一个新的非标准Hilbert空间(II)*

王 进 儒

（华南工学院）

前 言

在〔1〕的§2中，我们曾把Hilbert空间H自然扩张成非标准Hilbert空间$^*H$：

$$^*H=\{{}^*x\mid {}^*x=[x_n],\ x_n\in H,\ n=1,2,\cdots\cdots\}.$$

$^*H$中的元$^*x=[x_n]$的范数为：

$$\|{}^*x\|=[\|x_n\|]\in{}^*R.$$

而在〔1〕的§3中把空间H中的自伴算子A扩张成$^*H$中的非标准自伴算子$^*A$：

$$^*A^*x=[Ax_n]\in{}^*H,$$

其中 $$^*x\in D(^*A)\equiv\{{}^*x\mid{}^*x=[x_n],\ x_n\in D(A),\quad n=1,2,\cdots\cdots\}.$$

并证明了当$\lambda\in\sigma_c(A)$时，在$^*H$中存在相应于λ的非标准本征元，且相应于不同的连续谱点的非标准本征元是相互直交的。然而在〔1〕中我们只讨论了算子A的连续谱点（$\lambda\in R$)及其相应的非标准本征元。在本文的§1中，我们将讨论算子$^*A$的预解集和谱（$^*\lambda\in{}^*C$）的定义及其性质。因为我们用的是初等方法，没有用到例如Robinson以数理逻辑为基础的转移定理（The Transfer Theorem）等结果。因此，我们不必限制空间H是可分的，而得出的某些结果，例如关于连续谱点的本征元问题（定理1.9）和Farrukh[3]中的相应定理来比较，觉得〔3〕要求的条件比较强，但得出的结果反而不如我们的好。

在§2中，我们把$^*H$中一切几乎相等(无限接近)的有限大的元归成等价类，每个等价类代表空间$\hat{H}$中的一个元，建立了Hilbert空间H的非标准外壳空间$\hat{H}$。这个思想是由Luxemburg在〔4〕中介绍的，不过我们没有看到〔4〕的原文，而只看到在〔5〕和〔6〕的序言中提到的〔4〕中的某些结果。然而我们的做法和他们的做法有所不同，例如〔6〕假定Hilbert 空间H是可分的，讨论的是超有限(Hyperfinite)

---

* 本文于1978年12月23日在中国数学年会泛函组报告

维子空间$\hat{S}$及算子的超有限扩张等。而我们用的是初等方法，没有限制Hilbert空间H是可分空间，也没有用“超有限”的方法。我们主要仍是研究连续谱点的本征元问题。用序列的方法证明了空间$\hat{H}$是完备空间，从而是Hilbert空间，H中的自伴算子A在$\hat{H}$上的扩张算子$\hat{A}$仍是自伴算子。证明了$\sigma(A)=\sigma(\hat{A})$并证明了算子$\hat{A}$的谱是纯点谱，于是就可以把$H$中自伴算子$A$的连续谱点的本征元问题转化为Hilbert空间$\hat{H}$中自伴算子$\hat{A}$的本征值和本征元的问题。

§1　算子$^*A$的预解集和谱

在这一节中我们用序列的方法，很自然地从算子A的预解集和谱得出算子$^*A$的预解集$\rho(^*A)$和谱$\sigma(^*A)$的定义及其性质。

定义1.1　设$^*C$是一切非标准复数组成的集[1]。对每一$^*\lambda=[\lambda_n]\in{}^*C$，令

$$S_1=\{n|\lambda_n\in\rho(A)\},\quad S_2=\{n|\lambda_n\in\sigma(A)\},$$

其中$\rho(A)$和$\sigma(A)$分别是自伴算子A的预解集和谱。又设F是自由超滤集（见[1]27页）。令

$$\rho(^*A)=\{^*\lambda|^*\lambda\in{}^*C,\ S_1\in F\},$$

$$\sigma(^*A)=\{^*\lambda|^*\lambda\in{}^*C,\ S_2\in F\}。$$

$\rho(^*A)$叫做算子$^*A$的预解集，$\sigma(^*A)$叫做算子$^*A$的谱。

引理1.2　$\rho(^*A)\cup\sigma(^*A)={}^*C,\ \rho(^*A)\cap\sigma(A)=\phi$　　（1）

证　因为自伴算子A的预解集$\rho(A)$和谱$\sigma(A)$具有关系式：

$$\rho(A)\cup\sigma(A)=C,\quad \rho(A)\cap\sigma(A)=\phi,\qquad (2)$$

其中C是全体复数（标准）组成的集。由定义1.1容易看出：对任意的$^*\lambda=[\lambda_n]\in{}^*C$，

$$S_1\cup S_2=N,\qquad S_1\cap S_2=\phi,$$

其中N是全体自然数组成的集，从而$S_2=N-S_1$。由超滤集F的性质得

$$S_1\in F\qquad 或\qquad S_2\in F,$$

于是　　$^*\lambda\in\rho(^*A)$　或　$^*\lambda\in\sigma(^*A)$.

所以　　$\rho(^*A)\cup\sigma(^*A)={}^*C$ 且 $\rho(^*A)\cap\sigma(^*A)=\phi$,

引理证完。

定理1.3　$^*\lambda\in\rho(^*A)$的充要条件是有这样一个正数（包括正无穷小）$^*r=[r_n]\in{}^*R$存在，使得对任意的$^*x\in D(^*A)$，都有

$$\|{}^*A{}^*x-{}^*\lambda{}^*x\|\geqslant{}^*r\|{}^*x\| \qquad (3)$$

证 1）必要性：设$\lambda^*=[\lambda_n]\epsilon\rho({}^*A)$，由定义1.1得

$$S_1=\{n|\lambda_n\epsilon\rho(A)\}\epsilon F。$$

而对于每一个属于S_1的自然数n，有标准实数$a_n>0$，使得对任意的$x\epsilon D(A)$，都有（〔2〕431页）

$$\|Ax-\lambda_n x\|\geqslant a_n\|x\|$$

取${}^*r=[r_n]$使

$$r_n=\begin{cases}a_n, & 当\quad n\epsilon S_1,\\ 0\ , & 当\quad n\epsilon N-S_1。\end{cases}$$

因为$S_1\epsilon F$，所以${}^*r=[r_n]>0$，于是对任意的${}^*x=[x_n]\epsilon D({}^*A)$都有

$$\|{}^*A{}^*x-{}^*\lambda{}^*x\|=[\|Ax_n-\lambda_n x_n\|]\geqslant[r_n\|x_n\|]={}^*r\|{}^*x\|。$$

2） 充分性：设存在正数${}^*r=[r_n]\epsilon{}^*R$，使得对一切的${}^*x=[x_n]\epsilon D({}^*A)$都有

$$\|{}^*A{}^*x-{}^*\lambda{}^*x\|\geqslant{}^*r\|{}^*x\|,$$

也就是 $S_1=\{n|\ \|Ax_n-\lambda_n x_n\|\geqslant r_n\|x_n\|,\quad r_n>0\}\epsilon F$.

因为每个$x_n\epsilon D(A)$是任意的，所以对每一个属于S_1的自然数n，都有$\lambda_n\epsilon\rho(A)$，再由定义1.1得

$${}^*\lambda=[\lambda_n]\epsilon\rho({}^*A).$$

定理证完。

定理1.4 如果非标准复数${}^*\lambda={}^*a+i{}^*b$的虚部${}^*b\neq0$，则${}^*\lambda\epsilon\rho({}^*A)$。

证 设${}^*\lambda=[\lambda_n]=[a_n+ib_n]={}^*a+i{}^*b$，其中$|{}^*b|=[|b_n|]>0$，则

$$S_1=\{n|\ |b_n|>0\}\epsilon F.$$

当$n\epsilon S_1$时，$\lambda_n=a_n+ib_n$是虚部不等于零的普遍通数，从而$\lambda_n\epsilon\rho(A)$ （〔2〕430页）。

由定义1.1得

$${}^*\lambda\epsilon\rho({}^*A).$$

定理证完。

如果${}^*b=0$，我们就说

$${}^*\lambda={}^*a+i{}^*b={}^*a\epsilon{}^*R$$

由定理1.4容易推出：

推论1.5　若$^*\lambda=[x_n]\in\sigma(^*A)$，则$^*\lambda\in{}^*R$。

在H中自伴算子A的谱$\sigma(A)$分成点谱$\sigma_p(A)$和连续谱$\sigma_c(A)$，即

$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)$，$\sigma_p(A)\cap\sigma_c(A)=\phi$

在$^*H$中非标准自伴算子$^*A$也有类似的定义和性质。

定义1.6　若$^*\lambda=[\lambda_n]\in{}^*R$满足

$$\{n|\lambda_n\in\sigma_p(A)\}\in F$$

就说$^*\lambda$属于算子$^*A$的点谱$\sigma_p(^*A)$；而

$$\sigma_c(^*A)=\sigma(^*A)-\sigma_p(^*A)$$

叫做算子$^*A$的连续谱。

由定义1.1和定义1.6容易推知

$$^*\lambda=[\lambda_n]\in\sigma_c(^*A)\rightleftharpoons\{n|\lambda_n\in\sigma_c(A)\}\in F \tag{4}$$

定理1.7　$^*\lambda\in\sigma_p(^*A)$的充要条件是存在$^*x\in D(^*A)$，$^*x\neq0$使得

$$^*A^*x={}^*\lambda^*x.$$

证　设$^*\lambda=[\lambda_n]\in\sigma_p(^*A)$，依定义1.6有

$$S=\{n|\lambda_n\in\sigma_p(A)\}\in F.$$

对每一个属于S的自然数n，有$x_n\in D(A)$，$x_n\neq0$满足

$$Ax_n=\lambda_nx_n;$$

而对于每一个属于$N-S$的自然数n，取$x_n=0$，令$^*x=[x_n]$，则

$$^*x=[x_n]\in D(^*A)$$

且

$$S=\{n|Ax_n=\lambda_nx_n,\ x_n\neq0\}\in F.$$

从而　$$^*A^*x={}^*\lambda^*x,\ {}^*x\neq0。$$

条件的充分性是显然的。定理证完。

定理1.8　若$^*\lambda$，$^*\mu\in\sigma_p(^*A)$且$^*\lambda\neq{}^*\mu$，

$$^*A^*x={}^*\lambda^*x,\ {}^*A^*y={}^*\mu^*y,$$

则　$$\langle^*x,{}^*y\rangle=0\ .$$

证　设$^*\lambda=[\lambda_n]$，$^*\mu=[\mu_n]$，$^*x=[x_n]$，$^*y=[y_n]$，因为

$$^*\lambda\neq{}^*\mu,\ {}^*A^*x={}^*\lambda^*x,\ {}^*A^*y={}^*\mu^*y,$$

从而　$$S_1=\{n|\lambda_n\neq\mu_n\}\in F,$$

$$S_2 = \{n \mid Ax_n = \lambda_n x_n\} \epsilon F .$$

$$S_3 = \{n \mid Ay_n = \mu_n y_n\} \epsilon F .$$

令 $$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3,$$

显然，$S \epsilon F$。因为在H中属于不同本征值的本征元是相互直交的，所以当 $n \epsilon S$ 时，$(x_n, y_n) = 0$，于是

$$\{n \mid (x_n, y_n) = 0\} \epsilon F,$$

从而 $$\langle {}^*x, {}^*y \rangle = [(x_n, y_n)] = 0$$

定理证完。

关于算子$^*A$的连续谱点及其相应的本征元，我们也有类似于定理1.8的定理，而且我们把它和点谱合在一起来研究。

定理1.9 若$^*\lambda \epsilon \sigma({}^*A)$，$^*\mu \epsilon \sigma({}^*A)$ 且 $^*\lambda \neq {}^*\mu$，$^*a = [a_n]$ 和 $^*b = [b_n]$ 是 $^*R$中的任意正的常数，则存在 $^*x \epsilon D({}^*A)$ 和 $^*y \epsilon D({}^*A)$ 满足

(i) $\|{}^*x\| = {}^*a$，$\|{}^*y\| = {}^*b$；

(ii) ${}^*A{}^*x \simeq {}^*\lambda{}^*x$，${}^*A{}^*y \simeq {}^*\mu{}^*y$；

(iii) $\langle {}^*x, {}^*y \rangle = 0$.

证 因为 $^*\lambda = [\lambda_n] \epsilon \sigma({}^*A)$，$^*\mu = [\mu_n] \epsilon \sigma({}^*A)$，由定义1.1知

$$S_1 = \{n \mid \lambda_n \epsilon \sigma(A)\} \epsilon F, \quad S_2 = \{n \mid \mu_n \epsilon \sigma(A)\} \epsilon F ;$$

又因为 $^*\lambda \neq {}^*\mu$，$^*a = [a_n] > 0$，$^*b = [b_n] > 0$，从而

$$S_3 = \{n \mid \lambda_n \neq \mu_n\} \epsilon F, \quad S_4 = \{n \mid a_n > 0\} \epsilon F,$$

$$S_5 = \{n \mid b_n > 0\} \epsilon F.$$

由超滤集的性质知

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \epsilon F.$$

对每一个属于S的自然数n，都有：$\lambda_n \epsilon \sigma(A), \mu_n \epsilon \sigma(A)$，$|\lambda_n - \mu_n| = r_n > 0$，$a_n > 0$，$b_n > 0$。令

$$\varepsilon_n = \min\left\{\frac{r_n}{3}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{a_n^2}, \frac{1}{b_n^2}\right\} \quad (n \epsilon S),$$

则区间 $\triangle_n = (\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n]$ 与区间$\triangle'_n = (\mu_n - \varepsilon_n, \mu_n + \varepsilon_n]$不相交。设 $\{E(\lambda)\}$ 是算子A的谱族，

$$E(\triangle_n) = E(\lambda_n + \varepsilon_n) - E(\lambda_n - \varepsilon_n),$$

$$E(\triangle'_n) = E(\mu_n + \varepsilon_n) - E(\mu_n - \varepsilon_n),$$

因为$\triangle_n$与$\triangle'_n$不相交，所以(〔2〕400页)

$$E(\triangle_n)E(\triangle'_n)=0 \qquad (n\in S).$$

令　$E(\triangle_n)D(A)=\{x \mid x\in D(A) \text{ 且 } E(\triangle_n)x=x\}$.

取　$x_n\in E(\triangle_n)D(A)$, $y_n\in E(\triangle'_n)D(A)$

且　$$\|x_n\|=a_n,\ \|y_n\|=b_n,\ (n\in S) \tag{6}$$

于是　$$\|Ax_n-\lambda_n x_n\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda-\lambda_n)^2 d\|E(\lambda)x_n\|^2$$

$$=\int_{\lambda_n-\varepsilon_n}^{\lambda_n+\varepsilon_n}(\lambda-\lambda_n)^2 d\|E(\lambda)x_n\|^2\leqslant\varepsilon_n^2 a_n^2\leqslant\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n^2},$$

从而　$$\|Ax_n-\lambda_n x_n\|\leqslant\frac{1}{n} \qquad (n\in S). \tag{7}$$

同样可得　$$\|Ay_n-\mu_n y_n\|\leqslant\frac{1}{n} \qquad (n\in S). \tag{8}$$

对于每一个属于$N-S$的自然数n，取

$$x_n=y_n=0.$$

根据以上所取就得到这样的

$$^*x=[x_n]\in D(^*A), \qquad ^*y=[y_n]\in D(^*A),$$

满足

(i)　由(6)式得

$$\|^*x\|=[\|x_n\|]=[a_n]={}^*a,$$

$$\|^*y\|=[\|y_n\|]=[b_n]={}^*b,$$

(ii)　由(7)式得

$$\|^*A^*x-{}^*\lambda^*x\|=[\|Ax_n-\lambda_n x_n\|]\leqslant[\frac{1}{n}]\simeq 0$$

即　$^*A^*x\simeq{}^*\lambda^*x$;

同样由(8)式得

$$^*A^*y\simeq{}^*\mu^*y.$$

(iii)　当$n\in S$时，$E(\triangle_n)E(\triangle'_n)=0$，因此

$$(x_n, y_n) = (E(\triangle_n)x_n, E(\triangle'_n)y_n) = 0,$$

从而　　$\langle {}^*x, {}^*y \rangle = [(x_n, y_n)] = 0$。

定理证完。

最后，把本文的定理1.9和Farrukh的文章[3]中的相应定理（定理3.3和定理3.4)进行比较，我们觉得：

（1）Farrukh[3]要求空间H是可分的，本文不需要限制空间H是可分的。

（2）〔3〕要求不同的连续谱点不能无限接近(即$\lambda \neq \lambda'$且$\lambda \not\simeq \lambda'$)因此在〔3〕的定理3.4中只限制讨论谱点的标准部分，而我们只要求不同的谱点(即只要求${}^*\lambda \neq {}^*\mu$，而不要求${}^*\lambda \not\simeq {}^*\mu$)。

（3）〔3〕要求超（连续谱点的)本征元的范数为1（即不包括无穷大范数)，而我们得出的${}^*x$的范数可以是任何正的非标准实数${}^*a$（包括正无穷大）。

（4）〔3〕得出的不同的连续谱点超本征元相互近似直交（即$\langle f, f' \rangle \simeq 0$），而我们得出的是相互直交（即$\langle {}^*x, {}^*y \rangle = 0$）。

（5）在方法上，〔3〕应用了Rabinson的以数理逻辑为基础的转移定理(见〔3〕定理2.2)，而我们用的是初等方法。

§2　Hilbert 空间H的非标准外壳

在〔1〕中我们为了解决自伴算子A的连续谱点的本征元问题，曾把空间H自然扩张成非标准Hilbert空间${}^*H$。如果我们把${}^*H$中几乎相等的有限大的元归成等价类，每一个等价类作为新空间$\hat{H}$的一元，则又回到标准的空间，下面我们将研究这个空间的定义及其性质。

${}^*H$中一切有限大的元组成${}^*H$的一个子空间${}^*H_0$，即

$${}^*H_0 = \{ {}^*x \mid {}^*x \in {}^*H, \|{}^*x\| \text{有限} \}; \tag{1}$$

${}^*H$中一切无穷小元组成一个无穷小子空间${}^*H_1$，即

$${}^*H_1 = \{ {}^*x \mid {}^*x \in {}^*H, \|{}^*x\| \text{是无穷小} \}. \tag{2}$$

定义2.1　设$\hat{H}$表示${}^*H_0$关于${}^*H_1$的商线性空间${}^*H_0/{}^*H_1$，设π表示映${}^*H_0$成$\hat{H}$的典型商映象。对于任意的$x \in \hat{H}$，$y \in \hat{H}$，有$p \in {}^*H_0$，$q \in {}^*H_0$使$x = \pi(p)$，$y = \pi(q)$。x与y的内积$\langle x, y \rangle$和x的范数由下式定义：

$$\langle x, y \rangle = \langle \pi(p), \pi(q) \rangle = st\langle p, q \rangle, \tag{3}$$

其中$st\langle p, q \rangle$表示$\langle p, q \rangle$的标准部分，

$$\|x\| = \|\pi(p)\| = st\|p\|. \tag{4}$$

空间$\hat{H}$叫做空间H的非标准外壳。

容易验证，$\hat{H}$是一个内积空间。即对任意的$x,y,z\in\hat{H}$及任意的$a\in C$（C是复数域），下列各式

1）　$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$;

2）　$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3）　$\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$;

4）　$\langle x, x\rangle \geqslant 0$，$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

成立。

定理2.2　空间$\hat{H}$是完备的。

证　设$\{y_i\}$是空间$\hat{H}$中的基本列。对每一个自然数i，有

$$f_i = [x_n^i] \in {}^*H_0 \quad 使$$

$$y_i = \pi(f_i) \qquad i = 1,2,\cdots,$$

其中　$x_n^i \in H$，$n = 1,2,\cdots$，　$i = 1,2,\cdots$。

因为$\{y_i\}$是基本列，所以对每一个自然数k，必存在自然数i_k，使得当$n \geqslant i_k$，$m \geqslant i_k$时

$$\|y_n - y_m\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

成立。不妨假设

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots,$$

于是　$$\|y_{i_k} - y_{i_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

由（4）式得

$$\|y_{i_k} - y_{i_{k+1}}\| = st\|f_{i_k} - f_{i_{k+1}}\|,$$

因此　$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{i_k} - f_{i_{k+1}}\| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 .$$

再由$^*H$的元的范数的定义[1]得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{i_k} - f_{i_{k+1}}\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty}\|x_n^{i_k} - x_n^{i_{k+1}}\|\right] < 1,$$

从而　$$S = \{n \mid \sum_{k=1}^{\infty}\|x_n^{i_k} - x_n^{i_{k+1}}\| < 1\} \in F .$$

因此对每一个属于S的自然数n，序列

$$\{x_n^{i_k}\} \quad k=1,2,\cdots$$

是空间H中的基本列。因为H是完备空间，从而有$x_n \epsilon H$使

$$\lim_{k\to\infty} x_n^{i_k} = x_n \qquad (n\epsilon S) \tag{5}$$

对于每一个属于$N-S$的自然数 n，令

$$x_n = 0 \qquad (n\epsilon N-S) \tag{6}$$

(5)式与(6)式确定了空间$^*H$中的一元$f=[x_n]$。

对任意的正数$\varepsilon\epsilon R$，有$j_\varepsilon \epsilon N$使

$$\sum_{k=j_\varepsilon}^{\infty} \|f_{i_k} - f_{i_{k+1}}\| = [\sum_{k=j_\varepsilon}^{\infty} \|x_n^{i_k} - x_n^{i_{k+1}}\|] < \varepsilon$$

因此有 $S_1 = \{n \mid \sum_{k=j_\varepsilon}^{\infty} \|x_n^{i_k} - x_n^{i_{k+1}}\| < \varepsilon\} \epsilon F$.

于是对每一个给定的 $n\epsilon S\cap S_1$ 及对任意的 $l\epsilon N$ 都有

$$\|x_n^{i_{j_\varepsilon}} - x_n^{i_{j_\varepsilon+l}}\| < \varepsilon$$

成立。令 $l\to\infty$取极限得

$$\|x_n^{i_{j_\varepsilon}} - x_n\| \leqslant \varepsilon \qquad (n\epsilon S\cap S_1).$$

因此 $\{n \mid \|x_n^{i_{j_\varepsilon}} - x_n\| \leqslant \varepsilon\} \epsilon F$

从而 $\|f_{i_{j_\varepsilon}} - f\| \leqslant \varepsilon$

由此推知 $\|f\| \leqslant \|f_{i_{j_\varepsilon}}\| + \epsilon$

因为$f_{i_{j_\varepsilon}} \epsilon ^*H_0$，所以 $f\epsilon ^*H_0$。令$y=\pi(f)$，则$y\epsilon\hat{H}$ 且

$$\|y_{i_{j_\varepsilon}} - y\| = \|\pi(f_{i_{j_\varepsilon}} - f)\| = st\|f_{i_{j_\varepsilon}} - f\| \leqslant \varepsilon$$

由 ε 的任意性及 $\{y_i\}$ 是 $\hat{H}$ 中的基本列推得

$$\lim_{i\to\infty} y_i = y$$

定理证完。

因此，空间 $\hat{H}$也是一个 Hilbert 空间。在〔1〕中我们曾把任一$x\epsilon H$看成是

$$x = [x] \epsilon ^*H$$

得出H是$^*H$的一个真子空间。现在我们再把每一$x\epsilon H$，看成是

$$x=\pi[x]\epsilon\hat{H}, \tag{7}$$

则得出 Hilbert 空间H是 Hilbert空间$\hat{H}$的一个子空间，

定义2.3 设A是Hilbert空间H中的有界自伴算子，$^*A$是算子A在空间$^*H$中的扩张算子([1]30页)，则由下式

$$\hat{A}(\pi(^*x))=\pi(^*A^*x) \qquad (^*x\epsilon^*H_0) \tag{8}$$

确定的算子$\hat{A}$是由$\hat{H}$到它自已的线性算子。

定理2.4 算子$\hat{A}$满足：

（i） $\hat{A}$是A的扩张算子；

（ii） $\|\hat{A}\|=\|A\|$；

（iii） $\hat{A}$是自伴算子。

证 (i) 由(7)式与(8)式及$^*A$是A的扩张算子知：对任意的$x\epsilon H\subset\hat{H}$有

$$\hat{A}x=\hat{A}(\pi[x])=\pi(^*A[x])=\pi([Ax])=Ax,$$

所以$\hat{A}$是A的扩张算子。

（ii） 对任意的$x\epsilon\hat{H}$，有$^*x=[x_n]\epsilon^*H_0$使$x=\pi(^*x)$，从而由(8)式与(4)式得

$$\begin{aligned}\|\hat{A}x\|&=\|\hat{A}(\pi(^*x))\|=\|\pi(^*A^*x)\|=st\|^*A^*x\|\\&=st[\|Ax_n\|]\leqslant st[\|A\|\ \|x_n\|]=\|A\|st[\|x_n\|]\\&=\|A\|st\|^*x\|=\|A\|\|\pi(^*x)\|=\|A\|\ \|x\|.\end{aligned}$$

于是　　$\|\hat{A}\|\leqslant\|A\|$。

但算子$\hat{A}$是算子A的扩张算子，所以

$$\|\hat{A}\|\geqslant\|A\|,$$

因此　　$\|\hat{A}\|=\|A\|$。

（iii） 对任意的$x,y\epsilon\hat{H}$，有$^*x,{}^*y\epsilon^*H_0$使得

$$x=\pi(^*x),\quad y=\pi(^*y),$$

从而

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}x,y\rangle&=\langle\pi(^*A^*x),\pi(^*y)\rangle=st\langle^*A^*x,{}^*y\rangle\\&=st\langle^*x,{}^*A^*y\rangle=\langle\pi(^*x),\pi(^*A^*y)\rangle\\&=\langle x,\hat{A}y\rangle.\end{aligned}$$

所以$\hat{A}$是自伴算子。定理证完。

算子$\hat{A}$既是$\hat{H}$中的自伴算子，则它的谱$\sigma(\hat{A})$只具有点谱和连续谱。现在我们证明$\hat{A}$具有纯点谱。

定理2.5　算子$\hat{A}$的谱是纯点谱。

证　设$\lambda\epsilon\sigma(\hat{A})$，则对于每一个自然数$k$，有$y_k\epsilon\hat{H}$，$\|y_k\|=1$，使得

$$\|\hat{A}y_k-\lambda y_k\|<\frac{1}{k}\qquad(k=1,2\cdots)$$

有　$f_k\epsilon{}^*H_0$，$y_k=\pi(f_k)$，于是

$$\|\hat{A}y_k-\lambda y_k\|=\|\pi({}^*Af_k)-\pi(\lambda f_k)\|=st\|{}^*Af_k-\lambda f_k\|$$

因此　$$\|{}^*Af_k-\lambda f_k\|<\frac{1}{k}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

又　$$f_k=[x_n^k]\qquad(k=1,2,\cdots)$$

其中　$$x_n^k\epsilon H,\qquad(n=1,2,\cdots)$$

因为　$$\|y_k\|=\|\pi f_k\|=st\|f_k\|=st[\|x_n^k\|]=1$$

$$\|{}^*Af_k-\lambda f_k\|=[\|Ax_n^k-\lambda x_n^k\|]<\frac{1}{k},\qquad(k=1,2,\cdots)$$

从而对每一个固定的自然数k,有自然数n_k使得

$$\frac{1}{2}<\|x_{n_k}^k\|<\frac{3}{2}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

及　$$\|Ax_{n_k}^k-\lambda x_{n_k}^k\|<\frac{1}{k}\qquad(k=1,2\cdots,)$$

令　$$f=[x_{n_k}^k]$$

则　$$\frac{1}{2}<\|f\|<\frac{3}{2}$$

$$\|{}^*Af-\lambda f\|=[\|Ax_{n_k}^k-\lambda x_{n_k}^k\|]<[\frac{1}{k}]\simeq 0$$

所以　$$\|{}^*Af-\lambda f\|\simeq 0$$

令　$$y=\pi(f)\epsilon\hat{H}$$

由(4)式得　$$\|y\|=st\|f\|\geqslant\frac{1}{2}.$$

$$\|\hat{A}y-\lambda y\|=\|\hat{A}(\pi(f))-\lambda\pi(f)\|=\|\pi({}^*Af-\lambda f)\|$$

$$=st\|{}^*Af-\lambda f\|=0$$

即　　$\hat{A}y=\lambda y$　　且$y\neq 0$，

所以　　$\lambda\epsilon\sigma_p(\hat{A})$

定理证完。

在Hilbert空间H中，自伴算子A的连续谱点没有相应的本征元。因此，仅在Hilbert空间H中讨论，是无法解决连续谱点的本征元问题的。可是把空间H和算子A扩张成空间$\hat{H}$和算子$\hat{A}$以后，因为算子$\hat{A}$具有纯点谱这一个好的性质，如果我们证明算子A的谱$\sigma(A)$（包括点谱和连续谱）和算子$\hat{A}$的谱一致，我们就可以把关于算子A的连续谱点的本征元问题转化为算子$\hat{A}$的本征值和本征元问题。

定理2.6　$\sigma(A)=\sigma_p(\hat{A})=\sigma(\hat{A})$．

证　因为算子$\hat{A}$是自伴算子A的扩张算子，所以

$$\sigma(A)\subseteq\sigma(\hat{A})\ .$$

另一方面，设　$\lambda\epsilon\sigma(\hat{A})$，在定理2.5的证明中有　$x^k_{n_k}\epsilon H$，满足

$$\frac{1}{2}<\|x^k_{n_k}\|<\frac{3}{2}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

及　　$\|Ax^k_{n_k}-\lambda x^k_{n_k}\|<\dfrac{1}{k}$　　$(k=1,2,\cdots)$

所以　　$\lambda\epsilon\sigma(A)$

于是　　$\sigma(A)\supseteq\sigma(\hat{A})$，

计及定理2.5就得

$$\sigma(A)=\sigma(\hat{A})=\sigma p(\hat{A})$$

定理证完。

参考文献

〔1〕王进儒，一个新的非标准Hilbert空間（Ⅰ），中山大学学报（自然科学版），1978，2，26～33.

〔2〕关肇直，泛函分析講义，高等教育出版社，1958.

〔3〕Farrukh M. O., Application of nonstandard analysis to quantum mechanics, *J. Math. phys.*, 16(1975), 177—200.

〔4〕W. A.J. Luxemburg, *A Ggeneral Theory of Monads, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*(Internat. Sympos, Pasadena, Calif., 1967), Holt, Rinehart and Winston, New york, 1969, 18—86. MR39# 6244.

〔5〕C. Ward Henson and L. C. Moore, Jr., Subspaces of the nonstandard hull of a normed space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 197 (1974), 131—143.

〔6〕L. C. Moore, Jr, Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 218(1976), 285—295.