

规范场的重正化

赵保恒

(中国科学技术大学)

I 引言

自从'tHooft, Veltman, B. W. Lee 和 Zinn-Justin 等人关于规范场重正化的经典工作⁽¹⁻⁴⁾发表以来,规范场的重正化理论又有了一些新的发展。1974年 Becchi, Rouet 和 Stora 指出,包括规范固定项和规范补偿项在内的有效拉氏量有一种超规范对称性—Slavnov不变性⁽⁵⁾。由Slavnov不变性可以导出 Slavnov恒等式。用Stora 恒等式代替 Ward-Takahashi恒等式(或称 Slavnov-Taylor恒等式)可以使重正化的理论大大简化⁽⁶⁾。把 Slavnov不变性和 Zimmermann-Lowenstein的正规乘积算法^(7,8)结合起来,可以建立起更严格更深入的规范场重正化理论^(5,9)。此外,有零质量的粒子时,理论中还有红外发散,在量子电动力学中这个困难比较容易克服。而在一般的规范场理论中这个困难比较严重。1975—1976人们制定了新的减除手续,可以同时消除紫外发散和红外发散⁽¹⁰⁻¹³⁾,并且成功地把这个理论用到了规范场上^(14,16)。

本文分成两个部分。第一部分介绍怎样利用Slavnov恒等式消除紫外发散,得到有限的规范无关的么正的S矩阵。这里介绍的是⁽⁶⁾的方法。我们把这一部分写成比较详细的讲义的形式,希望它可以作为 Abers-Lee 讲义的补充⁽¹⁷⁾。Abers-Lee 讲义中关于重正化部分过于简略,而且现在看来也应该更新了。了解这一部分基本上只需要予先读过 Abers-Lee 讲义重正化部分以外的内容。第二部分是评述性的,简略地介绍前面提到的其他方面的进展。

II 规范场的重正化

为简单起见,假定在我们的模型中通过 Higgs 机制所有矢量介子都获得质量,不存在质量为零的粒子。这样就避免了红外发散带来的复杂性。我们还假定在这个模型中没有 Adler-Bell-Jackiw 反常。我们采用可重正的线性规范条件。可重正的意思是根据幂计数(Power-Counting)理论是可重正的。我们假定规范参

数取某个特殊值时,理论有么正性,但是根据幂计数是不可重正的(例如 R_4 规范中取 $\xi=0$),凡碰到发散的Feynman图时,我们采用维数正常化^[18,19]。

1. 记号

假定规范群 G 是紧致的。结构常数 $f_{\alpha'\beta'\gamma'}$ 是全反对称的实数。李代数的表示 $t^{a'}$ 是实的反对称矩阵,满足关系式

$$[t^{a'}, t^{b'}] = f_{\alpha'\beta'\gamma'} t^{\gamma'} \quad (1)$$

令

$$(f^{a'})_{\beta'\gamma'} = -f_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

则

$$[f^{a'}, f^{b'}] = f_{\alpha'\beta'\gamma'} f^{\gamma'} \quad (2)$$

我们用 A 表示所有的场, i 代表所有变数,例如对于规范场 $A_i = A_a(x)$,

$i = (\alpha, \mu, x)$, 对于标量场 $A_i = \phi_a(x)$, $i = (a, x)$; a 表示内部量子数。无穷小规范变换写成

$$\delta A_i = (\Delta_i + t_{ij}^a A_j) \omega_a \quad (3)$$

其中 $\omega_a = \omega_a(x_0)$ 是群参数。对于规范场

$$t_{ik}^{\beta} = f_{\alpha'\beta'\gamma'} \delta^{\alpha}(x_i - x_k) \delta^{\alpha}(x_i - x_{\beta}) \delta_{\mu\nu}, \text{ 当 } i = (\alpha', \mu, x_i)$$

$$k = (\gamma', \nu, x_k)$$

对于标量场

$$t_{ik}^{\beta} = t_{\alpha\beta}^{\beta'} \delta^{\alpha}(x_i - x_k) \delta^{\alpha}(x_i - x_{\beta})$$

当

$$i = (a, x_i), \quad k = (b, x_k)。$$

对规范场

$$\Delta_i^{\beta} = \left(\frac{1}{g} \right)^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha}^{x_i} \delta^{\alpha}(x - x_{\beta})。$$

当

$$i = (\alpha', \mu, x), \quad \beta = (\beta', x_{\beta}) \quad (4)$$

对标量场

$$\Delta_i^{\beta} = 0, \quad g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'} \delta_{\alpha'\beta'}, \quad g_{\alpha'} \text{ 是耦合常数,}$$

如果 $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ (G_i 为单群),一般说就有 n 个不同的耦合常数 g_1, \dots, g_n 。在同一单群内 $g_{\alpha'} = g_{\beta'}$ 。我们规定指标重复时,对分立的变数求和,对时空坐标积分。

由(1)和(2)可得到

$$t_{ik}^{\alpha} \left(t_{kj}^{\gamma} A_j + A_k^{\beta} \right) - t_{ik}^{\gamma} \left(t_{kj}^{\alpha} A_j + A_k^{\beta} \right) = f_{\alpha\beta\gamma} \left(t_{ij}^{\gamma} A_j + A_i^{\alpha} \right) \quad (5)$$

其中

$$f_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha'\beta'\gamma'} \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \delta^{\beta}(x_j - x_k)$$

[验证(5): 显然我们只需要对规范场验证

$$t_{ik}^{\alpha} A_k^{\beta} - t_{ik}^{\beta} A_k^{\alpha} = f_{\alpha\beta\gamma} A_i^{\gamma} \quad (6)$$

令 $i = (\lambda', \mu, x_i), k = (k', \nu, x_k)$ 则

$$\begin{aligned} t_{ik}^{\alpha} A_k^{\beta} &= \int \alpha^{\lambda} x_k f_{\lambda' \alpha' k'} \delta_{\mu\nu} \frac{\delta_{\lambda' k'}}{g_{k'}} \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \delta^{\beta}(x_j - x_k) \partial_{\nu}^{\alpha} \delta^{\beta}(x_k - x_p) \\ &= \frac{1}{g_{\alpha'}} f_{\lambda' \alpha' \beta'} \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \partial_{\mu}^{\alpha} \delta^{\beta}(x_j - x_p) \\ t_{ik}^{\beta} A_k^{\alpha} &= \frac{1}{g_{\alpha'}} f_{\lambda' \beta' \alpha'} \delta^{\beta}(x_j - x_p) \partial_{\mu}^{\beta} \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \end{aligned}$$

如果 α', β' 不属同一单群, 则 $f_{\lambda' \alpha' \beta'} = 0$, 而在同一单群内, $g_{\alpha'} = g_{\beta'}$, 所以

$$\begin{aligned} A_{ik}^{\alpha} A_k^{\beta} - t_{ik}^{\beta} A_k^{\alpha} &= \frac{1}{g_{\alpha'}} f_{\lambda' \beta' \lambda'} \partial_{\mu}^{\alpha} [\delta^{\alpha}(x_i - x_j) \delta^{\beta}(x_j - x_p)] \\ &= \frac{1}{g_{\alpha'}} f_{\lambda' \beta' \lambda'} \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \partial_{\mu}^{\alpha} \delta^{\beta}(x_j - x_p) \end{aligned}$$

另一方面
$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma} A_i^{\gamma} &= f_{\alpha' \beta' \gamma'} \int \alpha^{\lambda} x_j \delta^{\alpha}(x_i - x_j) \delta^{\beta}(x_j - x_p) \frac{1}{g_{\alpha'}} \partial_{\mu}^{\alpha} \delta^{\beta}(x_j - x_p) \\ &= \frac{1}{g_{\alpha'}} f_{\alpha' \beta' \lambda'} \delta^{\alpha}(x_i - x_p) \partial_{\mu}^{\alpha} \delta^{\beta}(x_j - x_p) \end{aligned}$$

因此(6)式成立。在 $g_{\alpha'}^{-1} f_{\alpha' \beta' \lambda'}$ 中对 α' 不求和。]

令
$$D_i^{\alpha}[A] = A_i^{\alpha} + t_{ij}^{\alpha} A_j \quad (7)$$

则(5)式可写成

$$\frac{\delta D_i^{\alpha}}{\delta A_k^{\beta}} D_k^{\beta} - \frac{\delta D_i^{\beta}}{\delta A_k^{\alpha}} D_k^{\alpha} = f_{\alpha\beta\gamma} D_i^{\gamma} \quad (8)$$

在规范理论中, 作用量 $L[A]$ 对规范变换(3)是不变的。这种不变性可以表示成

$$D_i^{\alpha}[A] \frac{\delta L[A]}{\delta A_i^{\alpha}} = 0 \quad (9)$$

Feynman规则由有效作用量

$$L[A, C, \bar{C}] = L[A] - \frac{1}{2} F_a^2[A] + \bar{C}_a M_{a\beta}[A] C_\beta \quad (10)$$

决定。\$C, \bar{C}\$ 是Feddeev-Popov鬼粒子场。我们取线性规范条件，

$$F_a[A] = F_{a i} A_i \quad (11)$$

因此 $M_{a\beta}[A] = F_{a i} D_i^\beta[A]$ (12)

选取规范条件时必须注意使\$M_{a\beta}\$有逆。

2. SLAVNOV恒等式

我们定义一种超规范变换——Slavnov变换，

$$\delta A_i = D_i^\alpha C_a \delta_\alpha \quad (13)$$

$$\delta C_a = -\frac{1}{2} f_{a\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \delta_\alpha \quad (14)$$

$$\delta \bar{C}_a = -F_a[A] \delta_\alpha \quad (15)$$

\$\delta_\alpha\$是和\$C, \bar{C}\$反对易的常数(\$S_1, C_a, \bar{C}_a\$和下面(26)中的\$\eta_a, \bar{\eta}_a, K_i\$组成Grassmann代数，关于这个代数上的微分和积分的规则可参考Боголюбов, Ширков量子场论导引, 1976年俄文第三版§43)。显然作用量\$L[A]\$对Slavnov变换是不变的，因为(13)是把\$C, \bar{C}\$作为\$\omega_a\$的一种特殊的规范变换。实际上有效作用量\$L[A, C, \bar{C}]\$也有Slavnov不变性，这是由于

$$\delta(D_i^\alpha[A] C_a) = 0, \quad (16)$$

$$\delta(M_{a\beta}[A] C_\beta) = 0, \quad (17)$$

(验证: \$\delta(D_i^\alpha[A] C_a) = \delta D_i^\alpha[A] C_a + D_i^\alpha[A] \delta C_a\$

$$= t_{ij}^\alpha D_j^\beta C_\beta \delta_\alpha C_a - \frac{1}{2} D_i^\alpha f_{a\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \delta_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} (t_{ij}^\alpha D_j^\beta - t_{ij}^\beta D_j^\alpha) C_\beta \delta_\alpha C_a - \frac{1}{2} D_i^\alpha f_{a\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \delta_\alpha$$

$$= \frac{1}{2} f_{a\beta\gamma} D_i^\alpha C_\beta \delta_\alpha C_a - \frac{1}{2} D_i^\alpha f_{a\beta\gamma} C_\beta C_\gamma \delta_\alpha = 0$$

$$\delta(M_{a\beta}[A] C_\beta) = F_{a i} \delta(D_i^\beta C_\beta) = 0 \quad (16)$$

因此 $\delta(\bar{C}_a M_{a\beta} C_\beta - \frac{1}{2} F_a^2) = 0$ (18)

于是 $\delta L[A, C, \bar{C}] = 0$ (19)

令

$$S[A, C, \bar{C}, K, L] = L[A, C, \bar{C}] + K_i D^a[A] C_i - \frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma} L_\alpha C_\beta C_\gamma \quad (20)$$

其中 K_i, L_α 是不包含场量的外源, $K_i, C_\alpha, \bar{C}_\alpha$ 互相反对易。我们规定 C 的 $F-P$ 荷 (Faddeev-Popov 荷) 为 1, \bar{C} 和 K_i 的 $F-P$ 荷为 -1, L_α 的 $P-P$ 荷为 -2, 因此 $S[A,$

$C, \bar{C}, K, L]$ 是 $F-P$ 荷中性的。

易证 $\delta(f_{\alpha\gamma} C_\beta C_\gamma) = 0$. (21)

〔证: $\delta(f_{\alpha\gamma} C_\beta C_\gamma) = 2 f_{\alpha\gamma} C_\beta \delta C_\gamma = - f_{\alpha\beta\gamma} C_\beta f_{\gamma\lambda\sigma} C_\lambda C_\sigma \delta_\alpha$

$$= f_{\lambda\sigma\gamma} f_{\beta\alpha\gamma} C_\beta C_\lambda C_\sigma \delta_\alpha$$

$$= f_{\sigma\beta\gamma} f_{\lambda\alpha\gamma} C_\beta C_\lambda C_\sigma \delta_\alpha$$

$$= f_{\beta\lambda\gamma} f_{\sigma\alpha\gamma} C_\beta C_\lambda C_\sigma \delta_\alpha$$

$$= \frac{1}{3} (f_{\lambda\sigma\gamma} f_{\beta\alpha\gamma} + f_{\sigma\beta\gamma} f_{\lambda\alpha\gamma} + f_{\beta\lambda\gamma} f_{\sigma\alpha\gamma}) C_\beta C_\lambda C_\sigma \delta_\alpha = 0$$

(由 Jacobi 恒等式)]

由 (19), (16), (21) 我们有

$$SS[A, C, \bar{C}, K, L] = 0 \quad (22)$$

所以 S 有 Slavnov 不变性, 用 (20) 可以把 Slavnov 变换改写成

$$\delta A_i = \frac{\delta s}{\delta K_i} \delta_\lambda \quad (23)$$

$$\delta C_\alpha = \frac{\delta s}{\delta L_\alpha} \delta_\lambda \quad (24)$$

$$\delta \bar{C}_\alpha = -F_\alpha[A] \delta \quad (25)$$

〔说明: 设 $F[C]$ 是反对易量 C_α 的泛函, 我们用

$$\delta F = \delta C_\alpha \frac{\delta F}{\delta C_\alpha}$$

定义 F 对反对易量 C 的导数, 这和用

$$\delta F = \frac{\delta' F}{\delta C_\alpha} \delta C_\alpha$$

定义的 $\frac{\delta' F}{\delta C_\alpha}$ 不同。因为一般说 $\frac{\delta F}{\delta C_\alpha} \neq \frac{\delta' F}{\delta C_\alpha}$ 。〕

考虑母泛函

$$W[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] = \int [dA \ dC \ d\bar{C}]$$

$$\exp i(S[A, C, \bar{C}, K, L] + J_i A_i + \bar{C}_a \eta_a + \bar{\eta}_a C_a) \quad (26)$$

其中 $J_i, \eta_a, \bar{\eta}_a$ 是外源。 $\eta, \bar{\eta}, C, \bar{C}, K$ 互相对易, η_a 的 $F-P$ 荷为 $+1$, $\bar{\eta}_a$ 的 $F-P$ 荷为 -1 。容易验证在 Slavnov 变换下 $[dA' dC d\bar{C}]$ 不变

[验证: 由于

$$\frac{\delta^2 S}{\delta A_i \delta K_i} = t_{ii}^a C_a = 0, \quad \frac{\delta^2 S}{\delta C_a \delta L_a} = f_{aav} C_v = 0$$

变换的 Jacobi 行列式的对角元素为(把时间-空间分成格子计算)

$$1 + \frac{\delta^2 S}{\delta A_i \delta K_i} \delta_i \epsilon^4 = 1, \quad 1 + \frac{\delta^2 S}{\delta C_a \delta L_a} \delta_a \epsilon^4 = 1,$$

$$1 - \frac{\delta^2 F_a[A]}{\delta \bar{C}_a} \delta_a \epsilon^4 = 1 \quad \epsilon^4 = \text{格子体积。}$$

注意到 $(\delta_i)^n = 0, n=2, 3, \dots$ 就知道 Jacobi 行列式 $= 1$

因此, 在(26)右边对积分变数作 Slavnov 变换就有

$$\begin{aligned} 0 &= \int [dA dC d\bar{C}] (J_i \delta A_i + \delta \bar{C}_a \eta_a + \bar{\eta}_a \delta C_a) \cdot \\ &\exp: (S + J_i A_i + \bar{C}_a \eta_a + \bar{\eta}_a C_a) \\ &= \int [dA dC d\bar{C}] \left(J_i \frac{\delta S}{\delta K_i} \delta_i - F_a[A] \delta_a \eta_a + \bar{\eta}_a \frac{\delta S}{\delta L_a} \delta_a \right) \\ &\cdot \exp: (S + J_i A_i + \bar{C}_a \eta_a + \bar{\eta}_a C_a) \end{aligned}$$

$$\text{因此} \quad \left(J_i \frac{\delta}{\delta K_i} + \bar{\eta}_a \frac{\delta}{\delta L_a} + \eta_a F_a \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right) W[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] = 0 \quad (27)$$

这就是 Slavnov 恒等式, 它包含着 Ward-Takahashi 恒等式。为了得到后者, 只

要对(27)作 $\frac{\delta}{\delta \eta_a}$ 运算, 然后令 $\eta = \bar{\eta} = K = L = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta \eta_a} \left[(27) \text{右边} \right] \Big|_{\eta = \bar{\eta} = K = L = 0} \\ &= \left(J_i \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_a \delta K_i} + F_a[A] W \right) \Big|_{\eta = \bar{\eta} = K = L = 0} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^2 W}{\delta \eta_a \delta K_i} \Big|_{\eta = \bar{\eta} = K = L = 0} = \frac{\delta}{\delta \eta_a} \langle i T D_i^a [A] C_i \rangle_0 \\ &= - \langle T D_i^a [A] C_i \bar{C}_a \rangle_0 = - D_i^a \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \langle T C_i \bar{C}_a \rangle_0 \end{aligned}$$

$$= -iD_i^{\beta\alpha} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] M_{\beta\alpha}^{-1} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] W$$

于是得 WarJ - Takahashi恒等式([17]的(22.11)式):

$$\left\{ F_i \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] - J_i D_i \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \bar{M}_{\beta\alpha}^{-1} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} W[J] = 0 \quad (28)$$

对(26)中的积分变数作变换 $\bar{C} \rightarrow \bar{C} + \delta\bar{C}$, 则

$$0 = i\delta\bar{C}_\alpha \langle T(\eta_i + F_{\alpha i} D_i [A] C_\beta) \rangle_0 = i\delta\bar{C}_\alpha \left[\eta_\alpha + \frac{1}{i} F_{\alpha i} \frac{\delta}{\delta K_i} \right] W$$

因此
$$\left(\frac{1}{i} F_{\alpha i} \frac{\delta}{\delta K_i} + \eta_\alpha \right) W[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] = 0 \quad (29)$$

(27)和(29)是进行重正化时要用到的基本关系式。为方便起见我们用顶角函数的母泛函表示它们。为此定义

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] = -i \ln W[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] \quad (30)$$

用Legendre变换定义顶角函数的母泛函 Γ :

$$\Gamma[A, C, \bar{C}, K, L] = Z[J, \eta, \bar{\eta}, K, L] - J_i A_i - \bar{\eta}_\alpha C_\alpha - \bar{C}_\alpha \eta_\alpha, \quad (31)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta J_i} = A_i, \quad \frac{\delta Z}{\delta \eta_\alpha} = -\bar{C}_\alpha, \quad \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}_\alpha} = C_\alpha \quad (32)$$

[严格说 $\frac{\delta Z}{\delta J_i} = \langle A_i \rangle_0$ 。为书写简单起见, 在(31),(32)中我们把真空期望值仍记成 $A_i, C_\alpha, \bar{C}_\alpha$] 这一变换的意义是, 由(32)解出 $J_i = J_i[A, C, \bar{C}, K, L], \eta_\alpha = \eta_\alpha[A, C, \bar{C}, K, L]$ 和 $\bar{\eta}_\alpha = \bar{\eta}_\alpha[A, C, \bar{C}, K, L]$, 利用这一组关系, 消去(31)右边的 $J, \eta, \bar{\eta}$, 把它表示成 A, C, \bar{C}, K, L 的泛函。对(31)微分得

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_i} = -J_i, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta C_\alpha} = \bar{\eta}_\alpha, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}_\alpha} = -\eta_\alpha \quad (33)$$

在Legendre变换下, (27)和(29)变成

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_i} \frac{\delta \Gamma}{\delta k_i} - \frac{\delta \Gamma}{\delta C_\alpha} \frac{\delta \Gamma}{\delta L_i} + F_\alpha[A] \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}_\alpha} = 0 \quad (34)$$

$$F_{\alpha i} \frac{\delta \Gamma}{\delta K_i} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}_\alpha} = 0 \quad (35)$$

令 $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}[A, C, \bar{C}, K, L] = \Gamma[A, C, \bar{C}, K, L] + \frac{1}{2} F_\alpha^2[A]$ (36)

则(34)可以写成

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial A_i} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial K_i} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial C_i} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (37)$$

引入记号 $\tilde{\Gamma} \bullet \tilde{\Gamma} \equiv \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial A} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial K_i} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial C_a} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{C}_a}$ (38)

则Slavnov恒等式可以写成

$$\tilde{\Gamma} \bullet \tilde{\Gamma} = 0 \quad (39)$$

同时(35)可以写成

$$F_{a,i} \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial K_i} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (40)$$

利用(23)——(25)我们可以把(22)写成

$$\frac{\partial S}{\partial K_i} \frac{\partial S}{\partial A} - \frac{\partial S}{\partial L} \frac{\partial S}{\partial C_a} + F_{a,i}[A] \frac{\partial S}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (41)$$

由S的定义, 还有

$$F_{a,i} \frac{\partial S}{\partial K_i} - \frac{\partial S}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (42)$$

定义 $\tilde{S} \equiv S + \frac{1}{2} F_a^2[A]$ (43)

就可以把(41), (42)写成

$$\tilde{S} \bullet \tilde{S} = 0 \quad (44)$$

$$F_{a,i} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial K_i} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (45)$$

(44)和(45)是(39)和(40)的树图近似。

我们强调指出, 只要(44)和(45)成立, 则(39)和(40)必然亦成立, 因为 \tilde{S} 满足(44), (45)则S有(20), (10)的结构(参考I §4中的讨论)。

3. 重正化

按回路数作微扰论展开:

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i \quad \text{其中} \quad \tilde{\Gamma}_0 = \tilde{S} \quad (46)$$

在单回路近似下, 由(39), (40), (44), (45)得

$$\tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_1 \bullet \tilde{S} = 0 \quad (47)$$

$$F_{a,i} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_1}{\partial K_i} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_1}{\partial \bar{C}_a} = 0 \quad (48)$$

其中 $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_{1/finite} + \tilde{\Gamma}_{1div}$, $\tilde{\Gamma}_{1div} \propto \frac{1}{N-4}$ 。 N 是正常化时空维数, 当 $N \rightarrow 4$ 时 $\tilde{\Gamma}_{1div}$ 发散, 但是 $\tilde{\Gamma}_{1/finite}$ 有限由 (47), (48) 得

$$\tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_{1div} + \tilde{\Gamma}_{1div} \bullet \tilde{S} = 0 \tag{49}$$

$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{1div}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{1div}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{50}$$

在 \tilde{S} 中加上抵消项 $-\tilde{\Gamma}_{1div}$, 用

$$\tilde{S}^{(r,1)} = \tilde{S} - \tilde{\Gamma}_{1div} \tag{51}$$

代替 \tilde{S} , 则单回路近似下的 $\tilde{\Gamma} = \tilde{S} + \tilde{\Gamma}_1$ 变成

$$\tilde{\Gamma}^{(r,1)} = \tilde{S}^{(r,1)} + \tilde{\Gamma}_1 = \tilde{S} + \tilde{\Gamma}_{1/finite}$$

(用 $\tilde{S}^{(r,1)}$ 代替 \tilde{S} 时 $\tilde{\Gamma}_1$ 部分不变, 因为 $\tilde{\Gamma}_1$ 中有一个回路, 所以用来构造 $\tilde{\Gamma}_1$ 的 Feynman 规则完全由 $\tilde{S}^{(r,1)}$ 中的 \tilde{S} 决定)。我们可以把 $\tilde{\Gamma}^{(r,1)}$ 写成 $\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}_{1div}$, $\tilde{\Gamma}$ 由 \tilde{S} 生成。它满足 (39), (40)。 $\tilde{\Gamma}_{1div}$ 满足 (49), (50), 所以 $\tilde{\Gamma}^{(r,1)}$ 满足 Slavnov 恒等式

$$\tilde{\Gamma}^{(r,1)} \bullet \tilde{\Gamma}^{(r,1)} = 0 \tag{52}$$

以及
$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{(r,1)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{(r,1)}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{53}$$

由 (51), (44), (45), (49) 和 (50) 还有

$$\tilde{S}^{(r,1)} \bullet \tilde{S}^{(r,1)} = 0 \tag{54}$$

$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{S}^{(r,1)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{S}^{(r,1)}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{55}$$

下面我们用归纳法证明, 任意级的重正化的 $\tilde{\Gamma}^{(r)}$ 满足 Slavnov 恒等式

$$\tilde{\Gamma}^{(r)} \bullet \tilde{\Gamma}^{(r)} = 0 \tag{56}$$

和
$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{(r)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{(r)}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{57}$$

并且 $\tilde{S}^{(r)}$ 满足
$$\tilde{S}^{(r)} \bullet \tilde{S}^{(r)} = 0 \tag{58}$$

$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{S}^{(r)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{S}^{(r)}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{59}$$

假定一, 我们已构造出 n 级近似的 $\tilde{S}^{(\gamma)} = \tilde{S}^{(\gamma, n)}$ 满足(58), (59), 假定二, 由 $\tilde{S}^{(\gamma, n)}$ 生成的 $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_n$ 是有限的, 但是 $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ 是发散的。

根据上一节(45)或后面的讨论, 我们知道由假定一, $\tilde{S}^{(\gamma, n)}$ 生成的 $\tilde{\Gamma}$ 满足(39)和(40); 由于 $\tilde{\Gamma}_{n+1}$ 中所有子图的发散都已消除, $\tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}}$ 来源于总体发散 (over all divergence) 它是 $A.C.C.K.L$ 的次数不超过4的定域多项式。由(39)我们知道, 对于 $n+1$ 级近似

$$\begin{aligned} & \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{div}} \bullet \tilde{S} + \tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}} \\ &= -\tilde{\Gamma}_n \bullet \tilde{\Gamma}_1 - \tilde{\Gamma}_1 \bullet \tilde{\Gamma}_n - \tilde{\Gamma}_{n-1} \bullet \tilde{\Gamma}_2 - \tilde{\Gamma}_2 \bullet \tilde{\Gamma}_{n-1} \dots \dots \\ & - \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{finite}} \bullet \tilde{S} - \tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{finite}} \end{aligned} \tag{60}$$

根据假定二。(60)的右边是有限的, 因此

$$\tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}} \bullet \tilde{S} + \tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{div}} = 0 \tag{61}$$

$\tilde{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\Gamma}_i$ 满足(40), 分离出发散部分就有

$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}}}{\delta \bar{C}_a} = 0 \tag{62}$$

取 $\tilde{S}^{(\gamma, n+1)} = \tilde{S}^{(\gamma, n)} - \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}} \tag{63}$

于是 $\Gamma^{(\gamma, n+1)} = \tilde{S} - \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}} + \tilde{\Gamma}_1 + \dots + \tilde{\Gamma}_n + \tilde{\Gamma}_{n+1}$
 $= \tilde{S} + \tilde{\Gamma}_1 + \dots + \tilde{\Gamma}_n + \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{finite}} = \tilde{S}^{(\gamma, n+1)}$ (64)

$\Gamma^{(\gamma, n+1)}$ 又可以写成 $\Gamma^{(\gamma, n+1)} = \tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}_{n+1 \text{ div}}$, 其中 $\tilde{\Gamma}$ 是由 $\tilde{S}^{(\gamma, n)}$ 生成的, 因此

$$\tilde{\Gamma}^{(\gamma, n+1)} \bullet \tilde{\Gamma}^{(\gamma, n+1)} = \tilde{\Gamma} \bullet \tilde{\Gamma} - \tilde{S} \bullet \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{div}} - \tilde{\Gamma}_{n+1, \text{div}} \bullet \tilde{S}$$

$\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}_{n+1, \text{div}}$ 分别满足(39), (61), 于是

$$\tilde{\Gamma}^{(\gamma, n)} \bullet \tilde{\Gamma}^{(\gamma, n)} = 0. \tag{65}$$

按照上面的假定一

$$\tilde{S}^{(\gamma, n)} \bullet \tilde{S}^{(\gamma, n)} = 0. \tag{66}$$

$$F_{ai} \frac{\delta \tilde{S}^{(\gamma, n)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{S}^{(\gamma, n)}}{\delta \bar{C}_a} = 0. \tag{67}$$

由(63), (61), (62), (66)和(67)就有

$$\widetilde{S}^{(\tau, n+1)} \bullet \widetilde{S}^{(\tau, n+1)} = 0. \tag{68}$$

$$\Gamma_{\alpha i} \frac{\delta \widetilde{S}^{(\tau, n+1)}}{\delta K_i} - \frac{\delta \widetilde{S}^{(\tau, n+1)}}{\delta \overline{C}_\alpha} = 0. \tag{69}$$

(62), (65), (68), (69)说明如果(56)–(59)的 n 级近似成立, 则 $n+1$ 级近似亦成立。(44), (45), (52)–(55)说明 $n=0.1$ 时(56)–(59)成立, 因此对 n 任意均成立。证毕。

4. 重正化作用量; 规范无关性和么正性

$\widetilde{S}^{(\tau)}$ 是 $A_i, C_\alpha, \overline{C}, K_i, L_\alpha$ 的定域多项式, 次数不超过4, 对于玻色子 A_i 是1次的, 对于费米子 A_i 是 $\frac{3}{2}$ 次的, $C_\alpha, \overline{C}_\alpha$ 是一次的, K_i 和 L_α 是2次的。 $\widetilde{S}^{(\tau)}$ 还应当是 $F-P$ 荷中性的, 因为重正化手续不违反 $F-P$ 荷守恒, 所以 $\widetilde{S}^{(\tau)}$ 的一般形式为

$$\widetilde{S}^{(\tau)} = L^{(\tau)}[A, C, \overline{C}] + K_i D_i^\alpha{}^{(\tau)}[A]C_\alpha - \frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} L_\alpha C_\beta C_\gamma \tag{70}$$

由幂计数, $D_i^\alpha{}^{(\tau)}$ 是一次的, $f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)}$ 不依赖于场量, 把(70)代入(59)得

$$F_{\alpha i} D_i^\beta{}^{(\tau)}[A]C_\beta - \frac{\delta L^{(\tau)}[A, C, \overline{C}]}{\delta \overline{C}_\alpha} = 0. \tag{71}$$

所以

$$L^{(\tau)}[A, C, \overline{C}] = \overline{C}_\alpha F_{\alpha i} D_i^\beta{}^{(\tau)}[A]C_\beta + L^{(\tau)}[A]. \tag{72}$$

$L^{(\tau)}[A]$ 中不包含 C , 从而也不包含 \overline{C} , 否则违反 $F-P$ 荷中性的条件。

由(72)
$$\widetilde{S}^{(\tau)} = \widetilde{L}^{(\tau)}[A] + \overline{C}_\alpha F_{\alpha i} D_i^\beta{}^{(\tau)}[A]C_\beta + K_i D_i^\alpha{}^{(\tau)}[A]C_\alpha - \frac{1}{2} L_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} C_\beta C_\gamma \tag{73}$$

把(73)代入(58)得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta L^{(\tau)}[A]}{\delta A_i} + \overline{C}_\alpha F_{\alpha i} \frac{\delta D_i^\beta{}^{(\tau)}}{\delta A_i} C_\beta + K_i \frac{\delta D_i^\alpha{}^{(\tau)}}{\delta A_i} C_\alpha \right) D_i^\lambda{}^{(\tau)} C_\lambda - \\ & - \left(-\overline{C}_\beta F_{\beta i} D_i^\alpha{}^{(\tau)} - K_i D_i^\alpha{}^{(\tau)} + f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} L_\beta C_\gamma \right) \left(-\frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} C_\beta C_\gamma \right) \\ & = K_i \left(\delta D_i^\beta{}^{(\tau)} - \frac{1}{i} D_i^\alpha{}^{(\tau)} f_{\alpha\beta\gamma} \right) C_\beta C_\gamma \\ & + \frac{1}{2} L_\alpha f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} f_{\alpha\beta\gamma}^{(\tau)} C_\beta C_\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{C}_\alpha F_{Li} \left(\frac{\delta D^{(\gamma)}}{\delta A_i} D_i^{1(\gamma)} - \frac{1}{2} D_i^{\sigma(\gamma)} f_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \right) C_\beta C_\gamma \\
 & + \frac{\delta L^{(\gamma)}[A]}{\delta A_i} D_i^{\sigma(\gamma)} C_\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{74}$$

由 K_α, K_i 的任意性就有:

$$f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma)} f_{\beta\gamma\alpha}^{(\gamma)} C_\beta C_\gamma C_\alpha = 0 \tag{75}$$

$$\left(\frac{\delta D_i^{\sigma(\gamma)}}{\delta A_i} D_i^{\beta(\gamma)} - \frac{1}{2} D_i^{\gamma(\gamma)} f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma)} \right) C_\beta C_\gamma = 0 \tag{76}$$

$$\frac{\delta L^{(\gamma)}[A]}{\delta A_i} D_i^{\sigma(\gamma)} C_\sigma = 0 \tag{77}$$

(75) 表示 $f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma)}$ 满足 Jacobi 恒等式 (参考 (21) 后面的计算, 并注意 C_σ 有任意性);

(76) 表示重正化的 $D_i^{\sigma(\gamma)}$ 亦满足对易关系 (8)。这两点说明重正化的 Slavnov 变换构成 Lie 群。由 (77)

$$\frac{\delta L^{(\gamma)}[A]}{\delta A_j} D_j^{\sigma(\gamma)} = 0 \tag{78}$$

说明 $L^{(\gamma)}(A)$ 对于重正化的规范变换是不变的。

下面说明重正化的规范群和原来的一样。为简单起见假定规范群是半单的, 没有阿贝尔不变子群。用 $\frac{1}{\alpha}(S + J_i A_i + \bar{\eta} C_\alpha + \bar{C}_\alpha \eta_\alpha)$ 代替 $S + J_i A_i + \bar{\eta} C_\alpha + \bar{C}_\alpha \eta_\alpha$,

α 是回路数参数。取 $\alpha = 1$ 就回到原来情况, 作上述替换后,

$$f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma)} = f_{\alpha\beta\gamma} + \alpha f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma 1)} + \alpha^2 f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma 2)} + \dots \tag{79}$$

当 α 有小变化时 $f_{\alpha\beta\gamma}^{(\gamma)}$ 亦有小变化。但是结构常数作小变动, 不能使一种半单群变成另一种半单群。因此我们得到结论, 重正化规范群同构于未重正化规范群。由于所有阿贝尔群的结构常数都一样 ($f_{\alpha\beta\gamma} = 0$), 因此上面的讨论不适用于有阿贝尔不变子群的情况。但是可以一般地证明, 即使有阿贝尔不变子群, 上面的结果也是对的⁽²⁰⁾。

上面说明了重正化的顶角母泛函 $\Gamma^{(\gamma)}$ 满足 Slavnov 恒等式, 因此重正化 Green 函数的母泛函 $W^{(\gamma)}[J]$ 满足 Ward-Takahashi 恒等式, 于是外线在质壳上的重正化的 S 矩阵是规范无关的 (证明见 Abers-Lee 讲义 [17] §22 或 [2])。当规范参数取某一特殊值时, S 矩阵是么正的, 因此我们的理论既是规范无关的又是么正的。

Ⅱ 一些新进展

前面叙述的规范场重正化理论,就其严格程度来说和[2—4]的经典工作是相当的,实际上还有一定困难。首先我们采用了轨道积分的形式,而轨道积分可能是不存在的。我们可以放弃轨道积分形式,采用算符形式的场论,但是这会产生新的困难。即使是自由场,两个定域场算符在同一时空点上的乘积也是不存在的,所以严格说,拉氏量就是没有意义的。为了给定域复合场算符以严格的定义,Zimmermann, Lowenstein等人在BPHZ重正化理论的基础上建立了正规乘积算法^(7,8)。用正规乘积算法可以建立规范场重正化的严格理论。Becchi, Rouet和Stora利用正规乘积算法中的作用原理,证明在树图近似下, Γ 满足Slavnov恒等式,而在高次近似下,虽然Slavnov恒等式中有量子修正项(反常项),但是适当调节重正化规范变换和重正化拉氏量,可以使修正项为零,因此 $\Gamma^{(r)}$ 满足Slavnov恒等式,从而得到一个有限的规范无关的么正的理论^(5,9)。

在Becchi et al.的模型中没有零质量粒子,他们绕开了红外发散的问题。近几年来,人们制定了同时消除紫外发散和红外发散的方案⁽¹⁰⁻¹³⁾。他们把零质量的传播子 $i/(k^2 + i\epsilon k^2)$ 用 $[i/(k^2 - (1-s)^2 M^2 + i\epsilon(\bar{k}^2 + (1-s)^2 M^2))]$ 替换掉相当于引入一个假想质量 $(1-S)M$ 。减除之后,令 $S=1$,于是红外发散和紫外发散同时消除。令 $\epsilon \rightarrow 0$,Green函数变成适度分布函数(tempered distribution)。这个理论可以用到规范场中来,证明有零质量粒子时,消除了紫外发散和红外发散后,Slavnov恒等式仍成立⁽¹⁴⁻¹⁶⁾。

在BPHZ理论中,不需要正常化手续,其代价是作用量原理有量子修正项。最近有人证明,在维数重正化理论中(允许有零质量粒子),在相当广泛的条件下,可以得到没有量子修正的作用量原理^(21,22)。因此采用维数重正化的作用量原理,可以建立起比^(10,13)简化,但是在数学上仍然是严格的规范场重正化理论。

参 考 文 献

- [1] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, B33(1971), 173; B35(1971), 167.
- [2] G. 'tHooft & M. Veltman, *Nucl. Phys.*, B50(1972), 318.
- [3] B. W. Lee & J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, D5(1972), 3121, 3137, 3155; D7(1973), 1047.
- [4] B. W. Lee, *Phys. Rev.*, D9(1974), 933.
- [5] C. Becchi, A. Rouet & R. Stora, *Commun. Math. Phys.*, 42(1975), 127.
- [6] J. Zinn-Justin, *Trends in Elementary Particle Theory*, Edited by H. Rollnik & K. Dietz, 1976.
- [7] W. Zimmermann, *Ann. Phys.*, 77(1973), 536, 570.
- [8] J. H. Lowenstein, *Renormalization Theory*, Edited by G. Velo & A. S. Wightman, 1976.
- [9] C. Becchi, A. Rouet & R. Stora, *Ann. Phys.*, 98(1976), 281.
- [10] J. H. Lowenstein & W. Zimmermann, *Nucl. Phys.*, B86(1976), 77.
- [11] J. H. Lowenstein, *Commun. Math. Phys.*, 47(1976), 53.
- [12] J. H. Lowenstein & E. Speer, *Commun. Math. Phys.*, 47(1976), 43.
- [13] T. E. Clark & J. H. Lowenstein, *Nucl. Phys.*, B113(1976) 109.
- [14] J. H. Lowenstein, *Nucl. Phys.*, B96(1975), 189.
- [15] T. E. Clark, *Nucl. Phys.*, B111(1976), 134.
- [16] T. E. Clark & A. Rouet, *Nucl. Phys.*, B110(1976), 380.
- [17] E. S. Abers & B. W. Lee, *Phys. Rep.*, 9C(1973), 1.
- [18] G. 'tHooft & M. Veltman, *Nucl. Phys.*, B44(1972), 189.
- [19] G. 'tHooft & M. Veltman, *Diagrammar*, CERN, 1973, 73-9.
- [20] J. Julve & M. Tonin, *Nuovo Cim.*, 29A(1975), 85.
- [21] P. Breitenlohner & D. Maison, *Commun. Math. Phys.*, 52(1977), 11.
- [22] P. Breitenlohner & D. Maison, *Commun. Math. Phys.*, 52(1977), 55.