这样的一组。""只要数学所计算的是现实的量，它就也要直截了当地应用这个观点。对地球上的力学说来，地球质量已经被看作无限大；在天文学中，地球上的物体及与之相当的陨石就被看作无限小；同样，对于天文学来说，只要它超出最邻近的恒星的范围来研究我们这一恒星系的构造，太阳系诸行星的距离和质量就会趋近于零。"(《自然辩証法》第248页)

事实上，人们在生活实践中对物体进行测量时所得到的长短、大小和轻重的概

念都具有相对性，为了便于比较不同类型(或分组)的对象，常常采用各种不同的量度单位。对于同一类型(或分组)的对象可用相同的单位进行量度，得出来的结果是普通的有限数。但是不同类型的对象其大小相差甚大，因而若用同一单位进行量度，得出来的结果是不可类比的。例如，对于地球上的一般物体，它们自身的大小或相互之间的距离可用公里、米、分米、厘米、毫米、微米这一套单位进行量度并进行比较，但是天文学中的长度单位相对于这些单位来说就大得不可比拟，实际上可把它看作是无限大，而微观世界的长度单位相对于这些单位来说则小得不可比拟，实际上可把它看作是无限小。因此，不管无限小量和无限大量在数学发展历史的各个阶段中是如何被人们引入和认识的，它们在客观世界中总是有其现实原型而不是数学家们纯粹主观的想象和人为的虚构。

如前所述，非标准数系R^*除了包含普通的标准实数之外还增加了无限小量和无限大量(以及由它们派生出来的量)，这表明实数域R中每一个标准实数r对应的点不是最小的几何元素，在R^*中这种"点"对应于一个可以这个数为代表的单子$\mu(r)$，单子内部有无限多个彼此相差为无限小的元素，这些元素之间又可以比较(因为无限小之间是可以比较大小的)，即单子内部是有许多层次的。因此，由R扩充为R^*的过程就是突破单子的外壳而对它进一步细分的过程，这种认识完全符合辩证唯物主义关于"物质具有无限可分性"的观点，也为现代物理学的发展所证实。因此非标准分析很有可能成为描述微观世界的一种新的数学工具。

我们现在进一步考察和比较在标准模型和非标准模型中导数(微分)的定义及其产生的方法。

在标准分析中，函数$y=f(x)$在x点的导数定义为极限

$$\lim_{\substack{x_1\to x\\ x_1\neq x}}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{dy}{dx}$$

这时，令x_1趋于x，$y_1=f(x_1)$也随着趋于$y=f(x)$，设$\Delta x=x_1-x$，$\Delta y=y_1-y$，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$开始只是平均值，当$x_1\to x$时$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，于是比值就具有$\frac{0}{0}$的形式。究竟对这个$\frac{0}{0}$应如何理解呢？过去，数学家们对此无法作出正确的解释，因此只能通过极限的形式来回避它，但是，事实上不管x_1如何接近x，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$也只能是反映平均值而不是瞬时值，正如恩格斯所指出："事情是这样清楚，真是奇怪，为什么数学家们要那样顽固地坚持把它搞得神秘莫测。不过这是那些先生们的思想方法的片面性造成的。肯定地，直截了当地令$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$，这个概念在他们的头脑中是没有的。但是很明显，只有当量x和y的最后的痕迹消失，剩下的只是它们的变化过程的表示式而不带

任何量时，$\frac{dy}{dx}$才能真正表示出在x和y上已经完成了的过程。”“……，通常的方法忽略了$dxdy$等是完全错误的，特别值得注意的是，只有当$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$时，而且只有那时演算在数学上才是绝对正确的。”（恩格斯致马克思(1881年8月18日)《马克思恩格斯全集》第35卷第21—22页）

现在再来看看马克思在《数学手稿》中是怎样求导数和对求导过程中出现的$\frac{0}{0}$所作的精辟论述。马克思使用的求导方法是先把x变到x_1，把y变到$y_1=f(x_1)$，于是得到比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}$，并称之为预备导函数。然后，在这个预备导函数中令$x_1$回到$x$，$y_1$也随之回到$y$，就使得$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变成$\frac{0}{0}$，只是“因为在表达式$\frac{0}{0}$里，它的起源和含义的全部痕迹都消失了，所以我们用$\frac{dy}{dx}$代替它，在这里有限差$x_1-x$或$\Delta x$，以及$y_1-y$或$\Delta y$，作为被扬弃了的或消失了的差，以符号形式出现，或者说$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变成了$\frac{dy}{dx}$。”（《数学手稿》第3页）于是就从预备导函数得出$y=f(x)$在$x$的导数$\frac{dy}{dx}$。对于这一过程，马克思特别强调指出：“一些进行理性推断的数学家所坚持的聊以自慰的说法是，$\frac{dy}{dx}$在量上其实只是无限小〈的比〉，仅仅接近于$\frac{0}{0}$，这是奇想，……。”“第一，为了得出‘导数’，就必须设$x_1=x$，因而是严格数学意义上的$x_1-x=0$，无需任何只是无限趋近之类的糊涂话。第二，由于设$x_1=x$，于是$x_1-x=0$，所以根本没有符号的东西进入导数，原先通过x的变化而引进的量x_1没有消失，它只是减少到它的极小极限值$=x$，……。”（《数学手稿》第5页）

在非标准分析中导数的定义就不存在马克思所指出的缺陷。我们在上一部分已经看到，这时区间$[a, b]$上的标准函数$y=f(x)$在标准点$x\in(a,b)$处的导数$\frac{dy}{dx}$是定义为当x_1取值于以x为核的单子时比值

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

的标准部分，在这里x_1和x应理解为R^*中的元素，f应理解为原来的标准函数f在非标准区间$[a\ b]^*$上的伸延，因而它的取值$f(x_1)$和$f(x)$也是R^*的元素。如果$f(x)$在$[a\ b]$上可微，那么它必然是连续的，由定理7知当x_1和x在同一单子内（即x_1-x为无限小）时$y_1-y=f(x_1)-f(x)$也是无限小，而且这两个无限小的比值应当是有限数（否则$f(x)$在x点就不是可微的了），因为我们的目的是求标准函数f的导数，这时的论域是R，所以应取这个比值的标准部分。现按马克思的观点和方法对这样的定义加以考察。首先，当x变为x_1时，y也变为y_1，这时并不要求x_1-x是无限小，我们得到的是表示平均值的$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-y}$，其标准部分就是马克思所说的预备导数。注意若$x_1$

是一般的标准数，那么不管它如何接近x，这比值始终只是表示在区间x_1-x中的平均值而不是在x点的瞬时值。但是，我们求导数的目的是想得到$f(x)$在x点的瞬时变化率，因此必须让x_1重新取回x，y_1也随着重新取回y，正如马克思所指出："首先取差(*Differentiation*)，然后再把它扬弃，这样在字面上导致无。理解微分运算的全部困难(正象理解否定的否定本身时那样)，恰恰在于要看到微分运算是怎样区别于这样的简单手续并因此导出实际结果的。"（《数学手稿》第2页）在求导过程中，x通过x_1又重新取回x并不意味着x_1的消失，由x_1重新取回的x并不是原来的x 。在非标准分析的定义中x_1就是回到了以x为核的单子内任意一点x_1而不是x本身，x_1和x相差一无限小量，它的标准部分是0，即$x_1-x\simeq 0$。这时$\frac{y_1-y}{x_1-x}$就是两无限小量之比值，它的分子和分母分别称做函数$y=f(x)$的微分dy和自变量x的微分dx，我们就得到了记号$\frac{dy}{dx}$，当只考虑它们的标准部分时才有$\frac{0}{0}$。所以，"$\frac{dy}{dx}$实际上并不意味着异乎寻常的$\frac{0}{0}$，而是相反地意味着$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的节日制服。"（《数学手稿，第》39页）由此可以看出，这种做法是符合马克思的论述的。

现在具体考察用非标准分析的方法求函数$y=x^2$的导数，按照定义

$$\frac{dy}{dx}\simeq\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=\frac{(x_1+x)(x_1-x)}{x_1-x}=x_1+x,$$

这里$x_1-x\simeq 0$但不为零，因此用它作除数在R^*内作除法运算是合法的。另一方面，我们所求的导数应是一标准数，故取x_1+x的标准部分(即略去一标准部分等于零的无限小)就得到$\frac{dy}{dx}=x^2$，这些步骤在数学上是严格的，因而彻底推倒了贝克莱攻击无限小推理的所谓论据，在非标准分析面前贝克莱悖论完全破产了。

最后，我们可以得到如下的看法：非标准分析是一门新兴的数学理论，尽管它产生的时间并不算长，但在某些方面和某种意义上说来它比标准分析更深刻、更准确地反映客观世界及其规律性，更为符合辩证唯物论。当然，它还处在发展阶段，还有许多不成熟的地方，但这是可以在发展中不断加以补充和完善的。据了解，非标准分析的方法除了应用于微积分和近代分析之外，已经有人着手摸索利用它来发展非标准概率、非标准几何以及非标准力学等。当然，这一切工作都不能完全离开和代替已有的数学分支和方法。但是，我们认为这种探索还是很有意义的，因为它极有可能给人类提供描述现实世界的空间形式和数量关系的一些新的有效方法。

参考文献

〔1〕A. Robinson, *Non-standard analysis*, *Proc. Kon. Ned. Ak. Van Wetesch Series A* 64 (1961), 432—440.

〔2〕A. Robinson, *Non—standard Analysis*, (Revised edition) North—Holland, Amsterdam, 1974.

〔3〕D. H. Van Osdol, *Truth with respect to an ultrafilter or how to make intuition rigorous*, *Amer. Math. Monthly*. 79 (1972), 355—363.