樣条函数的共轭插值(I)

——多项式样条

李岳生

（计算机科学系）

本文解决了多项式样条的共轭插值问题，得到了相互共轭插值问题的秩的对偶关系，给出了插值问题及其共轭问题可解性的充要条件，阐明了解集合的结构以及插值余项核的特征性质。

1 问题的提法和结果

给定区间$[a,b]$上的两个分划

$$\pi=\{x_i\}_0^{k+1}: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{k+1}=b,$$

$$\pi'=\{t_\mu\}_0^{l+1}: \quad a=t_0<t_1<\cdots<t_{l+1}=b,$$

又相应给出π和π'上的重结点多项式样条函数空间$S_{\pi,n}$和$S_{\pi',n'}$：

$$S_{\pi,n}:=\left\{u(x):u(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i x^i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\frac{(x-x_i)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\right\}$$

$$S_{\pi',n'}:=\left\{u(t):\ v(t)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\lambda_\mu t^\mu+\sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}\frac{(t_\mu-t)_+^{m-\nu-1}}{(m-\nu-1)!}\right\}$$

其中 x_i,t_μ分别为$u(x)$和$v(t)$的r_i重和ρ_μ重样条结点。又

$$n=m+\sum_{i=1}^{k}r_i, \qquad n'=m+\sum_{u=1}^{l}\rho_\mu$$

分别为$S_{\pi,n}$和$S_{\pi',n'}$的维数。

下面总假定：

i) $0\leqslant r_i\leqslant m, \qquad i=1,\cdots,k,$

$0\leqslant\rho_\mu\leqslant m, \qquad \mu=1,\cdots,l$.

ii) 若$x_i=t_\mu$，则$r_i+\rho_\mu\leqslant m$；

iii) 下面将出现的非负整数 r_0，r_{k+1}，ρ_0，ρ_{l+1}

满足 $\rho_0+r_0=\rho_{l+1}+r_{k+1}=m$.

样条插值问题I：求$u(x)\in S_{\pi,n}$，使满足

$$U_{\mu\nu}u=U_{\mu\nu}f,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1 \tag{1.1}$$

其中 $U_{\mu\nu}g\equiv g^{(\nu)}(t_\mu)$;

样条共轭插值问题I^*：求$v(t)\in S_{\pi',n'}$，使满足

$$V_{ij}v=V_{ij}f,\quad 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\quad 0\leqslant i\leqslant k+1 \tag{1.2}$$

其中 $V_{ij}g\equiv g^{(j)}(x_i)$。

以上假定$f(x)$为被插函数，自然在(1.1)和(1.2)中，可以分别用定离散值$\{y_\mu^{(\nu)}\}$、$\{z_i^{(j)}\}$代$\{U_{\mu\nu}f\}$和$\{V_{ij}f\}$。

令$\{\varphi_\nu(x)\}_1^n$、$\{\psi_j(t)\}_1^{n'}$分别为$S_{\pi,n}$和$S_{\pi',n'}$的任一基函数系，则

$$u(x)=\sum_{j=1}^n c_j\varphi_j\in S_{\pi,n},\qquad v(t)=\sum_{j=1}^n \widetilde{c_j}\psi_j(t)\in S_{\pi',n'}.$$

于是问题I和I'归结为如下线代数方程组的求解问题：

$$\Gamma c=F \tag{I}$$

$$\widetilde{\Gamma}\,\widetilde{c}=\widetilde{F} \tag{I*}$$

其中 $c=(c_1,\cdots,c_n)^T$，$F=(U_1f,\cdots,U_Nf)^T$，

$$\Gamma=(U_\mu\varphi_\nu)_{\mu=1,\ \nu=1}^{N\quad n}\cdots N\times n\text{矩阵},$$

$$N=\sum_{\mu=0}^{l+1}\rho_\mu$$

$$\{U_\mu\}_1^N:=\{U_{0,0},\cdots,U_{0,\rho_0-1},U_{1,0},\cdots,U_{l+1,\rho_{l+1}-1}\};$$

相应地，有

$$\widetilde{c}=(\widetilde{c_1},\cdots,\widetilde{c_{n'}})^T,\widetilde{F}=(V_1f,\cdots,V_{N'}f)^T,$$

$$\widetilde{\Gamma}=(V_i\psi_j)_{i=1,\ j=1}^{N'\quad n'},$$

$$N'=\sum_{i=0}^{k+1}r_i,$$

$$\{V_i\}_1^{N'}:=\{V_{0,0},\cdots,V_{0,r_0-1}V_{1,0},\cdots,V_{k+1,r_{k+1}-1}\}.$$

关于问题I，I^*有下列结果

定理1 设问题I的端点条件数为$p=\rho_0+\rho_{l+1}$，Γ的秩$Rank(\Gamma)=q$，$Rank(\widetilde{\Gamma})=q'$，则

$$q'=q+m-p \tag{1.3}$$

由于Γ和$\widetilde{\Gamma}$的秩和基函数系的选择无关，故可称q为问题I的秩，q'为问题I^*的秩。

定理2 对任一非齐右端$\{U_\mu f\}_1^N$，问题I可解的充分必要条件是：

$$\gamma(v)F=\sum_{\mu=1}^N\gamma_\mu(v)U_\mu f=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}(v)U_{\mu\nu}f=0 \tag{1.4}$$

对一切$v\in S_{\pi',n'}\cap \overset{*}{I_0}$成立。这里$\overset{*}{I_0}$表示满足插值问题$I^*$的齐条件的函数集，即

$$\overset{*}{I_0}:=\{u(t):V_{ij}v=0,\ 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1\}$$

又

$$\gamma_{\mu\nu}(v)=[v^{(m-\nu-1)}(t_\mu)](-1)^{m-\nu} \tag{1.5}$$
$$0\leqslant \nu\leqslant \rho_\mu-1,\ 0\leqslant \mu\leqslant l+1$$

其中$[g(t_\mu)]=g(t_\mu+0)-g(t_\mu-0)$当$a<t_\mu<b$；或$=g(a+0)$当$t_\mu=a$；或$=-g(b-0)$当$t_\mu=b$。

定理3 设$\{U_{\mu\nu}f\}$满足定理2的条件(1.4)，则问题I的通解为

$$u(x)=u_0(x)+c_1u_1(x)+\cdots+c_{n-q}u_{n-q}(x) \tag{1.6}$$

其中u_0为问题I的任一特解，$\{u_i\}_1^{n-q}$为齐插值问题I的基础解。

由于共轭性，相应于定理2,3有下列

定理2′ 插值问题I^*可解的充要条件是

$$\beta(u)\widetilde{F}=\sum_{i=1}^{N'}\beta_i(u)V_if=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(u)V_{ij}f=0 \tag{1.4'}$$

对一切$u\in S\pi,n\cap I_0$成立，其中

$$I_0:=\{u(x):U_{\mu\nu}u=0,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\ 0\leqslant\mu\leqslant l+1\}$$
$$\beta_{ij}(u)=[u^{(m-j-1)}(x_i)](-1)^j,\ 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1 \tag{1.5'}$$

定理3′ 设$\{V_{ij}f\}$满足(1.4)′，则插值问题I^*的通解为

$$v=v_0+\widetilde{c}_1v_1+\cdots+\widetilde{c}_{n'-q'}u_{n'-q'}$$

其中u_0为问题I^*的任一特解，$\{v_i\}_1^{n'-q'}$为I^*的相应齐问题的任一组基础解。

定理4 问题I的解存在而且唯一的充分必要条件是问题I^*的解存在而且唯一，换言之，如果Γ为方阵且非异，即

$$N=n\quad 且\quad Det(\Gamma)\neq 0 \tag{1.7}$$

则$\widetilde{\Gamma}$亦为方阵且非异，即

$$N'=n'\quad 且\quad Det(\widetilde{\Gamma})\neq 0 \tag{1.7'}$$

反之亦然。

定理4的结果，[3]中已经得到。

定理5 设问题I唯一可解，$f\in C^m[a,b]$为被插函数，则插值余项可表示为

$$Rf(x)=\int_a^bK(x,t)f^{(m)}(t)dt\qquad a\leqslant x\leqslant b \tag{1.8}$$

其中

$$K(x,t)=R_x\left\{\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\right\}=R_t^*\left\{\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\right\}$$

$R_x\{\cdot\}$表示作为x的函数按插值问题I的插值余项，$R_t^*\{\cdot\}$表示作为t的函数按共轭插值问题I^*的插值余项。又插值问题I^*的余项为

$$R^*f(x)=(-1)^m\int_a^b K(t,x)f^{(m)}(t)dt \qquad (1.8)'$$

且 $K(x,t)$具有下列特征性质：

i) 对任意固定t，$a<t<b$，作为x的函数是$m-1$次多项式样条，x_i是它的r_i重结点$(i=1,\cdots h)$，t是它的单结点；

ii) 对任意固定x，$a<x<b$，作为t的函数也是$m-1$次多项式样条，t_μ是它的ρ_μ重结点（$u=1$，…，l），此外x为它的单结点；

iii) 作为x的函数，满足问题I的齐条件：

$$U_{\mu\nu}K(x,t)=0,\ 0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1,\quad 0\leqslant\mu\leqslant l+1;$$

iv) 作为t的函数，满足问题I^*的齐条件：

$$V_{ij}K(x,t)=0,\quad 0\leqslant j\leqslant r_i-1,\ 0\leqslant i\leqslant k+1.$$

最后，当m为偶数，$k=l$，$\rho_0=r_0=\frac{m}{2}$，$\rho_{k+1}=r_{k+1}=\frac{m}{2}$ $p_i=r_i\leqslant\frac{m}{2}$，$i=1$，…，$k$时，问题$I$是自共轭的即$I^*=I$。此时$K(x,t)=K(t,x)$。

2 定理的证明

引理1 设$u\epsilon S_{\pi,n}$，$v\epsilon S_{\pi',n'}$，则

$$\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(u)v^{(j)}(x_i)=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}(v)u^{(\nu)}(t_\mu) \qquad (2.1)$$

其中$\gamma_{\mu\nu}(v)$定义如(1.5)，$\beta_{ij}(u)$定义如(1.5)′。

证明 首先注意，出现在(2.1)中的量都是有意义的。事实上，$x_i\neq t_\mu$时是显然的，既使$x_i=t_\mu$，由于总的假设ii) $r_i+\rho_\mu\leqslant m$，及x_i为$u(x)$的r_i重结点，从而在x_i的邻域内，$u(x)\epsilon C^{m-r_i-1}\subset C^{\rho_\mu-1}$故$\overset{(\nu)}{u}(t_\mu)$对$\nu=0$，…，$\rho_\mu-1$有意义。

下面为明确计，无妨设$x_i<t_\mu<\cdots t_{\mu+\lambda}<x_{i+1}$，对$u\epsilon S_{\pi,n}$，$v\epsilon S_{\pi',n'}$，将下列积分进行分部积分，有

$$0=\int_{x_i}^{x_{i+1}}u^{(m)}vdx=\sum_{\nu=\mu}^{\mu+\lambda-1}\{u^{(m-1)}v-u^{(m-2)}v'+\cdots+$$

$$(-1)^{m-1}uv^{(m-1)}\}\Big|_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}+\{\cdots\}\Big|_{x_i}^{t_\mu}+\{\cdots\}\Big|_{t_{\mu+\lambda}}^{x_{i+1}} \qquad (2.2)$$

将(2.2)对i求和并整理，便得

$$0=\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}u^{(m)}vdx=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}u^{(\nu)}(t_\mu)\gamma_{\mu\nu}(v)-\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}v^{(j)}(x_i)\beta_{ij}(u) \quad (2.3)$$

定理 1 的证明

由于$Rank(\Gamma)=q$，故与(I)相应的齐插值问题所对应的齐线性代数方程组

$$\Gamma c=0 \tag{2.4}$$

有$n-q$个线性无关解，记为$c^{(i)}=(c_1^{(i)}\cdots,c_n^{(i)})^T$，$i=1,\cdots,n-q$，相应地 $u_i=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu^{(i)}\varphi_\nu$ 便是齐插值问题I的$n-q$个线性无关解。于引理 1 的(2.1)中，令$u=u_\alpha$，$v=\phi_s$，我们得

$$\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(u_\alpha)\phi_s^{(j)}(x_i)=\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}(\phi_s)u_\alpha^{(\nu)}(t_\mu)=0$$

$$\alpha=1,\ \cdots,\ n-q,\ s=1,\ \cdots,\ n' \tag{2.5}$$

(2.5)的矩阵形式是

$$\beta(u_\alpha)\widetilde{\Gamma}=0\quad \alpha=1,\cdots,\ n-q \tag{2.6}$$

其中 $\beta(u_\alpha)$为以$\beta_{ij}(u_\alpha)$为分量的N'维行向量。由于 $\beta(u_1),\cdots,\beta(u_{n-q})$ 为$n-q$个线性无关向量，可见(2.6)至少有$n-q$个线性无关解，而$\beta(u_\alpha)$的维数是 N'，的$\widetilde{\Gamma}$的秩q' 最多是

$N'-(n-q)=\sum_{i=0}^{k+1}r_i-(m-q+\sum_{i=1}^{k}r_i)=r_0+r_{k+1}-m+q=m-p+q$ （由于假设iii)及 $p=\rho_0+\rho_{l+1}$)

即有

$$q'\leqslant m-p+q \tag{2.7}$$

然后利用共轭性，并注意对应关系$q\leftrightarrow q'$，$p\leftrightarrow 2m-q$，于是有对应于(2.7)的不等式

$$q\leqslant m-(2m-p)+q'$$

即

$$q'\geqslant m-p+q \tag{2.8}$$

结合(2.7)和(2.8)，便得(1.3)，即定理 1 得证。

需要补充说明的是，从$u_1\cdots$，u_{n-q}的线性无关性，的确可以推出$\beta(u_1)$，$\cdots$，$\beta(u_{n-q})$的线性无关性．用反证法，如若不然，则存在不全为零的常数λ_1，$\cdots$，λ_{n-q}使

$$\lambda_1\beta(u_1)+\cdots+\lambda_{n-q}\beta(u_{n-q})=0 \tag{2.9}$$

由于$\beta(u)$是u的线性向量值函数，故由(2.9)推得

$$\beta(u)=0 \tag{2.10}$$

其中 $u=\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_{n-q}u_{n-q}$，(2.10)意味着$u(x)$于各内结点 x_i，$i=1,\cdots,k$ 处有直到$m-1$阶的连续导数，从而$u(x)$为$[a,b]$上的$m-1$次多项式，又由于u满足问题I 的齐条件和(2.10)中的端点条件，故可断言

$$u^{(j)}(a+0)=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant Max\{r_0-1,\rho_0-1\}, \tag{2.11}$$

$$u^{(j)}(b-0)=0,\qquad 0\leqslant j\leqslant Max\{r_{k+1}-1,\ \rho_{l+1}-1\}$$

由于假设 iii)，(2.11)说明$u(x)$在$[a,b]$上至少有m个根(计及重根)，故$u\equiv0$，这和u_1，$\cdots$，u_{n-q}线性无关的假设相冲突，从而$\beta(u_1)$，$\cdots$，$\beta(u_{n-q})$的线性无关性得证．定理 1 证完．

在证定理 2 之前，先证

引理 2 设$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$为$N$维向量，则

$$\gamma\Gamma=0 \tag{2.12}$$

的充要条件是γ可表成$\gamma(v_1),\cdots,\gamma(v_{N-q})$的线性组合，即$\gamma\epsilon Span(\gamma(v_1),\cdots,\gamma(v_{N-q}))$，这里$v_i\epsilon S_{\pi',n'}\cap I_0^*$，$i=1,\cdots,N-q$为线性无关函数。

证明 必要性 设$v\epsilon S_{\pi',n'}\cap I_0^*$，据引理1，对$u=\varphi_s\epsilon S_{\pi,n}$有

$$0=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(\varphi_s)v^{(j)}(x_i)$$

$$=\sum_{u=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_u-1}\gamma_{u\nu}(v)\varphi_s^{(\nu)}(t_u),\qquad S=1,\cdots,n. \tag{2.13}$$

即

$$\gamma(v)\Gamma=0$$

充分性 据定理1，由于问题I^*的秩为q'，故有$n'-q'$个线性无关解$v_i,i=1,\cdots,n'-q'$.易见$n'-q'=m+\sum_{u=1}^{l}\rho_u-(m-p+q)=\sum_{u=1}^{l}\rho_u+p-q=N-q$，可见$\{v_i\}_1^{N-q}$线性无关，进而$\{\gamma(v_i)\}_1^{N-q}$线性无关(理由如定理1最后一段的证明)但方程组(2.12)最多有$N-q$个线性无关解，故凡满足(2.12)的$\gamma\epsilon Span(\gamma(v_1),\cdots,\gamma(v_{N-q}))$，证完。

定理2的证明 必要性 设$u=c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n$为问题$I$的解，则对任一$v\epsilon S_{\pi',n'}\cap I_0^1$，由引理1有

$$0=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}(u)v^{(j)}(x_i)$$

$$=\sum_{u=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_n-1}\gamma_{u\nu}(v)u^{(\nu)}(t_u)=\gamma(v)\Gamma c \tag{2.14}$$

由假设知$\Gamma c=F$，故由(2.14)推得$\gamma(v)F=0$，即必要条件(1.4)得证。

充分性 由线代数定理知，$\Gamma c=F$可解的充要条件是，对任一满足(2.12)的行向量γ，皆有$\gamma F=0$.而据引理2，这又等价于$\gamma(v)F=0$，对$v\epsilon S_{\pi',n'}\cap I_0'$. 定理2证完。

定理3的证明 由于齐线代数方程组

$$\Gamma c=0$$

有$n-q$个线性无关解，相应地齐插值问题I恰有$n-q$个线性无关解$\{u_i(x)\}_1^{n-q}$而非齐插值问题I的任二解$u(x)$和$u_0(x)$之差$u(x)-u_0(x)$乃是相应齐插值问题的解，故$u(x)-u_0(x)$可表成$c_1u_1+\cdots c_{n-q}u_{n-q}$，定理3得证。

定理$2'$，$3'$的证明类似，故从略。

定理4是定理2的推论。

定理5的证明，根据

$$f(x)=p_{m-1}(x)+\frac{1}{(m-1)!}\int_a^b (x-t)_+^{m-1} f^{(m)}(t)dt$$

两边用问题I的余项算子R作用，并注意$Rp_{n-1}=0$，即得余项表达(1.8)。

用$Inf(x)$和$I_n^*f(x)$分别表示$f(x)$关于插值问题I和I^*的插值样条函数，不难证明

$$I_{nx}\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}=I_{nt}^*\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!} \tag{2.15}$$

从而

$$\begin{aligned}K(x,t)&=R_x\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}=\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}-I_{nx}\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\\&=\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}-I_{nt}^*\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}=R_t^*\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\end{aligned} \tag{2.16}$$

据表达式(2.16)不难证明$K(x,t)$的四条特征性质，证明略。

最后，问题I^*的余项核为

$$\begin{aligned}R_x^*(-1)^m\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}&=R_t\frac{(x-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}(-1)^m\\&=R_t\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}(-1)^m+R_t\frac{(t-x)_+^{m-1}}{(m-1)!}\\&=R_t\frac{(t-x)_+^{m-1}}{(m-1)!}=K(t,x).\end{aligned}$$

还有定理5最末关于自共轭性的断言，也是明显的。定理5证完。

3　对样条HB插值的推广

按照[4]，引入样条HB插值的关联矩阵（*incidence matrix*）E和$\widetilde{E}$：

$$E=(e_{ij})_{i=0,\ j=0}^{k+1,\ m-1},\qquad e_{ij}=0\text{或}1,$$

$$\widetilde{E}=(\widetilde{e}_{\mu\nu})_{\mu=0,\ \nu=0}^{l+1,\ m-1},\qquad \widetilde{e}_{\mu\nu}=0\text{或}1$$

又令

$$n=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}e_{ij}+m,\quad n'=\sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=0}^{m-1}\widetilde{e}_{\mu\nu}+m$$

$$S:=\left\{u(x):u(x)=p_{m-1}(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m-1}\beta_{ij}\frac{(x-x_i)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\right.$$

$$\left.\text{且当}e_{ij}=0\text{时}\ \beta_{ij}=0\quad\right\}$$

$$S':=\{v(t):\ v(t)=p_{m-1}(t)+\sum_{\mu=0}^{l}\sum_{\nu=0}^{m-1}\gamma_{\mu\nu}\frac{(t_\mu-t)_+^{m-1}}{(m-\nu-1)!}$$

$$\text{且当}\ \tilde{e}_{\mu\nu}=0\text{时}\quad \gamma_{\mu\nu}=0\ \}$$

其中$p_{m-1}(x)$为任一$m-1$次多项式。

关于联阵E，$\tilde{E}$，总假设满足。

i) $e_{0j}+\tilde{e}_{0,m-j-1}=1,\quad e_{k+1,j}+\tilde{e}_{l+1,m-j-1}=1,$

ii) $e_{ij}+\tilde{e}_{\mu,m-j-1}\leqslant 1$ 当$x_i=t_\mu$时.

相应地将插值问题I修改成问题II：求$u\epsilon S$，使

$$u^{(\nu)}(t_\mu)=f^{(\nu)}(t_\mu)\qquad \text{当}\ \tilde{e}_{\mu\nu}=1\text{时},\quad 0\leqslant\nu\leqslant m-1,\quad 0\leqslant\mu\leqslant l+1.$$

插值问题II^*：求$v\epsilon S'$使

$$v^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\qquad \text{当}e_{ij}=1\text{时}\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,\quad 0\leqslant i\leqslant k+1.$$

前面诸定理1—5，可以完全平行推广到这里的问题II和II^*，定理的形式也完全保持，只要作几点补充说明：

1) 定理1中的p应理解为

$$p=\sum_{\nu=0}^{m-1}\tilde{e}_{0,\nu}+\sum_{\nu=0}^{m-1}\tilde{e}_{l+1,\nu}$$

2) 出现在各定理和引理中$\beta_{ij}(u)$只要对 $e_{ij}=1$时 加以定义，$\gamma_{\mu\nu}(v)$只对 $\tilde{e}_{\mu\nu}=1$时给定义，从而各求和式中也相应要附加$e_{ij}=1$，$\tilde{e}_{\mu\nu}=1$的条件。

3) $K(x,t)$ 的零点性质，须理解为

$$U_{\mu\nu}K(x,\ t)=0\qquad \text{当}\ \tilde{e}_{\mu\nu}=1\text{时},$$

$$V_{ij}K(x,\ t)=0\qquad \text{当}\ e_{ij}=1\text{时}.$$

4 举 例

例1令

$$\pi:=\{x_i\}_0^1:\ a=x_0<x_1=b,$$

$$\pi':=\{t_\mu\}_0^{m+1}:\ a=t_0<\cdots<t_{m+1}=b$$

$S_{\pi,n}:=P_{m-1}\cdots m-1$次多项式集合，

$$S_{\pi',n'}:=\left\{v(t):\ v(t)=\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i t^i+\sum_{\mu=1}^{m}\gamma_\mu\frac{(t_\mu-t)_+^{m-1}}{(m-1)!}\right\}$$

$$n=m,\ n'=2n,\ N=n,\ N'=n'.$$

插值问题I：求$S\epsilon P_{m-1}$使$S(t_i)=y_i$，$i=1,\ \cdots,m$

插值问题I^*：求$v\epsilon S_{\pi',n'}$使 $v^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)$，$j=0,\ 1\cdots,\ m-1,\ i=0,\ 1.$

问题I，I^*都是唯一可解的。可见研究多项式插值的共轭插值，可以引出样条函数插值。

例2　设$\pi=\pi'$：$\{x_i\}_0^{k+1}$：$a=x_0<\cdots<x_{k+1}=b$

$$S=S':=\{S(x):S(x)=\sum_{i=0}^{m-1}a_i x^i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\beta_{ij}\frac{(x-x_i)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}$$

其中$m=2\lambda$为偶数。插值问题$I=I^*$：求$S(x)\epsilon S$,使

$$S^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i),\ j=0,1,\cdots\lambda-1,\ i=0,1,\cdots,k+1.$$

这一问题是自共轭的；称为m阶的H—样条插值问题，它是唯一可解的。

例 3　给定$m=3$，　$\pi=\pi'=\{x_i\}_0^{k+1}$,

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\\cdot&\cdot&\cdot\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \widetilde{E}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\\cdot&\cdot&\cdot\\1&0&0\end{pmatrix}$$

E和$\widetilde{E}$都是$(k+2)\times3$矩阵。这相当于给定：

$$S_{\pi,n}:=\{u(x):u(x)=p_2(x)+\sum_{\mu=1}^{k}\beta_\mu(x-x_\mu)_+^2\ /_2\}$$

$$S_{\pi',n'}:=\{v(t):v(t)=p_2(t)+\sum_{\mu=1}^{k}\gamma_\mu(t_\mu-t)_+\}$$

其中　　$n=n'=k+3$。

插值问题II：求$u(x)\epsilon S_{\pi,n}$，使

$$u(x_0)=f(x_0),\ u(x_{k+1})=f(x_{k+1}),\ u'(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,\cdots,k.$$

插值问题II^*：求$v(t)\epsilon S_{\pi',n'}$使

$$v(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,\cdots,\ k+1,\ v'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$$

因此　$N=N'=n=n'$，$p=m=3$，从而据定理1知　$q'=q=k+3$，这两个问题同时唯一可解。

参考文献

〔1〕李岳生、齐东旭，样条函数方法，计算方法丛书（之一），科学出版社，1979.

〔2〕李岳生，δ函数、格林函数与样条函数，中山大学自然科学论文选(1955—1978)，1979.

〔3〕K. Jetter, Duale Hermite-Birkhoff Probleme, *Jour. of Approx. Theory*. 17(1976), 119—134.

〔4〕I. J. Schoenberg, on the Ahlberg-Nilson extension of spline interpolation: The g-spline and their optimal properties, *J. Math. Anal. Appl.*, 21(1968). 207—231.

Dual Spline Interpolation I

——Polynomial Spline

Li Yuesheng

Abstract

We discuss the interpolation problem(I): $u^{(\nu)}(t_\mu)=f^{(\nu)}(t_\mu)$, $0\leqslant\nu\leqslant\rho_\mu-1$, $0\leqslant\mu\leqslant l+1$, by elements in $S=\left\{u(x):u(x)=\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_i x^i+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{r_i-1}\beta_{ij}\frac{(x-x_i)_+^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\right\}$ and its dual problem(I ′): $v^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)$, $0\leqslant j\leqslant\leqslant r_i-1$, $0\leqslant i\leqslant k+1$by, elements in $S'=\left\{v(x):v(x)=\sum_{\mu=0}^{m-1}\lambda_\mu x^\nu+\sum_{\mu=1}^{l}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\delta_{\mu\nu}\frac{(t_\mu-t)_+^{m-\nu-1}}{(m-\nu-1)!}\right\}$, where $0\leqslant r_i\leqslant m$, $0\leqslant\rho_\mu\leqslant m$, $\rho_0+r_0=\rho_{l+1}+r_{k+1}=m$, and $r_i+\rho_\mu\leqslant m$ when $x_i=t_\mu$. The following theorems have been proved: Theorem 1. *Rank*(I ′) = *Rank*(I) + $m-\rho_0-\rho_{l+1}$, as a consequence is that problem (I) and problem (I ′)are equevalent in the sence of uniqueness and existence of solution. Theorem 2. There exist $u\in S$ interpoltaing f in problem(I), if $\sum_{\mu=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{\rho_\mu-1}\gamma_{\mu\nu}(v)f^{(\nu)}(t_\mu)=0$ for all $v\in S'$ and $v^{(j)}(x_i)=0$, $0\leqslant j\leqslant r_i-1$, $0\leqslant i\leqslant k+1$, where $\gamma_{\mu\nu}(v)=(-1)^{m-\nu}[v^{(m-\nu-1)}(t_\mu)]$, the notation $[g(t_\mu)]\equiv g(t_\mu+0)-g(t_\mu-0)$, for $t_\mu\neq a,b$, $g[(a)]=g(a+0)$, $[g(b)]=-g(b-0)$. Theorem 3. If the solution of problem(I) exists uniquely, then for $f\in C^m[a.b]$, The remander of(I) is $Rf(x)=\int_a^b K(x,t)\,f^{(m)}(t)dt$ and the remander of (I ′) is $R^*(x)=\int_a^b K^*(x,t)f^{(m)}(t)\,(-1)^m dt$, where $K(x,t)=R_x\{(x-t)_+^{m-1}/(m-1)!\}=R_t^*\{(x-t)_+^{m-1}/(m-1)!\}$, $K^*(x,t)=K(t,x)$.