对偶对称和磁荷守恒*

R. A. Brandt　　　杨纲凯
（美国纽约大学）　（香港中文大学）

摘　要

把Noether定理推广用来证明给出一个拉格朗日函数的具有守恒流J_μ的对称性G（例如通常的规范对称性），以及使“足够多”运动方程不变的另一变换D（例如对偶变换），则D把J_μ变换为第二个守恒流K_μ。这给出磁荷为什么守恒的基于对称性的论据，并且使不完全对称性（在阿贝尔以及非阿贝尔规范理论中的对偶不变性是一个例子）的概念精确化。

电动力学以及一般而言规范理论，现在成为粒子物理学中许多讨论的范例。特别是，在阿贝尔[1-3]和非阿贝尔[4-5]两种情形中，磁单极的理论可能性吸引了相当大的注意。狄拉克的磁单极理论使电动力学对于电和磁是对偶对称的，因此一个正确的非阿贝尔磁单极理论必须同样赋与杨—Mills场以对偶对称性。但是，在非阿贝尔磁单极的拉格朗日理论中，似乎不可能用多于不完全的方式来纳入对偶对称性——不仅拉格朗日函数，而且甚至一些尤拉—拉格朗日方程破坏对偶不变性。由此引出关于不完全对称性具有什么意义以及在什么程度上它是一种有用的概念的问题。

一个密切有关的问题是磁荷守恒$\partial^\mu K_\mu=0$。人们要问为什么K_μ守恒？为了把问题正确地表述，我们回到熟知的电流J_μ的情形。电流守恒由麦克斯韦方程

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}=J_\nu$$

和$F_{\mu\nu}$的反对称性导出。但是，有一个较好的理由：拉格朗日函数的规范不变性，而J_μ作为对应的守恒Noether流。这推理是更使人满意的，因为一个对称原理的存在保证守恒律不是偶然地出现的，而且保证它在量子化后仍然成立，记住这点，试问在多大程度上K_μ的守恒与对称性特别是与对偶对称性相联系，我们将用经典拉格朗日理论推演。概念和技巧将用阿贝尔情形说明；对于更感兴趣的非阿贝尔情形的推广是比较直接的，将在别处给出。

---

* 本文由楊綱凱在規范場專題討论会（广州，1978年5月）上报告，也是作者在物理学前沿国际会議（新加坡，1978年8月）上提出的论文。

I 作 用 量

几个等价的作用量描述点电荷和磁单极的互作用[2,8,9,10]，其中Dirac原先提出的可能是最简单的一个。但是，为了讨论规范变换，电流必须由带电的场而不由点粒子携带。因此，以下的作用量比较方便[6]：

$$I=\iint d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\right]$$

$$-\sum_i\int_{\Gamma_i}d\sigma\left[\dot{z}_i^\mu\,\phi_i^+(i\partial_\mu+eA_\mu)\phi_i+m_i\sqrt{\dot{z}_i^2}\right]$$

$$+\sum_i\int_{S_i}d\sigma d\tau\left[\widetilde{F}_{\sigma\tau}+\chi_i^\eta\dot{\partial}_\eta\right]M_i \tag{1}$$

第一行就是自由电磁场的作用量。Z_i^μ是第i个粒子的坐标，Γ_i是它的世界线，以σ为参数（$-\infty<\sigma<\infty$）。一点表示对σ的微分。带电的场ϕ_i只在Γ_i上定义：$\phi_i=\phi_i(\sigma)$，它规范不变地耦合于A_μ。场ϕ_i（规变可变）是不可观察的，它仅是实现规范变换的一种设置。

众所周知，磁单极的拉格朗日理论要求对每个磁单极附带一条“弦”，它随时间扫过一个二维面S_i，这曲面以σ和τ为参数：σ是世界线上的参数，$\tau(0\leqslant\tau<\infty)$是弦参数。为了弄清楚(1)式的最后一行，想象第$i$个磁单极起源于位在弦上的偶极子组成的半无穷线，其偶极密度为$Mi(\sigma,\tau)$，$\widetilde{F}_{\sigma\tau}$为限制在曲面$S_i$上的对偶张量$\widetilde{F_{\nu\mu}}$，而$\widetilde{F}_{\tau\sigma}M_i$项描述偶极密度与磁场的耦合。拉格朗日乘子$x_i^\eta$（$\eta=1,2$）约束$M_i$使它在曲面上为常数，加入边界值

$$M_i(\sigma,0)=g_i \tag{2}$$

使在弦端点上的磁单极有强度g_i。可以证实以上的直观图象，只要证明(1)式导致正确的运动方程，且场M_i和x_i^η是不可观察的。

作用量(1)式在规范变换G下当然是不变的，G定义为

$$\begin{aligned}G\colon\quad &A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial\Lambda(x)\\ &\phi(x)\to[\exp ie\Lambda(x)]\phi(x)\qquad x\in\Gamma_i\end{aligned} \tag{3}$$

对应总体变换$\Lambda(x)=$常数的守恒$Noether$流正比于

$$J_\mu(x)=\sum_i\int_{\Gamma_i}d\sigma\dot{z}_\mu\,\phi_i^+\phi_i\delta^4(x-z) \tag{4}$$

现在清楚，如果我们尝试推广到磁情形时会出现什么问题。只有一个规范场

A_μ，它通过在规范群G下协变的导数$i\partial_\mu+eA_\mu$与电耦合。没有第二个与磁耦合的规范场，也没有第二个规范群引起作为Noether流的磁流。回顾引入磁单极的原先动机是为了获得麦克斯韦方程的额外对称性——电和磁之间的对偶对称性。但是，在拉格朗日函数这一级上失去了对偶对称性。因此引起问题：给定一个变换D（例如对偶变换），它是运动方程的对称性，但不是拉格朗日函数本身的对称性，是否能导出一个守恒律？为此需要Noether定理的一个推广，现在我们离开主题来讨论它。

Ⅱ　Noether 定理的推广

给定一个拉格朗日函数L，它是一组场量和它们的导数的泛函：$L=L(\phi_i,\partial_\mu\phi_i)$，考虑一个变换$G$

$$G:\quad \phi_i\to\phi_i+\delta_G\phi_i \tag{5}$$

*Noether*定理指出若L在G下不变：$\delta_G L=0$（不动用到运动方程），则有一守恒流

$$J_\mu=J_\mu(\phi_i)=\frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi_i}\delta_G\phi_i \tag{6}$$

注意若一组变换G全都使L不变，它们必构成一个群。

假设有另一个无穷小变换D：

$$D:\qquad \phi_i\to\phi_i^D=\phi_i+\varepsilon\delta_D\phi_i \tag{7}$$

使得运动方程在D下不变。则我们断言存在第二个守恒流k_μ，它由下式给出

$$k_\mu(\phi_i)=\frac{1}{\varepsilon}\left[J_\mu(\phi_i)^D-J_\mu(\phi_i)\right] \tag{8}$$

上标D表示所有场量都在ϕ_i^D处取值。

这陈述的证明是直截的。考虑一个G变换。则

$$\delta_G L=\frac{\delta L}{\delta L_i}\delta_G\phi_i+\frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi_i}\delta_G(\partial_\mu\phi_i)=F(\phi_i)\delta_G\phi_i+\partial_\mu J^\mu(\phi_i) \tag{9}$$

其中

$$F(\phi_i)=\frac{\delta L}{\delta\phi_i}-\partial_\mu\frac{\delta L}{\delta\partial_\mu\phi_i} \tag{10}$$

而J_μ由(6)式定义。尤拉－拉格朗日运动方程为

$$F(\phi_i)=0 \tag{11}$$

我们强调(9)式是一恒等式，对所有场成立，不管运动方程(11)式是否满足。若G为拉氏函数的不变性，则恒有$\delta_G L=0$，同时

$$0=F(\phi_i)\delta_G\phi_i+\partial_\mu J^\mu(\phi_i)$$

若把此式在 $\phi_i=\phi_i^D$ 处取值，则

$$0=F(\phi_i)^D(\delta_G\phi_i)^D+\partial_\mu J^\mu(\phi_i)^D$$

若运动方程对D不变，即

$$F(\phi_i)^D=0 \tag{12}$$

则我们得

$$0=\partial_\mu J^\mu(\phi_i)^D=\partial_\mu J^\mu(\phi_i)+\varepsilon\partial_\mu K^\mu(\phi_i)$$

因而K^μ守恒是J^μ守恒的推论。

如所周知，运动方程的一个不变性（例如D）本身不足以保证有一个守恒律。但是，以上的推导证明，给出第一个$Noether$守恒律($\partial_\mu J^\mu=0$)，D导致第二个守恒律($\partial_\mu K^\mu=0$)．现在按次序讲几点其他注记：

(a)我们只须考虑一个无穷小变换D，不要求D的变换类构成一个群。

(b)D本身不和一个守恒律联系。如果我们想象D为对偶变换而G为（电)规范变换，则新的守恒流不是一个“对偶流”，而是电流的对偶变换。

(c)推导中指出，所有运动方程对D不变是充分条件，但不是必要条件：我们所要求的不过是和式$F(\phi_i)^D(\delta_G\phi_i)^D$为零。粗略地说，只要求由对规范可变的场（$(\delta_G\phi_i)^D\neq0$)变分而得的方程为对偶不变($F(\phi_i)^D=0$).在下面将用到这个较为放宽的条件。

(d)在核对

$$F(\phi_i)^D(\delta_G\phi_i)^D=0$$

是否成立时我们可以用运动方程。（在完成变分**之后**，通常对禁止使用运动方程的限制不再适用。这情况类似于在对一函数$f(x)$微分之前不能在某一个特殊x值上取值；但在微分之后可以这样做)。由于用 $F(\phi_i)=0$得

$$F(\phi_i)^D=F(\phi_i)+O(\varepsilon)=O(\varepsilon)$$

无论如何，我们只计算到$O(\varepsilon)$,$(\delta_G\phi_i)^D$只需算到ε零级，即可令

$$(\delta_G\phi_i)^D\cong\delta_G\phi_i$$

扼要地说，为了得到第二个守恒流，只要核对（必要时应用运动方程）下式就够了。

$$F(\phi_i)^D\delta_G\phi_i=0 \tag{13}$$

满足(12)式的变换D可以称为**次级对称性**；满足(13)而不满足(12)的变换称为**不完全次级对称性**。两者都导致新的守恒律。这些考虑澄清了不完全对称性的精确含义。文献〔7〕中给出一些简单例子，包括围绕一个无限重的点磁单极运动的电荷的角动量的推导，所用方法不需用到一个补偿的规范变换。在下一节中我们把推广的$Noether$定理应用到阿贝尔磁单极情形的对偶对称性。

Ⅲ　对偶对称性和磁荷守恒

为应用上述定理，我们首先必须构成D变换，它必须使

$$J_\mu \to J_\mu + \varepsilon K_\mu \tag{14}$$

其中

$$J_\mu(x) = \sum_i \int_{\Gamma_i} d\sigma \dot{z}_\mu \phi_i^\dagger \phi_i \delta^4(x-z)$$

$$K_\mu(x) = \sum_i \iint_{\Gamma_i} d\sigma \dot{z}_\mu M_i(\sigma,\tau=0)\delta^4(x-z)$$

因为由(2)式，$M_i(\sigma,0)$正是磁荷g_i。我们选

$$D: \ \phi_i(\sigma) \to \phi_i^D(\sigma) = \phi_i(\sigma) + \frac{\varepsilon}{2} M_i(\sigma,0)\phi_i(\sigma)/|\phi_i(\sigma)|^2 \tag{15a}$$

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}^D = F_{\mu\nu} + \varepsilon \widetilde{F}_{\mu\nu} \tag{15b}$$

所有其他场对D不变。(15a)式显然实现(14)式，注意我们不要求K_μ变换回到$K_\mu - \varepsilon J_\mu$。

剩下证实(13)式，即

$$F(\phi_i)^D \delta_G \phi_i = 0$$

在独立的场$\phi_i = (F_{\mu\nu}, A_\mu, z_i, \overset{+}{\phi_i}\phi_i, x_i, M_i)$中只有两个在总体规范变换下变化($\delta_G\phi_i \neq 0$)，即$\phi_i^+$和$\phi_i$，相应的运动方程为

$$F(\overset{+}{\phi_i}) = (i\partial_\sigma + eA_\sigma)\phi_i = 0 \tag{16a}$$

$$F(\phi_i) = (-i\partial_\sigma + eA_\sigma)\overset{+}{\phi_i} = 0 \tag{16b}$$

我们需要核对这两方程为对偶不变($F(\phi_i)^D = 0$)。运动方程暗示M_i和$|\phi_i|^2$为常数，因此$\overset{D}{\phi_i}$简单地正比于ϕ_i，而

$$F(\phi_i^+)^D = (i\partial_\sigma + eA_\sigma)\phi_i^D = 0$$

同样对(16b)式亦然。因此足够多的运动方程（即16a,b)为对偶不变，因而保证K_μ守恒。

以上的考虑阐明不完全对偶不变性和磁流守恒之间的关系。

参考文献

〔1〕 P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133. 60 (1931).
〔2〕 P. A. M. Dirac, Phys. Rev. 74, 817 (1948).
〔3〕 T. T. Wu, C. N. Yang, phys. Rev. D14, 437(1976).
〔4〕 C. N. Yang, R.L. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
〔5〕 T. T. Wu, C. N. Yang, Phys. Rev. D12, 3845 (1975).
〔6〕 R. A. Brandt, F. Neri, NYU Preprint (1978).
〔7〕 R. Brandt, K.Young (在写作中).
〔8〕 J. Schwinger, Phys, Rev. D12, 3105 (1975).
〔9〕 T. M. Yan, Phys. Rev. 150, 1349 (1968).
〔10〕 D. Zwanziger, Phys. Rev. D 3, 880 (1971).

(郭硕鸿译)

更　正

本刊第一期“4—6月华南地区西南风低空急流的形成、移动及其预报的研究”一文的勘误：

页	行	误	正
132—133		$\vec{\omega}$	ω
134		位势梯度作功	位势梯度力作功
134	倒 4	展开式代入上式	展开式取地转风代入上式
134	倒 4	且等高线与流线	且S与流线
136		V	V_s