

规范场动力学自发破缺

邝宇平

(兰州大学)

一、引言

近十年来,基本粒子相互作用理论的研究有了不少进展。1967年以来发展的弱作用和电磁作用的统一规范理论已在许多方面得到了实验的支持⁽¹⁾⁽²⁾。这种理论解决了以前弱作用理论中存在的不可重整化和违反高能么正性的根本困难⁽³⁾,使弱作用进入了一个新的阶段。1973年又发现非阿贝尔规范理论具有渐近自由的重要性质⁽⁴⁾,它有可能成为近似Bjorken标度性的动力学基础,也就是说层子之间的强相互作用也很可能是由非阿贝尔规范场传递的。由此发展起来的量子色动力学现已愈来愈为人们所重视。目前甚至有人设想是否现阶段一切基本粒子的相互作用都是规范作用,这当然需要进一步探讨。

在普通的规范理论中,定域规范不变性要求规范场质量为零,而在一个实际的基本粒子相互作用理论中,除光子外其它规范场都必须是有质量的,我们知道自发破缺可以使规范场获得质量同时保持理论可重整化及满足高能么正性⁽⁵⁾。有人也反过来证明了,一个可重整化且满足高能么正性的有质量矢量介子理论只能是自发破缺的规范理论(除其中一些与守恒流耦合的 $U(1)$ 规范场可加入质量外)⁽⁶⁾。因此自发破缺是建立基本粒子相互作用规范理论中的一个重要环节。

通常熟悉的自发破缺机制是:在拉氏函数中除所研究的场外再引入一些基本标量场 ϕ ,引入它们的规范不变自作用 $U(\phi)$,在适当选取 $U(\phi)$ 中参量的符号后可使由稳定条件

$$\left. \frac{dU(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi = \langle \phi \rangle} = 0 \quad (1.1)$$

所确定的 $\langle \phi \rangle$ 不为零,造成对称性的自发破缺,一部分 ϕ 的分量成为Goldstone玻色子。根据Higgs机制,取适当规范变换可消除Goldstone玻色子,使相应的规范场获得质量,若再引入 ϕ 场与费米场间的汤川型规范不变相互作用 $G\bar{\psi}\phi\psi$,则还造成费米子质量的破缺。

这种自发破缺机制虽已得到了不少成功的结果,但还有些不很理想的地方。第

一,基本标量场 ϕ 实验上没有发现,它的引入带有很大的任意性。第二,费米子质量的破缺是由汤川型作用 $G\bar{\psi}\phi\psi$ 贡献的, G 是任意参量,因此这种机制引入自由参量较多,对质量谱能得到的定量结论较少。第三,引入 $U(\phi)$ 后要使传递强作用的全部规范场都获得质量,则理论不是渐近自由的⁽⁴⁾。第四,从设想现阶段基本粒子的一切相互作用都是规范作用的观点来看也不希望引入 $G\bar{\psi}\phi\psi$ 和 $U(\phi)$ 这些非规范相互作用。鉴于这些问题,近年来有不少工作探讨新的自发破缺机制。

事实上造成自发破缺的标量场未必一定要是基本场,如果在拉氏函数中不引入基本标量场 ϕ ,则虽然在树图近似下不会有自发破缺,但对一定的模型来说,计及圈图的非微扰贡献后可能存在复合的标量场产生自发破缺,这情况称为动力学自发破缺。早在1961年Nambu和Jona—Lasinio⁽⁶⁾就曾用超导的物量图象来解释基本粒子的质量,在超导理论中,电子形成有相互作用的Cooper对后会造成准粒子能谱中产生一个能隙(相当于准粒子的静止质量)。Nambu和Jona—Lasinio模仿超导的BCS理论,考虑一个四费米场直接作用的零质量理论,求解Dyson方程,得到了费米子质量(能隙)的自洽解。这样就自发地破缺了原来零质量理论所具有的 $e^{i\gamma_5}$ 变换不变性。在这理论中出现的Goldstone玻色子是正、反费米子组成的复合标量场。他们把获得质量的费米子对应于核子,复合Goldstone玻色子对应于 π 介子。这是最早的动力学自发破缺模型,不过这个模型不能重整化,需要做紫外截断,所以所得的质量自洽解与紫外截断参量有关。虽然这个结果本身没有多少实际意义,但这思想很重要。1973年Cornwall—Norton⁽⁷⁾和Jakiw—Johnson⁽⁸⁾将这思想用于讨论规范理论的自发破缺。他们用弱耦合近似分别研究了不同的阿贝尔规范理论模型,指出在耦合常数满足一定条件时动力学自发破缺解是存在的,规范场获得质量,费米子质量产生破缺, S -矩阵元中复合Goldstone玻色子的极点仍可消除,自发破缺的规范理论是可重整化的,所以他们的结果中不再含紫外截断参量,所以质量是有实际意义的。

这种理论的拉氏函数中只有规范相互作用,在取定规范作用耦合常数后,所解得的规范场质量与费米子质量的破缺值之间有确定的关系,这是以前的机制所不能得到的。此外由于未引入 ϕ 和 $U(\phi)$,所以这种自发破缺有可能不破坏渐近自由性质。由此看来,这样的自发破缺机制是很吸引人的。尤其是对许多实际模型来说,动力学自发破缺解本来就是所研究的拉氏函数(不加入任何附加内容)的自然存在的解,所以不能不去考虑它。

动力学自发破缺是Dyson方程的非微扰解,求解是困难的。目前用于研究实际问题的的工作还不多。在第二节,我们主要以Cornwall—Norton模型为例讨论弱耦合近似和线性化近似下的解,这里体现了动力学自发破缺的主要性质,此外我们也简单介绍在同样近似下非阿贝尔理论的解,第三节讨论两个带有普遍性的结论,第四节介绍两个非弱耦合近似的计算方法。第五节讨论非线性效应,第六节介绍动

力学自发破缺用于研究弱-电作用和强作用方面的一些情况，最后第七节讨论目前存在的问题和一些有关的发展方向。

二. 弱耦合近似、线性化近似

1. Cornwall—Norton模型

1) 模型

此模型的拉氏函数如下⁽⁷⁾：

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B - \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + igA_\mu + ig' \tau_2 B_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi \tag{2.1}$$

其中 ψ 代表两个旋量场

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

A_μ 、 B_μ 是两个阿贝尔规范场，

$$F_{\mu\nu}^A \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu}^B \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{2.3}$$

τ_2 是个 2×2 矩阵

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

这个拉氏函数具有如下的两个U(1)定域规范不变性：

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) \tag{2.4}$$

$$\psi \rightarrow e^{-i\tau_2 \beta(x)} \psi, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta(x) \tag{2.5}$$

我们不去考虑(2.4)对称性的自发破缺问题。 A_μ 可以就是个零质量规范场(例如光子)，或者，如所熟知的，用Stueckelberg变换可证明即使在(2.1)中加入 A_μ 场的质量项也不影响可重整性。我们主要讨论(2.5)对称性的动力学自发破缺。

2) 费米子质量破缺

先考虑费米子质量的破缺，由图

1(图中内线表示物理传播子，下同)

知费米子自能满足的Dyson方程为

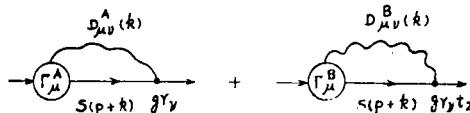


图1 波浪线表示 A_μ 场，锯齿线表示 B_μ 场

$$\Sigma(p) = iy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu^A(k, p, -p, -k) S(p+k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}^A(k) +$$

$$+ ig' \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k) S(p+k) \gamma_\nu \tau_2 D_{\nu}^B(k) \quad (2.6)$$

如果 g, g' 很小, 做弱耦合近似

$$\Gamma_\mu^A \simeq g \gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu^B \simeq g' \gamma_\mu \tau_2 \quad (2.7)$$

则

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & ig^2 \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(p+k) \gamma_\nu D_{\mu\nu}^A(k) + \\ & + ig'^2 \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \tau_2 S(p+k) \gamma_\nu \tau_2 D_{\mu\nu}^B(k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

我们考虑 ϕ_1 和 ϕ_2 的质量分裂, 即讨论满足(2.8)的 $\Sigma(p)$ 中是否能存在

$$\Sigma_\nu(p) = \tau_3 \sigma(p), \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

形式的不对称部分, 将 $\Sigma(p)$ 写成对称部分 $\Sigma_s(p)$ 与(2.9)形式的不对称部分 $\Sigma_\nu(p)$ 之和, 将

$$S(p) = -i [i \hat{p} + m + \Sigma_s(p) + \Sigma_\nu(p)]^{-1} \quad (2.10)$$

代入(2.8), 并分出与 τ_3 有关的部分, 得 $\sigma(p)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned} \sigma(p) = & ig^2 \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\sigma(p+k)}{[i(\hat{p} + \hat{k}) + m + \Sigma_s(p+k)]^2 - \sigma^2(p+k)} \\ & \gamma_\nu \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + \pi^A(k^2)} \\ & - ig'^2 \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\sigma(p+k)}{[i(\hat{p} + \hat{k}) + m + \Sigma_s(p+k)]^2 - \sigma^2(p+k)} \\ & \gamma_\nu \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + \pi^B(k^2)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 $\pi(k^2)$ 与规范场的真空极化张量 $\pi_{\mu\nu}(k)$ 的关系是

$$\pi_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \pi(k^2). \quad (2.12)$$

这里我们采用了 Landau 规范, 后面将看出用此规范的优越性。在弱耦合近似中, 我们略去 Σ_s, π^A 等属于耦合常数高次项的部分。在 π^B 中也只保留其中自发破缺部分 π_ν^B 。(2.11) 与 π_ν^B 的 Dyson 方程联立是一组非线性积分方程, 求解是困难的, 我们下面考虑 p 大时方程的渐近解。由(2.11)可看出在 p 大时右方积分主要由 k 大部分贡献, 后面可知 $\sigma(p+k), \pi_\nu^B(k^2)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时都趋于零, 所以在 p 大时可得到(2.11)的

线性化近似方程

$$\sigma(p) = -i3(g^2 - g'^2) \iint \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\sigma(p+k)}{(p+k)^2 k^2}, \quad p \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

这种方程的解已有人讨论过^[6], 不难证明, 只要

$$0 < g^2 - g'^2 < \frac{4\pi^2}{3} \quad (2.14)$$

则 $\sigma(p)$ 存在自洽解

$$\sigma(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} m_v \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\varepsilon}, \quad (2.15a)$$

其中 ε 是 g, g' 的函数, 在 g, g' 为小量时

$$\varepsilon \sim \frac{3(g^2 - g'^2)}{16\pi^2}, \quad (2.15b)$$

m_0 是个质量尺度 (可取为对称质量 m), m_v 是个比例常数, 标志 $\sigma(p)$ 的大小, 在线性化近似 (2.13) 的讨论中, m_v 是不能确定的, 以后考虑到非线性效应时可以确定其值。

前面我们已假定 g, g' 都是小量。这时由 (2.14) 知只要 $g^2 > g'^2$, Dyson 方程就有非零的 $\Sigma_v(p)$ 解 (这里我们看到了在此模型中考虑 (2.4) 定域规范不变性的必要性)。由 (2.15) 看出, 在保证 $g^2 > g'^2$ 的情况下, 取 g, g' 趋于零 $\Sigma_v(p)$ 仍有非零解。这明显体现出 $\Sigma_v(p)$ 是个非微扰解, 即使相互作用很弱, 也可以有不弱的动力学自发破缺。在 g, g' 很小时 ε 亦很小, 所以 $\sigma(p)$ 是 p^2 的缓变函数, 近似为 m_v , 于是 ϕ_1 和 ϕ_2 的质量近似为

$$m_1 \simeq m + m_v, \quad m_2 \simeq m - m_v \quad (2.16)$$

3) 复合 Goldstone 玻色子

下面讨论费米子质量产生动力学自发破缺所对应的物理图象。我们知道 (2.5) 的规范不变性决定 $\Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k)$ 与 $S(p)$ 满足如下的 Ward - Takahashi 恒等式 (以下简称 $W - T$ 恒等式):

$$k_\mu \Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k) = g' [S^{-1}(p) \tau_2 - \tau_2 S^{-1}(p+k)] \quad (2.17)$$

将 (2.10) 代入, 并取 $k \rightarrow 0$ 得

$$k_\mu \Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k) |_{k=0} = 2g' \tau_1 \sigma(p) \neq 0 \quad (2.18)$$

其中

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这说明有费米子质量破缺时 $\Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k)$ 在 $k=0$ 点有极点, 满足(2.18)的 Γ_μ^B 一般可写成

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k) &= \Gamma_{\mu(reg)}^B(k, p, -p, -k) \\ &+ \Gamma_{\mu(pole)}^B(k, p, -p, -k) \\ \Gamma_{\mu(pole)}^B(k, p, -p, -k) &\equiv \frac{k_\mu}{k^2} \Gamma^B(k, p, -p, -k) \end{aligned} \quad (2.19a)$$

其中 $\Gamma_{\mu(reg)}^B$ 是在 $k=0$ 点正则的部分, $\Gamma^B(k, p, -p, -k)$ 满足

$$\Gamma^B(k, p, -p, -k)|_{k=0} = 2g' \tau_1 \sigma(p) \quad (2.19b)$$

由于 Γ_μ^B 是一粒子不可约顶角, 所以(2.19a)中的极点只能是一个零质量的复合粒子贡献的。 $\frac{1}{k^2}$ 相当于一个零质量标量粒子的传播子。因此 $\Gamma_{\mu(pole)}^B$ 相当于图2的贡献, 其中虚线是一个零质量的复合标量粒子, 这就是自发破缺产生的复合 Goldstone 玻色子。这里我们看到, 动力学自发破缺的产生意味着正、反费米子形成了零质量的“对”(复合 Goldstone 玻色子, 和超导态的情形相似。)

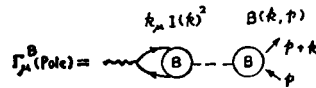


图2 虚线表示复合Goldstone玻色子

将图2具体写出得

$$\Gamma_{\mu(pole)}^B(k, p, -p, -k) = \frac{k_\mu}{k^2} I(k^2) B(k, p) \quad (2.20a)$$

其中 $B(k, p)$ 是复合 Goldstone 玻色子与费米子的顶角,

$$k_\mu I(k^2) \equiv -iT\tau \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g\gamma_\mu S(q) B(-k, q) S(q+k) \quad (2.20b)$$

将(2.20a)与(2.19a)相比知

$$\Gamma^B(k, p, -p, -k) = I(k^2) B(k, p) \quad (2.21)$$

取 $k=0$, 并用(2.19b)得

$$B(p) \equiv B(0, p) = 2g' I^{-1}(0) \tau_1 \sigma(p) \quad (2.22)$$

1) 注意 Γ_μ^B 中的动量以向内为正

故 $B(p)$ 与 $\sigma(p)$ 成正比, 用 $\sigma(p)$ 与用 $B(p)$ 来标志动力学自发破缺是等价的, 将(2.22)代入(2.13)得到 $B(p)$ 满足的方程

$$B(p) = -i3(g^2 - g'^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{B(p+k)}{(p+k)^2 k^2}, \quad p \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

这实际上就是图3所表示的在梯形近似下 p 大时 $B(p)$ 所满足的 Bethe-Salpeter方程。所以(2.13)有非零 $\sigma(p)$ 解的条件(2.14)就是(2.23)有非零 $B(p)$ 解的条件, 也就是复合Goldstone玻色子形成的条件。 $g^2 > g'^2$ 意味着必须有一个耦合强些的 A_μ 场贡献足够的吸引力使正、反费米子形成零质量的“对”。这个 A_μ 场的作用与超导理论中声子的作用相当。

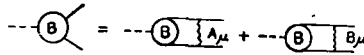


图 3

现在可以看清楚我们为什么要用 Landau 规范。由于 Γ_μ^B 中含有极点部分 $\Gamma_{\mu(Pole)}^B$, 所以即便在 g, g' 小时(2.7)的近似也未必是合理的, 不过由(2.19a)知 $\Gamma_{\mu(Pole)}^B$ 正比于 k , 所以如果取 Landau 规范($D_{\mu\nu}^B$ 正比于 $(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})$)则 $\Gamma_{\mu(Pole)}^B$ 对(2.6)无贡献, (2.6)中的 Γ_μ^B 可代成 $\Gamma_{\mu(reg)}^B$, 因此在 Landau 规范中(2.7)近似实际上相当于 $\Gamma_{\mu(reg)}^B \simeq g' \gamma_\mu \tau_2$, 这是合理的, 所以在研究动力学自发破缺时我们一律用 Landau 规范。

4) 规范场质量

不难看出, 复合Goldstone玻色子的形成必使规范场 B_μ 获得质量(相当于超导理论中的Meissner效应), 规范场的物理传播子为

$$D_\mu(k) = \frac{-i(\delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2)}{k^2 + \pi(k^2)} \quad (2.24)$$

在普通无自发破缺的理论中, $\pi(k^2)$ 至少含 k^2 , 所以 $k^2 = 0$ 是 $D_{\mu\nu}(k)$ 的极点, 即规范场质量为零。如果有某种机制能使 $\pi(k^2)$ 中出现一个破缺部分 $\pi_v(k^2)$, $\pi_v(0) \neq 0$, 则 $k^2 = 0$ 不再是 $D_{\mu\nu}(k)$ 的极点, 即规范场有非零质量。由(2.12)看出 $\pi_v(0) \neq 0$ 意味着 $\pi_{\mu\nu}(k)$ 在 $k^2 = 0$ 有极点。现在, 只要有图2中的复合Goldstone玻色子形成, 就必存在图



图 4

4 的真空极化图, 它贡献 $\pi_{\mu\nu}^B(k)$ 在 $k^2 = 0$ 的极点, 造成 B_μ 场有非零质量。

下面我们在弱耦合近似下计算 B_μ 场的质量 M_B , 在 $0 \leq k^2 \leq M_B^2$ 范围 $\pi_\nu^B(k^2)$ 的变化应是比较缓慢的, 我们可认为

$$M_B^2 \simeq \pi_\nu^B(0) \tag{2.25}$$

在(2.12)中 $\pi_{\mu\nu}^B(k)$ 含 $k^2=0$ 极点的是第二项, 即

$$\pi_{\mu\nu}^B(\text{pole})(k) = - \frac{k_\nu k_\mu}{k^2} \pi_\nu^B(k^2) \tag{2.26}$$

这个 $\pi_{\mu\nu}^B(\text{pole})$ 可由图4来算出。于是取 $\mu = \nu$ 对 μ 求和并取 $k^2=0$ 就得到

$$M_B^2 = \pi_\nu^B(0) = -\pi_{\mu\mu}^B(\text{pole})(k)|_{k^2=0} \tag{2.27}$$

现在计算 $\pi_{\mu\nu}^B(\text{pole})$ 。根据图4和图2得

$$M_B^2 = -\pi_{\mu\mu}^B(\text{pole})(k)|_{k^2=0} = \lim_{k^2 \rightarrow 0} ig' \frac{k_\nu}{k^2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \tau_2 S(p) \Gamma^B(k, p, -p, -k) S(p+k) \tag{2.28}$$

利用(2.19a)和(2.17), 并做弱耦合近似 $\Gamma_{\mu}^B(\text{reg}) \simeq g' \gamma_\mu \tau_2$

得

$$\begin{aligned} M_B^2 &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} ig'^2 \frac{k_\nu}{k^2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \tau_2 S(p) [\mathcal{S}^{-1}(p) \tau_2 \\ &\quad - \tau_2 \mathcal{S}^{-1}(p+k) - k_\mu \gamma_\mu \tau_2] S(p+k) \\ &= \lim_{k^2 \rightarrow 0} \{ ig'^2 \frac{k_\nu k_\nu}{k^2} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\gamma_\mu \partial_\mu S(p) - \\ &\quad \gamma_\mu \tau_2 S(p) \gamma_\mu \tau_2 S(p)] + \dots \} \end{aligned}$$

不难看出, 只有 $\mu = \nu$ 的项矩阵迹不为零。同理后面未写出的项是 $o(k^2)$, 于是

$$\begin{aligned} M_B^2 &= - \frac{ig'^2}{4} \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\gamma_\mu S(p) \partial_\mu S^{-1}(p) S(p) \\ &\quad + \gamma_\mu \tau_2 S(p) \gamma_\mu \tau_2 S(p)] \tag{2.29} \end{aligned}$$

将(2.10), (2.9)和(2.15)代入, 取尺度参量 m_0 为 m , 只保留耦合常数的最低次项(注意 Σ_s 属于 $O(g^2, g'^2)$ 故略去), 得到

$$M_B^2 = \frac{2g'^2}{3(g^2 - g'^2)} (m_1 - m_2)^2 \tag{2.30}$$

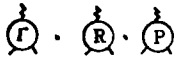
在取定 g, g' 后(2.30)给出了规范场质量与费米子质量破缺值之间的确定关系, 这

是以前引入基本标量场 ϕ 的自发破缺理论所不能得到的。(2.30)中的 M_B^2 属于耦合常数的零次项,故当保持 g'/g 有限取 g, g' 趋于零时 M_B^2 为有限值。所以即使相互作用很弱,动力学自发破缺亦给出不小的规范场质量。

5) 复合Goldstone玻色子极点的消除

现在我们要说明在动力学自发破缺的规范理论中,与以前的自发破缺机制类似,复合Goldstone玻色子不会作为真实物理粒子出现。也就是说,虽然在一些费曼图中(如图2、图4)有复合Goldstone极点的贡献,但对任何实际物理过程来说,计及全部有关费曼图后, S -矩阵元中的复合Goldstone玻色子极点必完全消去。

我们以一对正、反费米子散射过程为例来说明,为了方便下面用

 分别代表 $\Gamma_\mu^B, \Gamma_\mu^{(reg)}$ 和 $\Gamma_\mu^{(pole)}$,这时与复合Goldstone

玻色子极点有关的费曼图有

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \tag{2.31}$$

现在四条外线都在质壳上。由规范不变性知


$$k_\mu \Gamma_\mu^B(k, p, -p, -k) |_{\text{质壳}} = 0 \tag{2.32}$$

故(2.31)中的 B_μ 场内线中有贡献的部分只是

$$\text{Diagram 3} = \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{k^2 + \pi_\nu^2(k^2)} \tag{2.33}$$

根据(2.19a)

$$\text{Diagram 4} = \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \tag{2.34}$$

我们知道  正比于 k_μ ,所以由(2.32)知

$$0 = \text{Diagram 9} = \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11}$$

即

$$\textcircled{R} \text{---} \textcircled{P} = - \textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} \quad (2.35a)$$

同理

$$\textcircled{P} \text{---} \textcircled{R} = - \textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} \quad (2.35b)$$

将(2.35)代入(2.34)得

$$\textcircled{R} \text{---} \textcircled{R} = \textcircled{R} \text{---} \textcircled{R} - \textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} \quad (2.36)$$

于是(2.31)化成

$$\textcircled{R} \text{---} \textcircled{R} - \textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} + \textcircled{B} \text{---} \textcircled{B} \quad (2.37)$$

这里与复合Goldstone玻色子极点有关的就是后两个图。在 $k=0$ 极点附近最后一个图的贡献是

$$\textcircled{B} \text{---} \textcircled{B} = i \frac{B(p)B(p')}{k^2} \quad (2.38)$$

根据(2.20), 在 $k=0$ 极点附近第二个图的贡献是

$$\textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} = \frac{-k_\mu}{k^2} I(o) B(p) \frac{-i\delta_{\mu\nu}}{\pi_\nu^B(o)} \frac{k_\nu}{k^2} I(o) B(p') \quad (2.39)$$

又由图4(2.27)和(2.20)立刻可知

$$M_B^2 = \pi_\nu^B(o) = I^2(o) \quad (2.40)$$

代入(2.39)得

$$\textcircled{P} \text{---} \textcircled{P} = i \frac{B(p)B(p')}{k^2} \quad (2.41)$$

这和(2.38)的结果一样, 所以在 $k=0$ 附近(2.37)的后二项刚好相消, 故(2.37)中不出现复合Goldstone玻色子极点。

6) 结论

总结上面的讨论, 我们可以得到以下几点结论:

i, 对一些规范理论模型来说, 不引入基本标量场 ϕ 也可以动力学地产生自发破缺。

ii, 动力学自发破缺的产生意味着正、反费米子形成复合标量场。复合 Goldstone 玻色子极点在 S -矩阵元中不出现。

iii, 动力学自发破缺是个非微扰效应, 即便相互作用很弱也可以产生不弱的自发破缺。

iv, 在动力学自发破缺理论中, 取定规范作用常数后, 规范场的质量与费米子质量破缺值有确定关系。

2 非阿贝尔理论

设规范群 G 为一 N 价单纯李群, 旋量场 ϕ 属于 G 的表示 $\{R\}$ 。设生成元在表示 $\{R\}$ 中的矩阵为 $t_i, i=1, 2, \dots, N$, 满足对易关系

$$[t_i, t_j] = iC_{ijk}t_k, \tag{2.42}$$

C_{ijk} 是结构常数, 则拉氏函数

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + igt_i B_\mu^i)\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.43}$$

对定域规范变换

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow (I - it_i\theta_i(x))\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} (I + i(\gamma_4 t_i \gamma_4)\theta_i(x)) \\ B_\mu^i &\rightarrow (\delta_{ik} + C_{ijk}\theta_j(x)) B_\mu^k + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta_i(x) \end{aligned} \tag{2.44}$$

是不变的。式中 g 是耦合常数, B_μ^i 是规范场,

$$F_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i - gC_{ijk}B_\mu^j B_\nu^k \tag{2.45}$$

在量子化时还需要考虑规范固定项

$$L_D = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu B_\mu^i)^2 \tag{2.46}$$

和规范补偿项

$$L_{F.B.} = \bar{\psi}_i \square \psi_i + gC_{ijk}\bar{\psi}_i(\partial_\mu B_\mu^k + B_\mu^k\partial_\mu)\psi_j \tag{2.47}$$

其中 α 是规范参量 ($\alpha \rightarrow 0$ 为 Landau 规范), ψ_i 是 Faddeev-Popov 鬼场。我们讨论这个模型的动力学自发破缺。

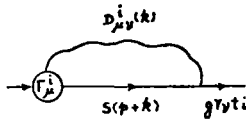


图 5

先考虑费米子质量的破缺。如前面说明的, 在 Landau 规范中图 5 所示的费米子自能的 Dyson 方程可写成

$$\Sigma(p) = ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu}^i(\text{reg})(k, p, -p, -k) S(p + k) \gamma_{\nu} t_i D_{\mu\nu}^i(k) \tag{2.48}$$

设 $T^{(r)}$ 为一个 r 秩无迹对称不可约张量算符 ($r = 1$ 是伴随表示), 我们考查 $\Sigma(p)$ 中是否能存在

$$\Sigma_{\nu}(P) = T^{(r)} \sigma(p) \tag{2.49}$$

形式的破缺部分, 和前面做法类似, 对(2.48)做弱耦合近似

$$\Gamma_{\mu}^i(\text{reg}) \simeq g \gamma_{\mu} t_i \tag{2.50}$$

则 p 大时, $\sigma(p)$ 的线性化近似方程为

$$\sigma(p) = -i3g^2 A^{(r)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\sigma(p+k)}{(p+k)^2 k^2}, \quad p \rightarrow \infty \tag{2.51}$$

其中 $A^{(r)}$ 的定义是

$$t_i T^{(r)} t_i \equiv A^{(r)} T^{(r)} \tag{2.52}$$

式中对 i 求和对 r 不求和, 将(2.51)与(2.13)相比知相应于(2.14)的解的存在条件为

$$0 < g^2 A^{(r)} < \frac{4\pi^2}{3} \tag{2.53}$$

如果 g^2 很小则(2.53)实际为

$$A^{(r)} > 0 \tag{2.54}$$

当(2.54)满足时 $\sigma(p)$ 的解为

$$\sigma(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} m_{\nu} \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\omega}, \quad \omega = \frac{3g^2 A^{(r)}}{16\pi^2} \tag{2.55}$$

下面讨论条件(2.54), 以 $SU(n)$ 群为例⁽¹⁰⁾

$$A^{(r)} = C_2(R) - \frac{r}{2} \left(\frac{N+r-2}{N-1} \right) C_2(A) \tag{2.56}$$

其中 $C_2(R)$ 和 $C_2(A)$ 分别是表示 $\{R\}$ 和伴随表示中 Casimir 算子的值, 由(2.56)看出 r 增大则 $A^{(r)}$ 减小不利于(2.54)的满足, 对 $SU(3)$ 群来说, 若取 $\{R\} = \{A\} = \{8\}$, $r = 1$ (8重破缺), 则得到 $A^{(r)} > 0$, 有动力学自发破缺解, 若取 $r = 2$ (27重破缺) 则得到 $A^{(r)} < 0$, 对任意 $SU(n)$ 来说, 取 $\{R\} = \{A\}$, $r = 2$ 时都得到 $A^{(r)} < 0$, 如果 $\{R\}$ 取为基本表示, 则对任意 $SU(n)$ 无论 r 取为几都得到 $A^{(r)} < 0$ 。这些情况无动力学自发破缺的存在。

与阿贝尔理论类似, 也可以通过 $W - T$ 恒等式说明在有 $\sigma(p) \neq 0$ 的解时有复合 Goldstone 玻色子形成。非阿贝尔规范理论的 $W - T$ 恒等式比较复杂^{(11) (12)}, 这里不详细给出。我们只介绍一些结论, 当费米子质量有破缺时, 有正、反费米子形成的复合 Goldstone 玻色子, 若规范场质量有整体对称破缺, 则复合 Goldstone 玻

色子亦可由规范场组成,各种可能情况如图6所示*。可以证明如果在这 N 阶的规范群 G 中有一个 M 阶的不破缺子群 G_s , 则复合 Goldstone 玻色子的重数是 $N - M$ [14,15]。这时获得质量的规范场数目也是 $N - M$, 在实际物理过程的 S -矩阵元中复合 Goldstone 玻色子极点不出现 [11]。

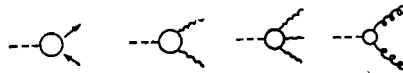


图6 波浪线表示 B_μ^i 场, 螺旋线表示鬼场

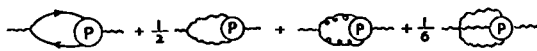


图7 P表示物理顶角中的极点部分

规范场质量的计算可以象前面的阿贝尔理论那样来进行, 不过现在有贡献的图多了(见图7)。我们仅举纯 Yang-Mills 场为例来说明一下图7中后三项贡献, 图7中第二、三项属于 $O(g^2)$, 第四项属于 $O(g^4)$, 因此在只保留 $O(g^2)$ 的情况下只要计算第二、三项, 与前面计算方法类似, 利用 $W - T$ 恒等式可求得图7中第二项对规范场质量的贡献为

$$M_i^2 = -i \frac{3g^2}{4} C_{ijl} C_{ijl} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{q^2 [\pi_\nu^j(q^2) - \pi_\nu^l(q^2)]^2}{[q^2 + \pi_\nu^j(q^2)]^2 [q^2 + \pi_\nu^l(q^2)]^2} \quad (2.57)$$

右方的积分在将 $\pi^2(q^2)$ 代成常数时亦不发散。所以可做极点近似

$$\pi_\nu^i(q^2) \simeq M_i^2 \quad (2.58)$$

这样求得

$$M_i^2 = \frac{3g^2}{64\pi^2} C_{ijl} C_{ijl} \left[M_j^2 + M_l^2 - \frac{2M_j^2 M_l^2}{M_j^2 - M_l^2} \ln \frac{M_j^2}{M_l^2} \right] \quad (2.59)$$

对图7中第三项也可求得类似结果。不过鬼场是补偿规范效应的, 它的质量为零 [18], 所以最后对规范场质量是无贡献的。(2.59)就是在弱耦合近似和极点近似

下纯 Yang-Mills 场质量的公式。以 $SU(2)$ 为例, 如果要求 $B_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_\mu^1 - iB_\mu^2)$

和 $B_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (B_\mu^1 + iB_\mu^2)$ 的质量相同, 为 M , 则 B_μ^3 的质量为零。于是(2.59)为

* 所有规范场质量都相同时也可有下一级效应的极点 ($k \neq 0, k^2 = 0$ 是极点) [18]

$$M^2 = \frac{3g^2}{64\pi^2} C_2(A)M^2$$

由此知要有 $M^2 \neq 0$ 的解必须

$$\frac{3g^2}{64\pi^2} C_2(A) = 1 \tag{2.60}$$

这是一个 g^2 要满足的本征值条件, 对其他群亦有此关系^[16], 当然现在所做的近似是很粗的, 对这具体公式不能太认真看待, 不过这反映出纯 Yang-Mills 场这类动力学自发破缺问题和前面的阿贝尔模型情况的一个重要差别, 在前面的阿贝尔模型中耦合常数没有满足本征值条件的要求。

三、一般性质

1. 两类模型

在上节我们通过两个模型的近似计算结果看到动力学自发破缺有两种不同类型, 一类是Dyson方程的积分主要由紫外部分贡献的(例如公式(2.13), 我们称之为A类模型。这类模型耦合常数可取连续值。另一类是Dyson方程的积分主要由非紫外部分贡献的(例如方程(2.57), 我们称之为B类模型。这类模型只有在耦合常数满足一定的本征值条件时才有非零动力学自发破缺解。本征值条件从理论上给出一个对耦合常数数值的要求, 这当然是很有意思的。在一般积分方程中本征值条件是常见的。例如Fredholm型线性齐次积分方程(核平方可积)就有本征值条件。前面讨论的方程(2.13)的核是非平方可积的, 不是Fredholm型方程, 它没有本征值条件。不过(2.13)是(2.11)的线性化近似方程, 因此可以怀疑A类模型无本征值条件的性质会不会是由线性化近似带来的? 原来的非线性方程组会不会要求有本征值条件?

Englert-Frere-Nicoletopoulos^[17] 研究了这问题。他们讨论如下的模型:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B - \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + ig_V A_\mu + ig_A \gamma_5 B_\mu) \psi \tag{3.1}$$

$$F_{\mu\nu}^A \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad F_{\mu\nu}^B \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

此拉氏函数对定域规范变换

$$\psi \rightarrow e^{-i(\alpha(x) + \gamma_5 \beta(x))} \psi$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g_V} \partial_\mu \alpha(x) \tag{3.2}$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{g_A} \partial_\mu \beta(x)$$

保持不变。动力学自发破缺可以使费米子和 B_μ 场获得质量。设 B_μ 场获得的质量

为 M , 若对 $\pi^{A,B}(k^2)$ 做极点近似

$$\pi_v^A(k^2) \simeq 0, \quad \pi_v^B(k^2) \simeq M^2 \quad (3.3)$$

则在弱耦合近似下 $\Sigma_v(p)$ 和 M^2 的 Dyson 方程为:

当 $g_v^2 > g_A^2$,

$$\Sigma_v(p) = -3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_v(p+k)}{(p+k)^2 + \Sigma_v^2(p+k)} \left[\frac{g_v^2}{k^2} - \frac{g_A^2}{k^2 + M^2} \right] \quad (3.4a)$$

$$M^2 = -8ig_A^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_v^2(k)}{[k^2 + \Sigma_v^2(k)]^2} \quad (3.4b)$$

当 $g_v^2 = g_A^2 = g^2$,

$$\Sigma_v(p) = -3ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M^2 \Sigma_v(p+k)}{[(p+k)^2 + \Sigma_v^2(p+k)]k^2[k^2 + M^2]} \quad (3.5a)$$

$$M^2 = -8ig^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_v^2(k)}{[k^2 + \Sigma_v^2(k)]^2} \quad (3.5b)$$

(3.4) 属于 A 类模型在 p 大时 (3.4a) 右方主要由紫外部分贡献, 故可化为线性化近似方程

$$\Sigma_v(p) = -3i(g_v^2 - g_A^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Sigma_v(p+k)}{(p+k)^2 k^2}, \quad p \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

这与 (2.13) 一样, 在

$$0 < g_v^2 - g_A^2 < \frac{4\pi^2}{3} \quad (3.7)$$

时有非零解

$$\Sigma_v(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} m_v \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{3(g_v^2 - g_A^2)}{16\pi^2} \quad (3.8)$$

无本征值条件, Englert 等^[17] 用电子计算机计算了 (3.4) 这组非线性联立积分方程组的解, 他们在 $0 \leq \epsilon \leq \frac{1}{2}$ 的范围内得到一系列渐近形式为 (3.8) 的解, 都能光滑地连接到 $\Sigma_v(0) = m_v$, 所以说明非线性方程组 (3.4) 也是没有本征值条件的, 这说明 A 类模型无本征值条件的性质是实质性的, 不是由线性近似造成的。

(3.5) 属于 B 类模型, 当将 (3.5a) 右方分母中的 $\Sigma_v^2(p+k)$ 近似代成 $\Sigma_v^2(0) = m_v^2$ 时, (3.5a) 成为一个核平方可积的 Fredholm 型方程, 它有本征值条件, Englert 等^[17] 也用电子计算机直接计算了 (3.5) 的解, 得到的本征值为

$$\frac{g^2}{4\pi} = 5.61 \quad (3.9a)$$

对应的 $\frac{\Sigma_v(0)}{M}$ 为

$$\frac{\Sigma_v(0)}{M} = 0.88 \quad (3.9b)$$

这 g^2 是大的, 已超出了弱耦合近似的适用范围, 所以对此定量结果不能认真。

总之动力学自发破缺有两个类型, A类模型无本征值条件, B类模型有本征值条件。

2. 基态能量

在第二章中我们说明了在一定条件下Dyson方程存在动力学自发破缺解, 但是无自发破缺的对称解 ($m_v = 0, M_i = 0$) 显然也是Dyson方程的自洽解。因此前面的讨论只说明了动力学自发破缺解存在的可能性, 并未说明它存在的必然性。正如在引入基本标量场的自发破缺机制中遇到的情况那样, $\langle \phi \rangle_0 \neq 0$ 和 $\langle \phi \rangle_0 = 0$ 都是方程(1.1)的解, 要说明哪个解是物理上实际出现的, 就要说明哪个解对应的基态是能量最低的稳定态, 所以我们需要讨论动力学自发破缺后的基态能量。

我们知道有效势的意义是基态能量密度^[14]。所以我们需要讨论的是有自发破缺时的有效势 $V_{\text{破缺}}$ 与无自发破缺时的有效势 $V_{\text{对称}}$ 之差

$$\Omega \equiv V_{\text{破缺}} - V_{\text{对称}} \quad (3.10)$$

现在暂不讨论 Ω 的计算方法。这里介绍Cornwall—Norton^[7]证明的一个重要定理。

〔定理〕在动力学自发破缺的规范理论中, 如果 Ω 中含的破缺参量 δm 可取包括 $\delta m = 0$ 在内的连续值, 则 $\Omega = 0$,

这里的 δm 是标志动力学自发破缺大小的参量, 例如Cornwall—Norton模型中的 m_v , 纯Yang—Mills场模型中的 M_i 等。定理的证明是很简单的。设有破缺参量 δm 的基态为 $|\phi\rangle$ 。满足归一化条件

$$\langle \phi | \phi \rangle = 1 \quad (3.11)$$

设系统的哈密顿量为 H , 则 $|\phi\rangle$ 是 H 的本征态

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle \quad (3.12)$$

如果一个理论中 δm 可取上述连续值, 则可将 E 在 $\delta m = 0$ 附近任一点对 δm 取微商。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial(\delta m)} &= \frac{\partial}{\partial(\delta m)} \langle \phi | H | \phi \rangle \\ &= \frac{\partial \langle \phi |}{\partial(\delta m)} E | \phi \rangle + \langle \phi | \frac{\partial H}{\partial(\delta m)} | \phi \rangle + \end{aligned}$$

$$+\langle\phi|E\frac{\partial|\phi\rangle}{\partial(\delta m)}\quad (3.13)$$

又由(3.11)知

$$\frac{\partial\langle\phi|}{\partial(\delta m)}|\phi\rangle+\langle\phi|\frac{\partial|\phi\rangle}{\partial(\delta m)}=0$$

代入(3.13)得

$$\frac{\partial E}{\partial(\delta m)}=\langle\phi|\frac{\partial H}{\partial(\delta m)}|\phi\rangle\quad (3.14)$$

不含基本标量场的规范理论的动力学自发破缺是树图中不包含的现象,所以 H 中不会含 δm ,因此(3.14)右方为零,即 E 与 δm 无关,这样 $\delta m \neq 0$ (有破缺)和 $\delta m = 0$ (无破缺)的基态能量是一样的,所以 $\Omega = 0$

注意对引入基本标量场的自发破缺理论来说此定理不成立,因为引入基本标量场 ϕ 则 H 中含 ϕ ,此时标志自发破缺大小的参量 δm 是 $\langle\phi\rangle_0$,而

$$\phi = \langle\phi\rangle_0 + \bar{\phi},\quad (3.15)$$

$\bar{\phi}$ 具有 $\langle\bar{\phi}\rangle_0 = 0$ 的性质,量子化后它含的是普通二次量子化的产生,消灭算符,因此在计算矩阵元(3.14)时应当用(3.15)代入,所以这时 H 中是隐含 $\langle\phi\rangle_0$ 的,因而(3.14)不为零, E 与 $\langle\phi\rangle_0$ 有关。Coleman—Weinberg^[18]理论就属于这种情况。

这个定理的结论是很重要的,例如对一个零质量规范理论来说,由于理论中不含质量量纲的参量,故动力学自发破缺产生的 δm 必可包括 $\delta m = 0$ 的接续值,因此这类模型必有 $\Omega = 0$,即不能保证动力学自发破缺一定发生或一定不发生。对有质量的规范理论来说,理论中有质量参量 m ,因此最后解得的 δm 必由 m 表示出,取确定数值(参看第五节公式(5.27)),所以不合乎定理的条件,会有 $\Omega \neq 0$,这时可以明确判定动力学自发破缺一定发生或一定不发生。由此看来对动力学自发破缺来说,在零质量规范理论中还是需要考虑其他物理内容引入有质量量纲的参量的。Mannheim^[19]曾提出一种“靴带”理论,即在路径积分量子化的表达式中引入一个 $J(x)\bar{\phi}(x)\phi(x)$ 项在最后的結果中不取外源 $J(x)$ 为零而将它取为破缺参量 δm ,求 δm 的自洽解,这实际上相当于在拉氏函数中引入了破缺参量,因而使 $\Omega \neq 0$,不过这种做法是有缺点的,因为不取外源为零将破坏有效势的规范无关性^[20]。

第二节中讨论的Cornwall—Norton模型是有质量的规范理论,会有 $\Omega \neq 0$,不过在线性近似的結果中 δm (即 m_v)的数值是确定不出的,仍可取任意连续值。所以用线性化近似的結果来计算必得 $\Omega = 0$,这问题必须在考虑非线性效应后解决,我们将在第五节讨论此问题。

四、非弱耦合近似的计算

上面我们用弱耦合近似讨论了Dyson方程的动力学自发破缺解。这种计算只能用于研究弱作用和电磁强作用。要研究强作用,还必须寻求非弱耦合近似的方法。

下面介绍两种方法。

1. $\frac{1}{N}$ 展开

Cross和Neveu⁽²¹⁾讨论了一些二维的可重整化的模型，其中费米场 ψ 有 N 个分量，计算按 $\frac{1}{N}$ 展开，因而在耦合常数大时亦适用，下面我们仅就其中一个最简单的模型说明此方法的精神。

1) 模型和辅助场方法

设 ψ 为二维时空中一个具有 N 个分量的费米场。考虑如下的拉氏函数：

$$L = -\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \tag{4.1}$$

它具有

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi \tag{4.2}$$

的不变性，现在 g 是无量纲的，这模型是可重整化的，且可证明是渐近自由的⁽²¹⁾，(4.1)中包含了复合标量算符 $\bar{\psi} \psi$ ，自发破缺后它可有非零真空期待值，所以和引入基本标量场的理论⁽¹⁸⁾类似，这个 L 中隐含破缺参量，因而能够得到 $\Omega \neq 0$ 的结果。

前面我们是直接求解Dyson方程来研究动力学自发破缺的。现在介绍Cross—Neveu所用的另一种方法，即引入辅助标量场的方法。这种方法使整个求解过程类似于通常引入基本标量场 ϕ 的自发破缺理论，在用路径积分量子化时需要考虑

$$Z(I, \bar{I}) = \text{const.} \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \{ i [-\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 + \bar{I} \psi + \bar{\psi} I] \} \tag{4.3}$$

其中 I, \bar{I} 是外源，我们可在(4.3)中插入一个常数因子

$$\int [d\sigma] \exp \left\{ \frac{-i}{2} (\sigma - g\bar{\psi}\psi)^2 \right\} \tag{4.4}$$

其中 $\sigma(x)$ 是引入的辅助标量场，这样(4.3)可变成

$$Z(I, \bar{I}) = \text{const.} \int [d\psi][d\bar{\psi}][d\sigma] \exp \{ i [-\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g\bar{\psi}\psi\sigma + \bar{I}\psi + \bar{\psi}I] \} \tag{4.5}$$

因此可以研究如下的等效拉氏函数

$$L' = -\bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 + g\bar{\psi}\psi\sigma \tag{4.6}$$

它具有

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi, \quad \sigma \rightarrow -\sigma \tag{4.7}$$

的不变性。这样做相当于把原来(4.1)的费米子直接相互作用分解为(4.6)的中间通

过 σ 场的汤川作用, 这样的 σ 必相当于正、反费米子组成的复合标量场, 的确, Gross—Neveu证明了在重整化以后, σ 的经典值 σ_c 与正、反费米子组成的复合场

$$\Sigma \equiv \bar{g}\phi\phi \tag{4.8}$$

的经典值 Σ_c 相同; 用 σ_c 表达的有效势与 Σ_c 表达的有效势相同^[21]。(4.6)与通常引入基本标量场的自发破缺理论很相象, 故可用通常的方法^[18], 由它的有效势来研究复合场的自发破缺, 辅助场方法是一种方便的方法, 近来还有许多人在讨论^{[22]—[24]}。

2) $\frac{1}{N}$ 展开

现在讨论有效势的计算及动力学自发破缺的性质。设 ϕ 有 N 个分量, 则由于每个封闭费米子内线贡献一个 N 的因子, 所以图8中画出的几个贡献辐射修正的图中, 图8(a)是 $g^2 N$ 的数量级, 图8(b)、(c)是 g^2 的数量级(本小节的图中内线表示自由传播子)。因此若以

$$\lambda \equiv g^2 N \tag{4.9}$$

为标志耦合强弱的参量, 则图8(a)属于 $(\frac{1}{N})^0$, 图8(b)、(c)属于 $(\frac{1}{N})^1$, 若 N 很大, 按 $\frac{1}{N}$ 展开只取主要项, 则费米子自能及顶角修正都可略去, 这样就使计算大为简化, 这种展开与 λ 的大小无关, 故适用于 λ 大的情况。

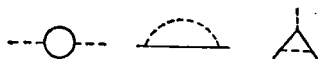


图8 实线表示费米场, 虚线表示辅助标量场

下面用 $\frac{1}{N}$ 展开来计算有效势, 很易看出在准确到 $(\frac{1}{N})^0$ 时, 只需要计算图9中各图的贡献(虽然图9中各图的数量级还不一样, 第 k 个图的数量级是 $g^{2k} N = \frac{\lambda^k}{N^{k-1}}$, 但由于每个图的红外发散性, 我们必须把它们加起来以得到重整化后有限的结果), 这种图可用标准的方法来计算^[18, 25, 26], 很易求得*



图 9

* 在普通半经典近似中(4.10)是准到 $O(\hbar)$ 的结果, 现在按 $\frac{1}{N}$ 展开, (4.10)是准到 $(\frac{1}{N})^0$ 考虑到所有量子修正的结果。

$$V(\sigma_c) = \frac{1}{2} \sigma_c^2 - \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_c^2 [\ln \Lambda^2 + 1 - \ln \frac{\lambda \sigma_c^2}{N}] - A \sigma_c^2 \quad (4.10)$$

其中 Λ^2 为紫外截断参量，最后一项是重整化抵消项。

我们可以象文献^[18]那样将重整化点取为某个非零的 σ_0 ，不同的 σ_0 值对应不同的重整化后的耦合常数 λ ，但它们等价地描写同一物理问题。(4.10)中右方第一项是树图的贡献，所以重整化条件为

$$\left. \frac{d^2 V(\sigma_c)}{d\sigma_c^2} \right|_{\sigma_c = \sigma_0} = 1 \quad (4.11)$$

由(4.10)和(4.11)得到重整化后的有效势

$$V(\sigma_c) = \frac{1}{2} \sigma_c^2 + \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_c^2 [\ln(\frac{\sigma_c}{\sigma_0})^2 - 3] \quad (4.12)$$

现在相应于(1.1)的稳定条件是

$$\left. \frac{dV(\sigma_c)}{d\sigma_c} \right|_{\sigma_c = \langle \sigma \rangle_0} = 0 \quad (4.13)$$

将(4.12)代入(4.13)得

$$\langle \sigma \rangle_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{4\pi} \left[\ln \frac{\langle \sigma \rangle_0}{\sigma_0} \right]^2 - 2 \right\} = 0 \quad \text{于是得 } V(\sigma_c) \text{ 的三个极值点为}$$

$$\langle \sigma \rangle_0 = 0,$$

$$\langle \sigma \rangle_0 = \pm \sigma_0 e^{(1 - \frac{\pi}{\lambda})} \quad (4.14)$$

计算二阶微商可知 $\langle \sigma \rangle_0 = 0$ 为极大， $\langle \sigma \rangle_0 = \pm \sigma_0 e^{(1 - \frac{\pi}{\lambda})}$ 为极小。 $V(\sigma_c)$ 的形状如图10所示。由此看出 $\langle \sigma \rangle_0 = 0$ 的对称解是不稳定的，真正稳定的物理真空态具有

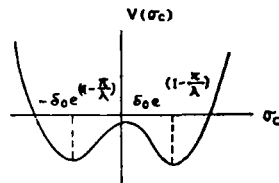


图 10

$\langle \sigma \rangle_0 = \pm \sigma_0 e^{(1 - \frac{\pi}{\lambda})}$ 的状态，所以动力学自发破缺一定出现。 $\langle \sigma \rangle_0$ 取正、负号的两个真空是简并的，物理上等价的，以后我们确定取正号。这样真正物理上出现的解为

$$\langle \sigma \rangle_0 = \sigma_0 e^{(1 - \frac{\pi}{\lambda})} \quad (4.15)$$

由(4.6)看出 $\langle \sigma \rangle_0 \neq 0$ 意味着费米子获得质量

$$M_F = g \langle \sigma \rangle_0 = g \sigma_0 e^{(i-\frac{\pi}{4})} \quad (4.16)$$

这样自发地破缺了(4.7)的对称性,由于(4.7)是不连续变换,所以在此问题中没有Goldstone玻色子。

我们知道有效势场的经典值的微商给出各种零动量的一粒子不可约顶角^{[18][20]}。故由(4.12)、(4.15)得

$$D_\sigma^{-1}(p^2=0) = i \frac{d^2 V(\sigma_c)}{d\sigma_c^2} \Big|_{\sigma_c = \langle \sigma \rangle_0} = i \frac{\lambda}{\pi} \quad (4.17)$$

这说明 σ 场质量不为零。具体求出 $D_\sigma(p^2)$ 可知 σ 的质量为^[21]

$$M_\sigma = 2M_F \quad (4.18)$$

上面谈到 σ_c 的值可以任意取。现在理论中唯一出现的质量量纲参量是 $\langle \sigma \rangle_0$,所以一个最自然的取法是取 $\sigma_c = \langle \sigma \rangle_0$,这时由(4.15)知要 $\langle \sigma \rangle_0 \neq 0$ 必须

$$\lambda = \pi \quad (4.19)$$

这是 λ 满足的本征值条件,由于 $\frac{1}{N}$ 展开适用于任意大小的 λ ,所以(4.19)是可信的。

我们看到,自发破缺后理论中原有的无量纲自由参量 λ 的值确定了,不过理论中又出现了一个有量纲的自由参量 $\langle \sigma \rangle_0$ 。这种现象Coleman-Weinberg^[18]称之为“量纲嬗变”(dimensional transmutation),它是零质量理论由重整化效应产生自发破缺的必然结果。

Gross-Neveu还讨论了定域规范理论,得到规范场获得质量的结果^[21]。

$\frac{1}{N}$ 展开方法还存在许多问题。有人指出,对一些模型 $\frac{1}{N}$ 高次项的贡献可能是重要的。在高次项的贡献中也还有些意义不太清楚的地方^[27]。

2. 重整化群方法

我们知道研究A类模型的动力学自发破缺关键在于研究解的紫外渐近行为。所以对这类问题来说重整化群方法是个超出弱耦合近似的有力工具。不过动力学自发破缺解不是由拉氏函数中的某个量经微扰论重整化计算出来的,所以用通常的重整化群方法来研究动力学自发破缺还不是那么直接的,还需要做些考虑。Cornwall^[10]曾提出一种有效拉氏函数,将问题化为微扰论重整化理论的形式。但他的有效拉氏函数比较复杂,计算比较繁,我们这里采用另一方案,以Dyson方程为基础,用Weinberg^[28]的重整化群理论来建立一个较为直接、简便的计算方法。

下面以(2.43)的非阿贝尔模型为例来说明此方法。在Weinberg的零质量重整化方案中^[28],质量是当作耦合常数来进行重整化的,设重整化点为 μ ,则重整化后的质量 m 与裸质量 m_{un} 之间的关系是

$$m = Z_g^{-1} (g_{un} \frac{A}{\mu}) m_{un} \quad (4.20)$$

其中 g_{un} 是裸耦合常数, Λ 是紫外截断参量, Z_0 是个重整化常数, 它消除在取 $m_{un} = 0$, 将 $\theta = \bar{\psi} \psi$ 插入格林函数时所造成的发散。虽然这样得到的 m 并不直接是物理上观测到的质量值, 但这对于研究解的性质来说是无妨的, 在严格求Dyson方程的非微扰自治解后可以得到(2.49)形式的费米子自能破缺部分和具有 $\pi_v^i \neq 0$ 的真空极化破缺部分, 在Weinberg方案中, 我们可以相应地定义破缺质量 m_v, M_i^2

$$m_v = \sigma(p^2 = \mu^2, m = 0) \tag{4.21}$$

$$M_i^2 = \pi_v^i(p^2 = \mu^2, n = 0) \tag{4.22}$$

这样在有自发破缺时理论中就含有 m, m_v, M_i^2 等与 μ 有关的质量参量。为了便于研究自发破缺, 我们用 g, m, m_v 来建立重整化群方程(M_i^2 作为它们的函数), 根据文献⁽²⁸⁾的精神, 我们立刻可写出一粒子不可约 n 点顶角 $\Gamma^{(n)}$ 满足的重整化群方程

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\theta(g) m \frac{\partial}{\partial m} - \gamma_{\sigma v}(g) m_v \frac{\partial}{\partial m_v} - \gamma_\Gamma \right\} \Gamma^{(n)} = 0 \tag{4.23}$$

其中 $\beta(g), \gamma_\Gamma(g)$ 和 $\gamma_\theta(g)$ 的定义是

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g, \\ \gamma_\Gamma(g) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\Gamma \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\gamma_\theta(g) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_0, \quad \Lambda, g_{un} \text{ 固定}$$

Z_Γ 是 $\Gamma^{(n)}$ 的重整化常数, 如果理论是渐近自由的, 则在讨论紫外行为时实际需要的是耦合常数很小时的系数。所以这些系数都可以用微扰论来计算。在Landau规范中计算结果为

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\frac{1}{2} b_0 g^3, \quad b_0 = \frac{1}{8\pi^2} \left[-\frac{11}{3} C_2(A) - \frac{4}{3} \sum_{\text{费米场}} \frac{d(R)}{N} C_2(R) \right] \\ \gamma_\theta &= 0 \\ \gamma_B &= C_0 g^2, \quad C_0 = -\frac{1}{32\pi^2} \left[-\frac{13}{3} C_2(A) - \frac{8}{3} \sum_{\text{费米场}} \frac{d(R)}{N} C_2(R) \right] \\ \gamma_\theta &= d_0 g^2, \quad d_0 = \frac{3}{8\pi^2} C_2(R) \end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $d(R)$ 是表示 $\{R\}$ 的维数。如前所述, (4.23)中的 $\gamma_{\sigma v}$ 不是由微扰论重整化步骤定义的。下面我们从Dyson方程出发来求 $\gamma_{\sigma v}$ 。

当 $\Gamma^{(n)}$ 中所有动量按同一比例 $p = kp_0$ 变化时,象文献⁽²⁸⁾那样可将(4.23)写成

$$\left\{ k \frac{\partial}{\partial k} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_\theta(g)] m \frac{\partial}{\partial m} + [1 + \gamma_{\theta\nu}(g)] m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - D_\Gamma + \gamma_\Gamma \right\} \Gamma^{(n)} = 0 \quad (4.26)$$

其中 D_Γ 是在通常量纲分析下 $\Gamma^{(n)}$ 作为质量量纲的维数,现在式中的系数 $\beta, \gamma_\theta, \gamma_\Gamma$ 都已求得,故我们可以将弱耦合近似解得的 $p \rightarrow \infty$ 的 $\Gamma_{\phi\phi}^{(2)}$ 代入(4.26)来确定 $\gamma_{\theta\nu}(g)$ 。我们知道

$$\Gamma_{\phi\phi}^{(2)}(p) = -S^{-1}(p) = (\hat{p} - i(m + \Sigma_s(p)) - i\Sigma_\nu(p)) \quad (4.27)$$

在弱耦合近似下解得的 $\Sigma_\nu(P)$ 就是(2.49)、(2.55),又在 $p \rightarrow \infty$ 时,一切物理顶角和传播子的行为都与对称理论中的相同⁽²⁹⁾,故 $p \rightarrow \infty$ 时 $\Sigma_s(p)$ 满足对称理论的重整化群方程

$$\left\{ k \frac{\partial}{\partial k} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_\theta(g)] m \frac{\partial}{\partial m} - 1 \right\} [\hat{p} - i(m + \Sigma_s(p))] = 0 \quad (4.28)$$

将(4.27)、(2.49)、(2.55)代入(4.26)并与(4.28)相减得

$$\left\{ k \frac{\partial}{\partial k} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_{\theta\nu}(g)] m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - 1 \right\} m_\nu (k^2)^{-\omega} = 0 \quad (4.29)$$

由于在方程(2.51)中未进行耦合常数 g 的重整化,所以现在(4.29)中的 $\beta(g)$ 为零。于是由(4.29)立刻解出

$$\gamma_{\theta\nu}(g) = d_{\theta\nu} g^2, \quad d_{\theta\nu} \equiv \frac{3}{8\pi^2} A^{(\nu)} \quad (4.30)$$

求出了(4.26)中全部系数后就可以按照通常的做法求出它的解。引入 $\bar{g}(k)$, $\bar{m}(k)$, $\bar{m}_\nu(k)$, 满足

$$\begin{aligned} k \frac{d}{dk} \bar{g} &= \beta(\bar{g}), & \bar{g}(1) &= g \\ k \frac{d}{dk} \bar{m} &= -[1 + \gamma_\theta(\bar{g})] \bar{m}, & \bar{m}(1) &= m, \\ k \frac{d}{dk} \bar{m}_\nu &= -[1 + \gamma_{\theta\nu}(\bar{g})] \bar{m}_\nu, & \bar{m}_\nu(1) &= m_\nu \end{aligned} \quad (4.31)$$

则(4.26)的解可写成⁽²⁸⁾

$$\Gamma^{(n)}(kp_0, g, m, m_\nu, l) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{D_\Gamma} e^{-\int_1^k \gamma_\Gamma(\bar{g}(k')) \frac{dk'}{k'}} \times$$

$$\times \sum_{l_1, l_2} \frac{\bar{m}^{-l_1}(k) \bar{m}^{-l_2}(k)}{l_1! l_2!} \left[\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial \bar{m}^{l_1} \partial \bar{m}_v^{l_2}} \Gamma^{(n)}(p_G, \bar{g}, \bar{m}, \bar{m}_v, \mu) \right]_{\bar{m} = \bar{m}_v = 0} \quad (4.32)$$

由(4.31)、(4.25)和(4.30)很易求得 $\bar{g}, \bar{m}, \bar{m}_v$ 的解为

$$\begin{aligned} \bar{g}^2(k) &\sim \frac{1}{b_0 \ln k}, \\ \bar{m}(k) &\sim k^{-1} (\ln k)^{-\delta} \\ \bar{m}_v(k) &\sim k^{-2} (\ln k)^{-\delta_v} \quad \delta \equiv d_0/b_0, \quad \delta_v \equiv d_{0v}/b_0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

将(4.33)代入(4.32)即求出 $\Gamma^{(n)}$ 的渐近行为。

考虑(4.27)的 $\Gamma^{(2)}_{\phi^2}$ ，由于在其中 $T^{(r)}$ 总是以 $T^{(r)} m_v$ 的形式出现的，所以(4.33)中 $l_1 = 0, l_2 = 1$ 的部分给出 $\Sigma_v(p)$ 的渐近行为

$$\Sigma_v(p) \sim T^{(r)} m_v (\ln \frac{p^2}{m_0^2})^{-\delta} \quad (4.34)$$

Cornwall^[10]曾用他提出的有效拉氏函数和Callan-Symanzik方程得到过此结果，不过计算过程比较复杂，将(4.35)与弱耦合近似求得的结果(2.49)、(2.55)相比，看到现在的 $\Sigma_v(p)$ 变化得更缓慢，这是由于计及重整化效应后有效耦合常数 $\bar{g}(k)$ 随 k 减小的缘故。

在不做弱耦合近似时，也可用重整化群方法求得Dyson方程中物理顶角和物理传播子的渐近行为，从而得到 $p \rightarrow \infty$ 时 $\Sigma_v(p)$ 满足的线性化近似Dyson方程^[30]

$$\Sigma_v(p) = \text{const.} A^{(r)} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} \bar{g}^2(k) \Sigma_v(k) + \text{非领头项}, \quad p \rightarrow \infty \quad (4.35)$$

很易看出(4.34)确是(4.35)的解，并且要(4.35)右方积分收敛必须

$$\delta_v > 0 \quad (4.36)$$

由于在整个计算中要求理论是渐近自由的，即

$$b_0 > 0 \quad (4.37)$$

所以由(4.33)、(4.30)看出(4.36)意味着

$$A^{(r)} > 0$$

这实际上也就是在求解过程中用到的弱耦合近似方程(2.51)的解的存在条件，所以不做弱耦合近似时解的存在条件仍是(2.54)。

根据(2.56)可知对 $SU(3)$ 群来说,当理论中含有不多于两个属于伴随表示的费米场且 $r=1$ 时存在(4.34)的动力学自发破缺解^(4,10)

进一步由 $\pi_i(0)$ 的Dyson方程来分析,可知要 $\pi_i^j(0)$ 有限还要求

$$\delta_u > \frac{1}{2} \quad (4.38)$$

不过代入具体数值可知上述满足(2.54)、(4.37)的解亦满足(4.38),所以(4.38)没有多给出什么实质性的要求。

类似地考虑

$$\Gamma_{BB}^{(2)}(p) = -Di^{-1}(p) = -i[p^2 + \pi^i(p)] \quad (4.39)$$

由量纲分析及 $\pi_i^j(0) \neq 0$ 知其中的 $\pi_i^j(p)$ 部分最低含 $\overline{m^2}$ 或 $\overline{m_v^2}$,由于 $C_2(R) > A^{(r)}$ (见公式(2.56)),所以 $\delta > \delta_c$,故知(4.32)中 $l_1 = 0, l_2 = 2$ 的部分给出 $\pi_v^i(p)$ 的渐近行为,即

$$\pi_v^i(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M_i^2}{m_0} \left(\ln \frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-2c_0/b_0 - 2\delta_v} \quad (4.40)$$

五、非线性效应

在第二、三节中看到对大量的规范理论模型(A类模型)使用线性化近似求解时是不能确定破缺参量 δ_m 的值的,这样就无法正确地计算 $\Omega = V_{\text{破缺}} - V_{\text{对称}}$ 以判断动力学自发破缺是否一定出现,求非线性Dyson方程的解是困难的,这里介绍Cornwall-Jakiw-Tomboueis⁽⁸²⁾提出的一种用变分法求非线性方程近似解的方法。

1. 复合算符的有效作用理论

动力学自发破缺是通过复合标量场表现出来的,因此将通常的有效作用理论^(9,12,25,26)推广到包含复合算符的情况是有利于研究动力学自发破缺的。Cornwall-Jakiw-Tomboueis⁽⁸¹⁾做了这样推广。现在扼要介绍他们的理论。

为了方便,我们以标量场 ϕ (可具有多个分量)为例来说明此理论,所得结果很易推广到旋量场和规范场的情况。设系统的拉氏函数为

$$L = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2] + L_{int} \quad (5.1)$$

则作用量为

$$I(\phi) = \int d^4x L$$

$$= \frac{i}{2} \iint d^4x d^4y \phi(x) D_0^{-1}(x-y) \phi(y) + I_{int}(\phi) \quad (5.2a)$$

其中

$$I_{int}(\phi) \equiv \int d^4x L_{int} \\ D_0^{-1}(x-y) \equiv -i(\square - m^2)\delta^4(x-y) \quad (5.2b)$$

在用路径积分量子化时我们考虑如下的生成泛函

$$Z(J, \bar{k}) = e^{iW(J, \bar{k})} = \int [d\phi] \exp \{ i[I(\phi) + \int d^4x J(x)\phi(x) \\ + \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y)] \} \quad (5.3)$$

其中 $J(x)$ 是通常引入的外源, $K(x, y)$ 是现在多引入的复合算符 $\phi(x)\phi(y)$ 的外源, 与通常类似, 定义

$$\frac{dW(J, K)}{\delta J(x)} \equiv \phi_c(x) \quad (5.4)$$

$$\frac{\delta W(J, K)}{\delta K(x, y)} \equiv \frac{1}{2} [\phi_c(x)\phi_c(y) + D(x, y)]$$

不难看出在外源为零时 $D(x, y)$ 就是 ϕ 场的连接物理传播子。我们还可以象通常那样通过下面的 Legendre 变换定义有效作用 Γ :

$$\Gamma(\phi_c, D) \equiv W(J, K) - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \\ - \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) \\ - \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y K(x, y) D(y, x) \quad (5.5)$$

由(5.4)和(5.5)可知

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_c, D)}{\delta \phi_c(x)} = -J(x) - \int d^4y K(x, y) \phi_c(y) \quad (5.6a)$$

$$\frac{\delta \Gamma(\phi_c, D)}{\delta D(x, y)} = -\frac{1}{2} K(x, y) \quad (5.6b)$$

在实际物理情况下 $J = K = 0$, 这时(5.6)成为两个稳定条件, 它们给出 ϕ_c 、 D 满足的动力学方程。

以上形式完全是通常有效作用理论^[3, 12, 25, 26]的推广。当取 $K = 0$ 时(5.6b)给出

满足 $\frac{\delta \Gamma(\phi_c, \bar{D})}{\delta \bar{D}(x, y)} = 0$ 的 \bar{D} 。这时 $\Gamma(\phi_c) \equiv \Gamma(\phi_c, \bar{D})$ 就是通常的有效作用。

有效作用 $\Gamma(\phi_c, D)$ 可以用圈图展开(半经典近似)来计算。Cornwall—Jakiw-

Tomboulis证明了如下的圈图展开规则:

定义

$$\begin{aligned} D^{-1}(\phi_c; x, y) &\equiv -i \frac{\delta^2 I(\phi_c)}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \\ &= D_0^{-1}(x-y) - i \frac{\delta^2 I_{int}(\phi_c)}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

则 $\Gamma(\phi_c, D)$ 的圈图展开公式为

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi_c, D) &= I(\phi_c) + \frac{i}{2} \text{Tr}[\ln(D_0 D^{-1}) \\ &+ D^{-1}(\phi_c) D - 1] + \Gamma_2(\phi_c, D) \end{aligned} \quad (5.8)$$

式中的 Tr 是泛函意义下的矩阵迹, 包括对时空变量的积分, $\Gamma_2(\phi_c, D)$ 是 $-i$ 乘以按如下的费曼图规则画出的所有二粒子不可约的真空图之和。

i, 将 $\phi(x)$ 做平移 $\phi(x) \rightarrow \phi_c(x) + \phi(x)$

ii, 写出 $L(\phi_c + \phi)$ 中 ϕ 场的相互作用部分 (含 ϕ^3 以上者), 相互作用顶角与 $\phi_c(x)$ 有关。

iii, 用上面的顶角, 并以 $D(x, y)$ 为内线, 做所有二粒子不可约的真空图。

在 (5.8) 中第一项 $I(\phi_c)$ 是树图的贡献 (属于 $O(\hbar^0)$), 第二项 $\frac{i}{2} \text{Tr}[\ln D_0 D^{-1} + D^{-1}(\phi_c) D - 1]$ 一圈图的贡献 (属于 $O(\hbar)$), 第三项 $\Gamma_2(\phi_c, D)$ 是二圈以上图的贡献 (属于 $O(\hbar^2)$)。

以上公式是对标量场而言的, 对规范场, (5.8) 式仍不变, 不过在作用量 I 中还要计及规范固定项 (见公式 (2.46)) 和规范补偿项 (见公式 (2.47)) 的贡献。对费

米场则 (5.8) 要稍有改变。由于对玻色场来说 $\int [d\phi] e^{\frac{i}{2} \phi A \phi} = \sqrt{\frac{1}{\det A}}$, 而对费米

场来说 $\int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{\frac{i}{2} \bar{\psi} A \psi} = \det A$, 故对费米场来说 (5.8) 中第二项的系数 $\frac{i}{2}$ 要

换成 $-i$ 即

$$\text{一圈图系数的公式为} \begin{cases} \frac{i}{2} & (\text{玻色场}) \\ -i & (\text{费米场}) \end{cases} \quad (5.9)$$

当只考虑平移不变的解时, $\phi_c = \text{const}$, $D(x, p) = D(x-y)$, 这时可定义有效势 $V(\phi_c, D)$:

$$V(\phi_c, D) \int d^4x \equiv -\Gamma(\phi_c, D) |_{\text{平移不变}} \quad (5.10)$$

做富利叶变换

$$\begin{aligned} D(p) &= \int d^4x e^{-i p(x-y)} D(x-y) \\ D(\phi_c, p) &= \int d^4x e^{-i p(x-y)} D(\phi_c; x-y) \end{aligned}$$

$$D_0(p) = \int d^4x e^{-ip(x-y)} D_0(x-y)$$

则(5.8)可化成

$$V(\phi_c, D) = U(\phi_c) + \frac{i}{2} \text{Tr} \{ \ln[D_0^{-1}(p)D(p)] - D^{-1}(\phi_c; p)D(p) + 1 \} + V_2(\phi_c, D) \quad (5.11)$$

其中 $U(\phi_c)$ 即 L 中的势能部分, 现在的 $V_2(\phi_c, D)$ 是动量表象中者, 它等于用上述费曼图规则(内线为 $D(p)$)所做的所有二粒子不可约真空图的不变振幅之和。式中的 Tr 包括对四维动量的积分。

相应地, 当取 $J = K = 0$ 时, (5.6)的二式化为

$$\frac{\partial V(\phi_c, D)}{\partial \phi_c} = 0 \quad (5.12a)$$

$$\frac{\partial V(\phi_c, D)}{\partial D(p)} = 0 \quad (5.12b)$$

它们给出 ϕ_c 和 $D(p)$ 满足的动力学方程。

下面我们以第二节中讨论过的 Cornwall-Norton 模型为例来说明(5.11)、(5.12)的具体意义。在该模型中, 费米场和规范场都不会有非零真空期待值, 故 ϕ_c 、 $\bar{\phi}_c$ 、 $A_{\mu c}$ 、 $B_{\mu c}$ 都取为零。这样 V 只是费米场物理传播子 S 和规范场物理传播子 $D_{\mu\nu}^A$ 、 $D_{\mu\nu}^B$ 的函数。于是按照上面的规则

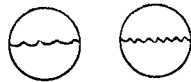


图 11

$$V(S, D^A, D^B) = -i \text{Tr} \{ \ln[S_0^{-1}(p)S(p)] - S_0^{-1}(p)S(p) + 1 \} + \frac{i}{2} \sum_{j=A,B} \text{Tr} \{ \ln[D_0^{-1}(p)D^j(p)] - D_0^{-1}(p)D^j(p) + 1 \} + V_2(S, D^A, D^B) \quad (5.13)$$

其中

$$S_0(p) = \frac{-i}{i\hat{p} + m}, \quad D_{0\mu\nu}(p) = \frac{-i(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})}{p^2} \quad (5.14)$$

(5.13)第二项中的 Tr 亦包含对指标 μ, ν 的求和, 现在 V_2 的费曼图规则中顶角仍为

$$\Gamma_{0\mu}^A = g\gamma_\mu, \quad \Gamma_{0\mu}^B = g'\gamma_\mu\tau_2 \quad (5.15)$$

所以若计至二圈图则 V_2 由图11中两个图贡献*

*在 V_2 中只保留耦合常数最低项的图称为Hartree-Fock近似, 现在图11就相当于Hartree-Fock近似。

$$V_2(S, D^A, D^B) = -\frac{i}{2} t_r \sum_{j=A, B} \iint \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \Gamma_{0\mu}^j S(p) \Gamma_{0\nu}^j S(p+k) D_{\mu\nu}^j(k) \quad (5.16)$$

这里 t_r 不再包括对动量的积分及对 μ, ν 的求和, 将(5.16)代入(5.13)即得到二圈图的有效势。

现在(5.12)是

$$\frac{\partial V}{\partial S(p)} = 0 \quad (5.17a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial D_{\mu\nu}^j(p)} = 0, \quad j = A, B \quad (5.17b)$$

将上面求得的有效势代入(5.17a)得

$$-iS^{-1}(p) + iS_0^{-1}(p) = i \sum_{j=A, B} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Gamma_{0\mu}^j S(p+k) \Gamma_{0\nu}^j D_{\mu\nu}^j(k) \quad (5.18)$$

根据(2.10)、(5.14)看出这正是第二节中的Dyson方程(2.8)同样由(5.17b)亦可得相应的Dyson方程。这里我们看到了(5.17)的意义。如果再计及三圈以上图的贡献(比如图12所画的各种可能图)则(5.17)将给出相当于公式(2.6)的Dyson方程。

2. Rayleigh - Ritz近似

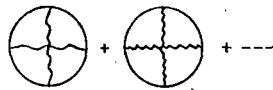


图 12

我们看到在(5.13)的有效势中包含了非线性Dyson方程的内容。如果能用一定近似方法求得此 $V(S, D^A, D^B)$ 则可得到包含非线性效应的结果。Cornwall - Jakiw - Tomboulis⁽⁸¹⁾提出用线性化近似解作为试探函数的变分法计算——Rayleigh-Ritz近似。下面扼要介绍此方法。

在(5.13)的各动量积分中, 大动量部分的贡献都是重要的。在第二节中我们已由线性化近似方程解得 $\sigma(p)$ 的渐近行为(2.15)。Cornwall⁽¹⁰⁾还用他的有效拉氏函数和Callan-Symanzik方程求得 $\pi_\nu^B(p)$ 的渐近行为(亦可用第四节的重整化群方法方便地求得)为

$$\pi_\nu^B(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} M_B^2 \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-2\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{3(g^2 - g'^2)}{16\pi^2} \quad (5.19)$$

这样我们就可以用(2.15)和(5.19)为试探解(质量尺度参量一律代成 m)代入(5.13)中,以 m_v 和 M_B^2 为变分参量来求最佳解。这时(5.17)就成了变分法的稳定条件(这时(5.17)不是对传播子的任意变更稳定,而是对取定的试探解中 m_v 和 M_B^2 的变化稳定),这就是这个Rayleigh—Ritz方法的主要精神。由(5.13)、(5.16)可看出在 V 的动量积分中会出现四次和二次发散的积分。(2.15)和(5.19)的渐近行为保证不存在对数发散积分)如果我们不直接计算 V 而是计算(3.10)的 Ω ,则四次发散积分可完全减掉。Cornwall—Jakiw—Tomboulis还证明将线性化近似解代入后 Ω 中的二次发散积分亦都消去,因此这样计算的 Ω 是有限的。

在下面的计算中我们不计微扰论重整化效应,即略去自能中的对称部分。这样,经过一些化简可求得

$$\begin{aligned}\Omega(m_v, M_B^2) &= V_{\text{破缺}} - V_{\text{对称}} = V(S, D_0, D^0) - V(S_0, D_0, D_0) \\ &= -i \text{Tr}[\ln(S_0^{-1}S) - S_0^{-1}S + 1] \\ &\quad + \frac{i}{2} \text{Tr}[\ln(D_0^{-1}D^0) - D_0^{-1}D^0 + 1] \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{j=A,B} \text{Tr}[\Gamma^j(S - S_0)\Gamma^j(S - S_0)D_0] \\ &\quad - \frac{i}{2} \text{Tr}[\Gamma^B(S - S_0)\Gamma^B(S - S_0)(D^0 - D_0) \\ &\quad + 2\Gamma^B S_0 \Gamma^B(S - S_0)(D^0 - D_0)]\end{aligned}\quad (5.20)$$

具体计值(5.20)的积分时我们只保留 ϵ 的最低两次项(即 $o(\frac{1}{\epsilon})$ 和 $o(1)$)经过较长但基本的计算得到

$$\begin{aligned}\Omega(m_v, M_B^2) &= \frac{m_v^4}{32\pi^2\epsilon} - \frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{m_v}{m}\right)^4 \ln\left(1 + \frac{m_v}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{m_v}{m}\right)^4 \ln\left(1 - \frac{m_v}{m}\right) - 7\left(\frac{m_v}{m}\right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{3M_B^4}{128\pi^2\epsilon} \left[1 - 4\epsilon \ln \frac{M_B^2}{m^2} - 2\epsilon \right] \\ &\quad - \frac{3g' M_B^2 m_v^2}{128\pi^4\epsilon^2} \left[1 - 4\epsilon \ln \frac{M_B^2}{m^2} + \epsilon \right] + o(g^2 g'^2)\end{aligned}\quad (5.21)$$

现在(5.17)变成

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m_v} = 0 \quad (5.22a)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial M_B^2} = 0 \quad (5.22b)$$

将(5.21)代入(5.22b), 并假定 $4\epsilon \ln \frac{M_B^2}{m^2} \ll 1$, 得

$$M_B^2 = \frac{8}{3} \frac{m_\nu^2}{\gamma^2 - 1} (1 + \epsilon), \quad \gamma^2 \equiv g^2/g'^2 \quad (5.23c)$$

$$= \frac{2g'^2}{3(g^2 - g'^2)} (m_1 - m_2)^2 (1 + \epsilon) \quad (5.23b)$$

这正是 M_B^2 与 m_ν^2 的关系, 与第一节所得的(2.30)相比看出现在得到的修正属于 $O(\epsilon)$, 将(5.23)代入(5.21)得

$$\begin{aligned} \Omega(m_\nu) &= \frac{m_\nu^4}{32\pi^2\epsilon} - \frac{m^4}{8\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{m_\nu}{m}\right)^4 \ln \left(1 + \frac{m_\nu}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{m_\nu}{m}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{m_\nu}{m} - 7\left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2\right) \right\} \\ &\quad - \frac{m_\nu^4}{6\pi^2\epsilon(\gamma^2 - 1)^2} \left[1 - 4\epsilon \ln \frac{8/3}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

由费米子的质量分裂(2.16)知

$$0 < \left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2 < 1 \quad (5.25)$$

我们将(5.24)对 $\left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2$ 展开, 保留到 $\left(\frac{m_\nu}{m}\right)^6$ 项, 得

$$\begin{aligned} \Omega(m_\nu) &\simeq \frac{m_\nu^4}{32\pi^2\epsilon} - \frac{25m_\nu^2}{48\pi^2} + \frac{m_\nu^2}{120\pi^2 m^2} \\ &\quad - \frac{m_\nu^4}{6\pi^2\epsilon(\gamma^2 - 1)^2} \left[1 - 4\epsilon \ln \frac{8/3}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

将此代入(5.22a), 同样假定 $4\epsilon \ln \frac{8/3}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2 = 4\epsilon \ln \frac{M_B^2}{m^2} \ll 1$, 得

$$\left(\frac{m_\nu}{m}\right)^2 = \frac{125}{3} \left[1 - \frac{0.06}{\epsilon} + \frac{0.32}{\epsilon(\gamma^2 - 1)^2} - \frac{0.64}{(\gamma^2 - 1)^2} \right] \quad (5.27)$$

我们讨论以下几种情况的解:

若取 $\epsilon \ll 1$, 则要满足(5.25)必须(5.27)的第二和第三项两个大数近于相消,

$$\text{即 } (\gamma^2 - 1)^2 \sim \frac{0.32}{0.06}, \text{ 或}$$

$$\gamma^2 \sim 3.3 \quad (5.28a)$$

此时由(5.23)知 $M_B^2 \sim m_\nu^2$

若取 $\gamma^2 \gg 1$, 则(5.27)后二项可略。于是满足(5.25)必须

$$e \sim 0.06 \tag{5.28b}$$

若取 $\gamma^2 \gtrsim 1$, 则(5.27)第二项较之第三项可略, 这时(5.25)要求 $(\gamma^2 - 1) \sim 0.64$

$(1 - \frac{1}{2e})$, 即

$$e \sim \frac{1}{2} \tag{5.28c}$$

此时由(5.23)知 $M_B^2 \gg m_\nu^2$ 。不过, 对这样大的 e 来说, 前面所做的近似已成问题。

对以上各种情况, 只要适当取 e 和 γ^2 的值都不难满足前面 $4e\pi n \frac{M_B^2}{m^2} \ll 1$ 的假定。

这里我们看到在计及非线性效应后, $(\frac{m_\nu}{m})^2$ 完全确定, m_ν 不能取连续值, 所以可有 $\Omega \neq 0$, 将(5.27)的解代入(5.26)得

$$\Omega_{\text{极值}} = -\frac{m_\nu^2}{240\pi^2} (\frac{m_\nu}{m})^2 < 0 \tag{5.29}$$

所以这种模型动力学自发破缺要发生*

六 实际物理模型

由于动力学自发破缺的计算比较复杂, 目前用于研究实际物理模型的工作还很少。这里我们介绍一些情况。

1. 弱作用—电磁作用统一规范理论

首先讨论用动力学自发破缺理论建立 Weinberg—Salam 的 $SU(2) \times U(1)$ 轻子模型^[1]的问题, Englert—Brout^[38]对此做了讨论, 情况如下:

为了简便, 只考虑 ν_e 和 e^- , 模型为

$$\phi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad \phi_R = e^- \tag{6.1}$$

$SU(2) \times U(1)$ 定域规范不变拉氏函数为

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B - \bar{\phi}_L \gamma_\mu (\partial_\mu + igt_i W_\mu^i \\ & + \frac{1}{2} ig' B_\mu) \phi_L - \bar{\phi}_R \gamma_\mu (\partial_\mu + ig' B_\mu) \phi_R, \\ F_{\mu\nu}^i = & \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \\ F_{\mu\nu}^B = & \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \tag{6.2}$$

* 虽然有效势作为 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t)$ 等的泛函时才能解释为基态能量密度^[32], 而現在有效势是作为 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ 等的泛函, 但 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t)$ 与 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ 間有确定关系^[31], 所以現在对 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ 等的变分计算也是一种 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t)$ 等的变分计算, 現在得到的 Ω 极值也就是 Ω 作为 $S(\vec{x}, t; \vec{x}', t)$ 是泛函的变分计算极值, 所以(5.28)说明有自发破缺的基态能量低于对称的基态能量。

此模型中电子电荷为

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (6.3)$$

光子场为

$$A_\mu = (g^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}} (g' W_\mu^3 - g B_\mu) \quad (6.4)$$

与 A_μ 正交的中性中间玻色子场为

$$Z_\mu = (g^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}} (g W_\mu^3 + g' B_\mu) \quad (6.5)$$

两个带电中间玻色子场为

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (6.6)$$

若要求自发破缺保持电荷守恒, 则轻子自能破缺部分 $\Sigma_\nu(p)$ 必与电荷算符同时对角化, 又中微子无右旋分量, 故不可能获得质量。所以

$$\Sigma_\nu(p) = (\frac{1}{2} - t_3)\sigma(p) \quad (6.7)$$

其中 $\sigma(p)$ 是电子自能中的破缺部分。这时由各 $W-T$ 恒等式知 A_μ 保持质量为零, W_μ^\pm 获得质量 M_W , Z_μ 获得质量 M_Z 。下面象第二节那样讨论 $\sigma(p)$ 的解, 并求出 M_W 和 M_Z 。

这是个 A 类模型, 在考虑 $p \rightarrow \infty$ 的 $\sigma(p)$ 的 $Dyson$ 方程时积分主要由大动量部分贡献, 故在其中 M_W^2 、 M_Z^2 均可忽略, 所以中性规范场的混合在此计算中不起作用, 我们可以用 W_μ^3 、 B_μ 来考虑。由(6.2)看出只有 B_μ 场与左、右旋轻子都有耦合, 所以 $\sigma(p)$ 只由 B_μ 场贡献。这样, 我们立刻可写出它满足的线性化近似 $Dyson$ 方程,

$$\sigma(p) = -i \frac{3}{2} g'^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\sigma(p+k)}{(p+k)^2 k^2} \quad (6.8)$$

这方程一定有解

$$\sigma(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} m e \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{3g'^2}{32\pi^2} \quad (6.9)$$

规范场质量是由图7中各图来计算, 现在对(6.9)这种解来说, 图7中第一项为 $O(g^0, g'^0)$, 第二、三项为 $O(g^2)$, 第四项为 $O(g^4)$, 所以在只保留耦合常数最低次项的情况下只要计算第一项, 计算方法与第二节中 Cornwall-Norton 模型的相同, 结果是

$$M_W^2 = \frac{g^2}{6g'^2} m_e^2, \quad M_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{6g'^2} m_e^2 \quad (6.10)$$

若按通常 Weinberg 混合角的大小来考虑, $g^2/g'^2 = 0(1)$, 则这时 M_W^2 、 M_Z^2 与 m_e^2 同数量级, 要得到 M_W^2 , $M_Z^2 \gg m_e^2$ 的结果只能取 $g^2 \gg g'^2$ 。这时由(6.3)看出

$e \simeq g'$ 。于是 $M_Z^W = \frac{g^2}{6} \left(\frac{m_e}{e}\right)^2$, 又在此模型中弱作用的费米耦合常数为

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{3}{4} \left(\frac{e}{m_e}\right)^2, \text{ 故在此理论中 } G_W \text{ 与电子荷质比相联系将具体电子荷}$$

质比的实验值代入所得的 G_W 比实际弱作用定出的 G_W 大 10^{10} 倍, 所以这个理论与实验显然矛盾。

Englert—Brout 分析了这理论不成功的原因。提出关键在于左、右旋轻子通过 B_μ 场的耦合太强, 因而相对于规范场质量来说理论给出过大的 $\Sigma_\nu(p)$, 针对这个缺点, 他们提出了一个 $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ 轻子模型⁽³³⁾, 多引入一个 $U(1)$ 规范对称性, 多引入一个自由参量来减小左、右旋轻子的耦合。这理论中自然地应包含两套轻子, 可取为 ν_e 、 e^- 和 ν_μ 、 μ^- 。具体模型如下:

$$\begin{aligned} \phi_L &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \phi_{L'} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \quad \phi_R = e_{R^-}, \\ \phi_{R'} &= \mu_{R^-}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

$SU(2) \times U(1) \times U(1)$ 定域规范不变的拉氏函数取为

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^X F_{\mu\nu}^X - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^Y F_{\mu\nu}^Y \\ & - \bar{\phi}_L \gamma_\mu [\partial_\mu + ig_i W_\mu^i + i\sqrt{2}g'(\frac{1}{2} - \xi^2)X_\mu + i\sqrt{2}g'\xi^2 Y_\mu] \phi_L \\ & - \bar{\phi}_{L'} \gamma_\mu [\partial_\mu + igt_i W_\mu^i + i\sqrt{2}g'\xi^2 X_\mu + i\sqrt{2}g'(\frac{1}{2} - \xi^2)Y_\mu] \phi_{L'} \\ & - \bar{\phi}_R \gamma_\mu [\partial_\mu - i\sqrt{2}g'\xi^2 X_\mu + i\sqrt{2}g'(1 + \xi^2)Y_\mu] \phi_R \\ & - \bar{\phi}_{R'} \gamma_\mu [\partial_\mu + i\sqrt{2}g'(1 + \xi^2)X_\mu - i\sqrt{2}g'\xi^2 Y_\mu] \phi_{R'} \tag{6.12} \\ F_{\mu\nu}^i & \equiv \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \\ F_{\mu\nu}^X & \equiv \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu, \quad F_{\mu\nu}^Y \equiv \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu \end{aligned}$$

其中 X_μ 、 Y_μ 分别是两个 $U(1)$ 群的规范场, 它们的耦合常数都取成 $\sqrt{2}g'$ 。这里引入了一个自由参量 ξ^2 , 当 $\xi^2 = 0$ 时 X_μ 只与 ϕ_L 和 $\phi_{R'}$ 耦合, Y_μ 只与 $\phi_{L'}$ 和 ϕ_R 耦合。这样 $\Sigma_\nu^e = \Sigma_\nu^\mu = 0$, 当 $\xi^2 \neq 0$ 时 ϕ_L 与 ϕ_R 及 $\phi_{L'}$ 与 $\phi_{R'}$ 有 $O(\xi^2)$ 的耦合, 所以取 $\xi^2 \ll 1$ 可解决前

面的困难,不过现在多引入了一个自由参量,使规范场质量与轻子质量之比和此自由参量有关,这是不很理想的*,此外用Rayleigh—Ritz近似计及非线性效应后还得到⁽³⁴⁾ $m_\mu = m_e$ 。所以这模型与实验不符,在此模型中要得到 $m_\mu \neq m_e$ 可对 μ, e 取不同的 ξ^2 ,但这又增加了自由参量,是不理想的。

Budini⁽³⁵⁾还提出了一种 $SU(3) \times U(1)$ 模型:

$$\phi_e = \begin{pmatrix} e_L^- \\ e_R^- \\ \nu_{eL} \end{pmatrix}, \quad \phi_\mu = \begin{pmatrix} \mu_L^- \\ \mu_R^- \\ \nu_{\mu L} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

在此模型中不需要引入前面的 ξ^2 那种参量,只要适当取 g'/g ($g'/g = 0(1)$)就可以使规范场质量比轻子质量重得多,同时避免Weinberg—Salam模型的困难。

不过所有这些零质量模型都有 $\Omega_{\text{极值}} = 0$ 的问题,所以仍需要作其它物理考虑引入质量量纲参量。

总起来看,动力学自发破缺要比引入基本标量场的机制任意性小得多(一切质量比及规范场的混合方式都确定⁽³⁴⁾对模型的限制也就严得多。目前尚无一个完全成功的模型,如果能找到一个包含较少自由参量能符合实验的模型(包括能得出合适的轻子质量谱)那将是很理想的,目前尚难预料这可能性有多大。

2. 量子色动力学

量子色动力学(以后简称QCD)作为一种有希望的强子内部动力学理论,已愈来愈为人们所重视。目前在国外QCD研究的主要倾向是假定色规范对称性是完全的。试图证明这种理论能得到颜色“禁闭”的结论,以解释为什么层子和色规范场一直未被发现。还有一种可能性就是考虑色规范对称性有自发破缺,自由层子和色规范场有较重的质量因而目前尚未被发现。这里分析一下后一种情况的可能性。

在QCD中引入基本标量场来产生自发破缺是无法使全部色规范场都获得质量而又不破坏渐近自由性质的。因此色规范对称性如果破缺则可能是由动力学自发破缺机制引起的。

在第四节中我们用重整化群方法讨论的非阿贝尔规范模型,当 G 取为 $SU(3)$,费米子属于基本表示时就是QCD,因此在略去层子间的电磁作用和弱作用,只考虑色规范作用的情况下,QCD是不存在动力学自发破缺的。但是对动力学自发破缺这类非微扰问题来说,略去电磁作用和弱作用的贡献未必是合理的,从物理图象来看,动力学自发破缺解的存在与否取决于正、反层子(或色规范场)之间是否有足够的吸引力使形成零质量的“对”(复合Goldstone玻色子),事实上从第二节中讨论的 $B-S$ 方程来看, $A^{(1)} > 0$ 的条件就是色规范场能使正、反层子互相吸引形成零

* Englert—Brout希望能与CP破坏有关,但未详细讨论。

质量“对”的条件。(4.35)表明在这问题上起作用的是 k 大时的有效耦合常数 $\bar{g}(k)$, 它是很小的。因此 $\Lambda^{(\prime)} > 0$ 时是个很弱的力使形成复合 Goldstone 玻色子(这时 m_ν 和 M_i 并不小); $\Lambda^{(\prime)} < 0$ 时也只是个很弱的力破坏复合 Goldstone 玻色子的形成。我们知道电磁作用是贡献正、反层子间的吸引力的, 如果象通常考虑的那样, 电磁作用不是渐近自由的, 则在紫外区域电磁吸引力可以超过色规范场贡献的力, 使得 $\Lambda^{(\prime)} < 0$ 时正、反层子也可形成复合 Goldstone 玻色子, 造成动力学自发破缺, 所以对于形成这种 A 类模型的动力学自发破缺来说, 电磁作用相对于色规范场贡献的作用而言不但不能忽略而且起主要作用。因此在讨论 QCD 的动力学自发破缺时必须计及层子间电磁作用的贡献。这仍可用第四节中的重整化群方法来计算, 对电磁作用可用弱耦合近似来计算, 这样计算得到 $\Sigma_\nu(p)$ 的渐近解为

$$\Sigma_\nu(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} T^{(\prime)} m_\nu \left(\frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\varepsilon} \left(\ln \frac{p^2}{m_0^2} \right)^{-\delta_\nu} \quad (6.14a)$$

其中 δ_ν 由 (4.33) 定义, ε 为

$$\varepsilon = \frac{3Q^2 e^2}{16\pi^2}, \quad (6.14b)$$

Q 是层子的电荷值, 现在与 (4.35) 相应的方程是

$$\begin{aligned} \Sigma_\nu(p) = \text{const} \Lambda^{(\prime)} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} g^2(k) \Sigma_\nu(k) \\ + \frac{3Q^2 e^2}{16\pi^2} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} \Sigma_\nu(k) + \text{非领头项} \end{aligned} \quad (6.15)$$

不难看出 (6.14) 是 (6.15) 的解, (6.15) 右方积分收敛的条件是

$$\varepsilon > 0 \quad (6.16)$$

由 (6.14b) 知这总是满足的, 所以计及电磁作用后 QCD 的确存在动力学自发破缺解。

如果现在量子电动力学仍可有 Johnson—Baker—Willey 的自洽处理^[9] 或 β_e 有一紫外稳定固定点 $e_\infty \neq 0$ (β_e 的简单零点) 且 e_∞ 不太大, 则上述结论在电磁作用的计算超出弱耦合近似时仍成立。

要判断 QCD 中动力学自发破缺是否一定出现就需要计算 $\Omega = V_{\text{破缺}} - V_{\text{对称}}$, 可以用 Rayleigh—Ritz 近似做定性讨论。具体计算知

$$\Omega_{\text{极值}} < 0 \quad (6.17)$$

所以计及电磁作用后 QCD 确要产生动力学自发破缺 (在整个计算中始终保持

QCD是渐近自由的)

由此看来只要电磁作用不是渐近自由的, QCD就要产生动力学自发破缺, 色规范场就要获得质量。这时颜色就不会是完全“禁闭”的了, 若考虑到弱作用与电磁作用的统一, 则可能有以下情况:

第一, 弱-电作用不是渐近自由的。比如 $SU(2) \times U(1)$ 等等⁽²⁾。其中 $U(1)$ 的部分不是渐近自由的, 在紫外区域这个 $U(1)$ 的规范场(光子和中性中间玻色子的混合)就相当于上面的电磁场, 造成QCD的动力学自发破缺, 情况与上面讨论的类似。

第二, 弱-电作用是渐近自由的(这可包括强、弱、电磁作用统一于一个单纯群的情况⁽³⁶⁾)。在 $k \rightarrow \infty$ 时, 如果弱-电耦合常数 $\bar{g}_{WB}(k)$ 比色规范群的 $\bar{g}(k)$ 趋于零来的慢, 则和第一种情况类似, QCD要有动力学自发破缺, 如果 $\bar{g}_{WB}(k)$ 比 $\bar{g}(k)$ 趋于零来得快, 则QCD不发生动力学自发破缺。这时有可能颜色“禁闭”。

从目前弱作用理论和实验比较的情况来看⁽²⁾, 第一种可能性较大。

七、结束语

总结以上情况, 我们看到动力学自发破缺是一些模型中自然要出现的一种物理现象, 不能回避对它的研究。这种自发破缺任意性小, 能够得出较多确定的结论, 尤其是它能保持非阿贝尔规范理论渐近自由的性质, 是研究基本粒子相互作用理论时值得注意的。不过动力学自发破缺是Dyson方程的非微扰解, 计算是比较困难的。目前这方面的研究还处于较初步的阶段。现在对紫外稳定的B类模型来说还没有非弱耦合近似的计算方法。对A类模型, 不做弱耦合近似也还不易讨论非线性效应问题, 这些都妨碍着对实际物理模型的定量研究。因此当前迫切需要解决的是计算方法问题。需要寻求一种非弱耦合近似、非线性化近似的切实可行的可靠方法。第四节中提到的引入辅助场的方法可能是一种有利的表达方式。新方法的研究是比较困难的, 目前进展还很缓慢。

近三十年来, 量子场论的发展大大地促进了量子力学多体问题和量子统计力学的发展。对于多体系统集体性质的研究取得了许多有意义的成果。例如对固体的超导性、铁磁性等的微观机制有了更深刻的了解。这些领域中丰富的物理图象无疑地又会反过来促进基本粒子理论的研究, 对称性自发破缺的概念就来源于多体系统的集体效应。动力学自发破缺就是在超导理论的启发下发展起来的, 它相当于超导理论中能隙和Meissner效应的理论。近年来用超导的物理图象类比强子的想法也在逐渐发展。模仿第二类超导体的形象来建立有限大小强子模型, 解释为什么层子在强子内似乎很轻而自由层子又尚未发现等工作在不断增加^{(37) — (41)}。当然基本粒子与凝聚态物质的性质不会是完全相同的, 不能机械地用凝聚态物质来比拟基本粒

子, 不过以凝聚态物理中某些物理图象作为启发来探讨基本粒子的结构及其相互作用规律可能是有益的。

参 考 文 献

- [1] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**(1967), 1264; A. Salam, *Elementary Particle Theory*, Stockholm, 1968; B. W. Lee, *Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics* (NAL?, Batavia Ill, 1973), Vol. 4, 249.
- [2] J. D. Bjorken, SLAC Report, 198(1976); R. M. Barnett, SLAC—PUB— 1961 (1977).
- [3] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Reports*, **9C** (1973), 1.
- [4] D. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 3633.
- [5] J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 1145.
- [6] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122** (1961), 345.
- [7] J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 3338.
- [8] R. Jakiw and K. Johnson, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 2386.
- [9] K. Johnson, M. Baker, and R. Willey, *Phys. Rev.*, **136** (1964), B1111; *Phys. Rev.*, **163** (1967), 1699; M. Baker and K. Johnson, *Ibid*, **183** (1969), 1292; *Phys. Rev.*, **D3** (1971), 2516; **D3** (1971) 2541; K. Johnson and M. Baker, *Ibid*, **D8** (1973), 1110; S. Adler., *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 3021.
- [10] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 500.
- [11] E. J. Eichten and F. L. Feinberg, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 3254.
- [12] G. Costa and M. Tonin, *Rivista Nuc. Cim.*, **5** (1975), 29; B. W. Lee, *phys. Rev.*, **D9** (1974), 933.
- [13] J. Smit, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 2473.
- [14] G. Jona-Lasinio, *Nuc. Cim.*, **34** (1964), 1790.
- [15] 郇宇平、易余萍、兰州大学学报, 1976, 3, 23.
- [16] F. Englert, J. M. Frere, and P. Nicoletopoulos, *Nucl. Phys.*, **B95** (1975), 269.
- [17] F. Englert, J. M. Frere, and P. Nicoletopoulos, *Phys. Lett.*, **59B** (1975), 346; *Ibid*, **52B** (1974), 443.
- [18] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D 7** (1973), 1888.
- [19] P. D. Mannheim, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 3311; *Ibid*, **D12** (1975), 1772.
- [20] R. Fukuda and T. Kugo, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3469.
- [21] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 3235.
- [22] M. Bander and P. Thomas, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 1798.
- [23] K. Kikkawa, *Prog. Theor. Phys.*, **56** (1976), 947.
- [24] E. Shrauner, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 1887.

- [25] R. Jakiw, *Phys. Rev.*, D9 (1974), 1686.
- [26] J. Iliopoulos, C. Itzkson, and A. Martin, *Rev. Mod. Phys.*, 47 (1975), 165.
- [27] 例如 R. G. Root, *Phys. Rev.*, D11 (1975), 831; *Ibid.* D10 (1975), 3322; Y. Erishman, H. Romer, and S. Yankielowicz, *Phys. Rev.*, D11 (1975), 3040.
- [28] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, D8(1973), 3497; J. C. Collins, and A. J. Macfarlairle, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 1021.
- [29] B. W. Lee and W. I. Weisberger, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 2530.
- [30] S. —H. H. Tye, E. Tomboulis, and E. C. Poggio, *Phys. Rev.*, D11 (1975), 2839.
- [31] J. M. Cornwall, R. Jakiw, and E. Tomboulis, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 2428.
- [32] T. Banks, and S. Raby, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 2182.
- [33] F. Englert and R. Brout, *Phys. Lett.*, 49B (1974), 77.
- [34] 酈宇平、易余萍, 兰州大学学报, 1977, 2, 25.
- [35] P. Budini, *Acts. Phys. Aus'riaca, Suppli/2.* XV (1976), 499.
- [36] H. Georgi, H. R. Quinn, and D. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 33 (1974), 451.
- [37] 侯伯宇, 西北大学学报, 1976, 2—3, 12.
- [38] H. B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.*, B61 (1973), 45; Y. Nambu, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 4262.
- [39] T. Eguehi and H. Sugawara, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 4257; A. Chakrabarti and B. Hu, *Phys. Rev.*, D13 (1976), 2347.
- [40] P. D. Mannheim, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 2072.
- [41] H. Pagels, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 2747; *Ibid.* D15 (1977), 2991.