磁单极、纤维丛和规范场*

杨振宁

本报告表明了通过规范场的概念将各种互作用统一起来的巨大热心和丰富内容。我要强调的一点，而其他作者还没有明确叙述的是：规范场和现代数学的某些深妙美丽的概念有紧密联系，这些概念是过去四十年来一部分数学的推动力。回忆早期物理学和数学的关系：广义相对论和黎曼几何，量子力学和希尔伯特空间。显然，物理学可能再次处于发现基本的新的自然之秘密的起点。

以上所说的数学概念是纤维丛理论。初看起来，这理论十分抽象而且和物理世界的结构没有联系。为了证明不是如此，我们先简单地说明电磁性和量子力学一起是怎样自然地引导到"非平庸纤维丛"。然后追述规范场概念及其推广的早期历史。强调三个互相连系但不相同的概念上的发展，其中每一种发展都引导出规范场的普遍公式。

磁单极和非平庸丛

磁单极即磁荷。虽然磁单极的概念也许早在经典物理学中关于电磁学的历史中讨论过，但近代讨论这个概念只是从1931年开始。当时Dirac[1]的重要文章指出在量子力学中磁单极具有某些特殊的微妙的性质。特别，若存在强度为g的磁单极，在量子力学中电荷和磁荷必须量子化。下面将给出此结果的新推导。

若要描述一个电子在一个磁单极的场中的波函数，必须找到围绕磁单极的矢量势$\vec{A}$。Dirac选一个具有奇异弦的矢量势，这种奇异弦之所以必要，从以下证明的定理[2]中就可显然。

定理：考虑在原点有一个强度$g\neq0$的磁单极和一个绕原点，半径为R的球。则不存在一个在球上没有奇异性的描述磁单极的磁场的矢量势$\vec{A}$。

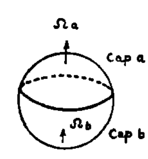

图1 半径为R的球，球心有一个磁单极。球上緯綫將球分成兩部分，上帽a和下帽b。

此定理容易用以下方法证明。设有一个没有奇异性的$\vec{A}$。考虑迴路积分

---

* 本文是楊振宁教授寄給中山大学物理系基本粒子理论研究室的。

$$\oint A_\mu dx^\mu$$

路径是沿球上的一条纬线，如图1所示。按Stoke定理，此迴路积分等于穿过上帽a的总磁通：

$$\oint A_\mu dx^\mu = \Omega_a \tag{1}$$

同样，应用Stoke定理于下帽b，得

$$\oint A_\mu dx^\mu = \Omega_b \tag{2}$$

式中，Ω_a和Ω_b分别是通过上帽a和下帽b的向上总磁通，二者都是以该纬线为边界。将二者相减得

$$0 = \Omega_a - \Omega^b \tag{3}$$

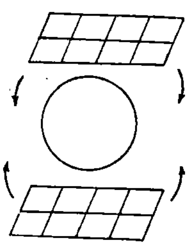

图2　将球面参数化的方式

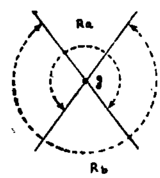

图3　在磁單极g之外的空間分解为重迭的区域Ra和Rb

另一方面，它应等于磁单极由球面出来的总磁通，是等于$4\pi g \neq 0$，发生矛盾，于是定理得证。

证明此定理时，我们注意到R是任意的。于是，可得结论，在描述磁单极的场的矢量势中必须有一个或多个奇异弦。然而，我们知道围绕磁单极的磁场是没有奇异性的。这一事实提示我们，奇异弦并不是实际的物理困难。的确，这种情况使人想起在将地球表面参数化时面对的问题。我们常用的坐标系，经线和纬线并非没有奇异性，北极和南极就是奇点。然而球体的表面显然是没有奇异性。为避免奇异性，我们通常按图2所示的方式处理，取一个橡皮薄板，其上具有规矩的坐标系，然后将它拉长向下弯曲套在球面上，使它盖过北半球。同样，取另一个橡皮薄板，其上具有规矩的坐标系，然后将它拉长向上弯曲套在球面上，使它盖过南半球。于是，我们有两重坐标系来描述球面上的点，这种描述在每一个复盖球面的橡皮板上是解析的，(假设在橡皮拉长与弯曲时，球体不受到破坏)。而在两个板重迭的区域，就有两套坐标系，彼此间可通过解析的Jacobi量不为零的变换得到。这种双重坐标系是将球面参数化的一个完全合适的方法。

根据这种想法，我们现在使用将空间分成两个区域的方法来消除磁单极问题中的奇异弦。如图3所示，我们将原点之外，在较低锥体之上的点叫做区域R_a，相似

地，将原点之外，在较高锥体之下的点叫做区域R_b。这两个区域之和给出除原点外的所有空间的点。在R_a，我们选一个只有方位角分量不为零的矢量势A：

$$(A_r)_a=(A_\theta)_a=0$$
$$(A_\phi)_a=\frac{g}{r\sin\theta}(1-\cos\theta) \tag{4}$$

注意，这个矢量势在区域R_a中处处没有奇异性。相似地，在R_b中选矢量势为

$$(A\ )_b=(A_\theta)_b=0$$
$$(A_b)_b=\frac{-g}{r\sin\theta}(1+\cos\theta) \tag{5}$$

它在R_b中没有奇异性。易证这两个矢量势的旋度都给出正确的磁单极的磁场。

在重迭区，因为两个矢量势给出相同的旋度，所以二者之差必须是无旋的，因而必须是一个梯度。的确，简单计算得

$$(A_\mu)_a-(A_\mu)_b=\partial_\mu\alpha \tag{6}$$

式中，$\alpha=2g\phi$，ϕ为方位角。于是电子在磁单极场中的Schrödinger方程为

$$\frac{1}{2m}(p-eA_a)^2\Psi_a+V\Psi_a=E\Psi_a \qquad \text{在区}R_a$$

$$\frac{1}{2m}(p-eA_b)^2\Psi_b+V\Psi_b=E\Psi_b \qquad \text{在区}R_b$$

式中，Ψ_a和Ψ_b分别是电子在两个区中的波函数。在这两个方程中，两个矢量势差一个梯度，由著名的规范理论，Ψ_a和Ψ_b必由相因子变换连系起来：

$$\Psi_a=S\Psi_b, \qquad S=exp(ie\alpha) \tag{7}$$

或

$$\Psi_a=[\,exp(2iq\phi)\,]\Psi_b, \qquad q=eg \tag{8}$$

沿着赤道，它完全在R_a中，Ψ_a是单值的。同样，因为赤道也完全在R_b中，所以Ψ_b沿着赤道也是单值的。于是，当我们沿着赤道看，S必须回到它原来的值，这就意味着Dirac的量子化条件：

$$2q=\text{整数} \tag{9}$$

截线的Hilbert空间

两个Ψ，在R_a和R_b中分别为Ψ_a和Ψ_b，在重迭区满足变换条件(8)，在数学上叫做截线。我们看到绕着磁单极，电子的波函数是一个截线，而不是通常的函数。我们将称这些函数为波截线。

不同的波截线(例如，属于不同的能量)，显然满足具有相同q的同样的变换条

件(8)。于是，我们需要发展[3]截线的Hilbert空间的概念。为此，我们定义两个截线ξ和η(g相同)的标量积为

$$(\eta、\xi)=\iiint\eta^*\xi d^3r \tag{10}$$

(在$r=0$ 和$r=\infty$的收敛性问题，在此忽略不讨论)。注意到在重迭区

$$(\eta_a)^*\xi_a=(\eta_b)^*\xi_b \tag{11}$$

所以方程(10)是确定的。

显然，若ξ是一个截线，则$x\xi$也是一个截线。因为

$$x\xi_a=S(x\xi_b)$$

于是，x是截线的Hilbert空间中的一个算子。相似地，我们可以证明$(\vec{p}-e\vec{A})$的分量是算子，但$\vec{p}$的分量不是，而且$\vec{x}$和$(\vec{p}-e\vec{A})$都是厄米算子。

根据Fierz[4]，我们来建立角动量算子。定义

$$\vec{L}=\vec{r}\times(\vec{p}-e\vec{A})-\frac{q\vec{r}}{r} \tag{12}$$

显然L_x，L_y和L_z是截线的Hilbert空间中的厄米算子。容易验证以下的对易关系：

$$\begin{aligned}&[L_x,\ X]=0,\quad [L_x,\ Y]=iz,\quad [L_x\cdot Z]=-iy\\&[L_x,\ p_x-eA_x]=0,\quad [L_x,\ p_y-eA_y]=i(p_z-eA_z)\\&[L_x、p_z-eA_z]=-i(p_y-eA_y)\end{aligned} \tag{13}$$

由这些对易关系得

$$[L_x,\ L_y]=iL_z\quad 等等 \tag{14}$$

式(13)和式(14)表明L_x，L_y和L_z是角动量算子。我们强调指出，不论是Hilbert空间还是这些算子都没有任何奇异性。(A_a和A_b的奇异性不是实际的奇异性，因为它们分别出现在R_a和R_b之外)。

单极谐函数$Y_{q,l,m}$

由$[r^2,\ \vec{L}]=0$，我们可将r^2对角化，并研究在固定r^2时的算子$\vec{L}$,即研究以下形式的截线

$$\delta(r^2-r_0{}^2)\xi$$

式中，ξ是只依赖角坐标θ，ϕ的截线。于是$\vec{L}$作用于“角截线”。

式(14)表明$[L^2,\ L_z]=0$，将它们同时对角化，得到具有本征值为$l(l+1)$和m的熟知的多重态：

$$L^2 Y_{q,l,m} = l(l+1) Y_{q,l,m};$$
$$L_z Y_{q,l,m} = m Y_{q,l,m}, \tag{15}$$

式中，$l=0$，$\frac{1}{2}$，1，……、对每一个l，$m=-l, -l+1, -l+2, \cdots\cdots, +l$。$Y_{q,l,m}$是本征截线，叫做[3]单极谐函数。允许的$l$和$m$的值为

$$l = |q|, \quad |q|+1, \quad |q|+2, \cdots\cdots$$
$$m = -l, \quad -l+1, \cdots\cdots, \quad +l、 \tag{16}$$

这些l, m,的每一个组合，恰好出现一次。人们可选每一个Y归一化，所以

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} |Y_{q,l,m}|^2 d\phi = 1 \tag{17}$$

不同的$Y_{q,l,m}$(q固定)是正交的。这点容易由式(15)按通常方法证明。

$Y_{q,l,m}$的准确表达式，用Jacobi多项式表示出来已在文献3中给出。它们是由式(15)，用通常求球谐函数$Y_{q,l,m}$的方法求得。且

$$Y_{l,m} = Y_{0,l,m}$$

对于某个固定的q,所有的$Y_{q,l,m}$(l,m的值由式(16)给定)的集体形成[3]角截线的一个完备正交集。

每个$(Y_{q,l,m})_a$在R_a中解析，同样，每个$(Y_{q,l,m})_b$在R_b中解析。于是所有在$\vec{A}$和在Ψ中的不连续性，尖点和奇异性都以非常光滑的方式消除了。

注：

(A) 重要的是要体会到上述利用$(A)_a$和$(A)_b$一起来描述磁单极的磁场的方法有个优点：它处处给出正确的磁场$\vec{H}$。而在其它文章中，人们常常用带有奇异弦的单个$\vec{A}$来描述。因为，由定义

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

由$\nabla \times \vec{A}$描述的磁场必须具有连续的流线。于是它的流线如图4所示，就由虚线加上表示丛线的实线组成，以造成在原点处的净流为零。于是，$\nabla \times \vec{A}$不是正确地描述磁单极的磁场。这一点巳经由Wentzel[5]强调过。

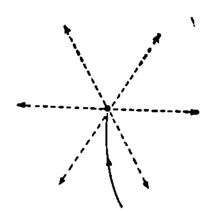

图4 $\vec{A}$引起的磁流綫。由于$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$，流綫处处連續，所以要有沿实綫的回流。

(B) 对于通常的球谐函数，有许多重要的定理，如球谐函数加法定理，应用Clebsh—Gordon系数对球谐函数乘积的分解等。这些定理可以推广到单极谐函数[6]。

(C)约40年来，自从Dirac的第一篇文章发表后，此题目受到奇异性困难的阻碍。现在，我们通过引进截线的概念消除了奇异弦的困难。但揭露出仍有另一种困难，我们将称之为Lipkin--Weisberger-Peshkin[7]困难。此困难出现[8]在研究一个Dirac电子绕一个磁单极的径向波函数上。此困难可以通过在Dirac电子上引进一个小的额外的磁矩来消除(可表示为表1)。

表1　研究Dirac电子在磁单极场中运动的困难及解决办法

角波函数	径向波函数
奇異弦困难	Lipkin-Weisberger-Peshkin困难
用引进截綫来解决	用引进額外磁矩来解决

(D)回到图1所示情况，我们用A_a和A_b的组合描述其磁场。重复一下前面的推导步骤是有益的。现选纬线为赤道，于是

$$\oint (A_\mu) d_a x^\mu = \Omega_a$$

$$\oint (A_\mu)_b d x^\mu = \Omega_b$$

相减得

$$4\pi g = \Omega_a - \Omega_b = \oint [(A_\mu)_a - (A_\mu)_b]$$

式中第一个等号是根据式(6)，迴路积分等于α绕赤道的增量，即$2g(2\pi) = 4\pi g$，于是我们得到了预期的等式。我作这个简单的论证，是因为它正是有名的Gauss—Bonnet—Allendoerfer-Weil—Chern定理及稍后Chern—Weil定理证明的要点，而它在现代数学上起着生殖的作用。

事实上，规范场，其中电磁性是最简单的例子，在概念上和数学的纤维丛理论的某些概念相同。表2给出[2]物理学上使用的术语和数学上使用的术语的对照。我们特别指出，Dirac的磁单极量子化，式(9)，和第一种Chern类U(1)丛分类的数学概念是相同的。

图5　平庸的(左)和非平庸的(右，Moebius帶子)纖維丛的例子

表 2 术语对照

規范場术語	丛术語
規范（或整体規范）	主坐标丛
規范型	主纤維丛
規范势 b_{μ}^{k}	主纤維丛上的連絡
S(式(8))	变换函数
相因子 Φ_{QP}	平移
場强 $f_{\mu\nu}^{k}$	曲率
源（电的）J_{μ}^{k}	?
电磁性	U_1 丛上的連絡
同位旋規范場	SU_2 丛上的連絡
Dirac磁單极量子化	第一Chern类U_1丛的分类
不具有磁单极的电磁性	平庸U_1丛上的連絡
具有磁單极的电磁性	非平庸U_1丛上的連絡

在表2的最后二项，将具有和不具有磁单极的电磁性等同于非平庸和平庸的$U(1)$丛。为什么不具有磁单极的电磁性是“平庸的”？我们可以通过研究一纸圈和一个Moebius带子来理解。如图5所示，若沿图中虚线将它们剪开，它们各自分成两部分，结果我们将区别不了二者有何差别。纸圈和Moebius带子的差别仅在将两部分连接起来的方式上，对后者必须将一片扭起来后再接。平庸的和不平庸的丛的差别只在于连结的过程：对于非平庸丛，在连结过程中需要扭一下。在电磁性的情况，连结过程由式(7)或式(8)给出。若无磁单极，$S=1$，丛是平庸的，若有磁单极，$S\neq 1$，从是非平庸的。(我们可以用相的扭曲是必要的这句话来描述非平庸性)。

规范场的早期历史

Einstein关于引力和时空几何间的连系的发现促进了Levi-Civita，Cartan，Weyl等许多大几何学家的工作。在“Raum，Zeit und Materie”（空间，时间和物质）一书中，Weyl[9]企图利用依赖于空间—时间的标度变化的几何概念将引力和电磁性统一起来。其基本思想总结如下：

	$\bullet\xrightarrow{dx_\mu}$	$\bullet$
标度	1	$1+S_\mu dx^\mu$
f	f	$f+\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$
标度变化	f	$f+\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}+S_\mu\right)f dx^\mu$

在上述总结中，第一行表示当空间—时间的一个点x^μ移到邻近的点$x^\mu+dx^\mu$时，标度是怎样变化的。第二行表示这时一个空间—时间的函数f如何随之变化的。最后，若标度变化作用于函数f上，得

$$\left(f+\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu\right)\left(1+S_\mu dx^\mu\right)$$

展开到一级小量，得到最后一行，于是f的增量为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}+S_\mu\right)f dx^\mu \qquad (18)$$

Weyl试图利用矢量势A_μ等于依赖于空间—时间的产生上述标度变化的S_μ来使电磁性结合到几何理论中。然而，这种企图被证明是不成功的。

1925年，量子力学的概念诞生了，其关键概念是将经典哈密顿量中的动量p_μ换成算子：

$$p_\mu\longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

对于带电粒子，其变换为

$$p_\mu-\frac{e}{c}A_\mu\longrightarrow -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}-i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right] \qquad (19)$$

在1927年，Fock[10]观察到人们可以将量子电动力学基于此算子。London[11]指出Fock的工作与Weyl的早期工作的相似性。比较式(18)和式(19)，如果作代换

$$S_\mu\longrightarrow -i\frac{e}{\hbar c}A_\mu$$

Weyl作的等号将是正确的。换句话说，不用标度变化

$$(1+S_\mu dx^\mu)$$

而改用相的变化

$$\left[1-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu dx^\mu\right]\simeq exp\left[1-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu dx^\mu\right] \qquad (20)$$

它可看作是虚标度变化。Weyl将所有这些表示式一起[12]收进一篇显要的文章(此文也是第一次讨论自旋$\frac{1}{2}$粒子的二分量理论)。在文中，明确地讨论了电磁势的变

换

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha \text{（第二类变换）} \tag{21}$$

和相应的带电粒子波函数的相的变换：

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\alpha\right) \text{（第一类变换）} \tag{22}$$

虽然相变化因子（式(20)）不再是标度变化因子，Weyl仍然保持他在1918—20年使用的早期术语*+，将此变换和带电粒子波函数的相的变换都叫做规范变换。

推广：第二次世界大战后发现了许多新粒子，物理学家们揭示了“基本粒子”间的各种耦合。许多可能的耦合能够写出来了，希望找到一个在这些可能性间作选择的原理正是推广Weyl关于电磁性规范原理的动力之一。在此，关键在于电磁性规范原理一下子完全确定了任意的、其电荷qe为守恒量的带电粒子作为电磁场的源的方式。比较一下，因为同位旋$\vec{I}$也是守恒的，自然发生问题：“是否存在广义规范原理来确定某种方式，其中$\vec{I}$是作为新的场的源？”

试图推广此原理的另一动力是观察到$\vec{I}$的守恒意味着质子和中子是相似的。（假如电磁作用取消了），哪个叫质子，或者哪个二者的迭加叫质子，是一个人们能够任意选择的叫法。假如要求这种选择的自由不依赖于不同的空间—时间点，即若要求选择的定域自由，人们就引导到广义的规范原理。

这两个动力当然是互相交织，并且十分自然地引导到非阿贝尔规范场的公式[18]。

第三种途径[19]去推广规范原理，稍迟才得到，是规范场的“积分公式”。它是从观察用Weyl规范原理处理两个相邻点之间的相因子（式(20)）开始的，沿着从空间—时间点A到点B的路径，相因子结果为

$$\Phi_{BA} = exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\int_A^B A_\mu dx^\mu\right] \tag{23}$$

它依赖于路径，即不可积。（Dirac[1]在1931年已经讨论过“波函数的不可积相”）。如果人们分析在量子力学中电磁性的意义，特别是通过讨论Bohm-Aharonov实验[20]*，人们得到结论[2]：“电磁性是不可积相因子的规范不变性表现”。

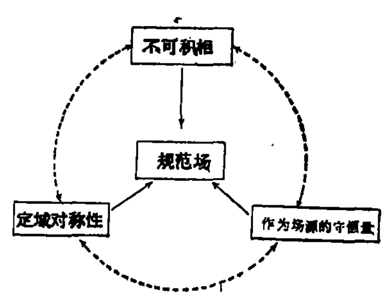

图6 引导到规范場概念的三个动力

一旦得到这个结论，自然的推广就是将“不可积相因子”换成“李群的不可积元素”于是人们就自然地得到规范场的积分公式。

我们在图6中阐明引导到规范场概念的三种途径。这三种途径当然是互相有深刻连系的，因为相、对称性和守恒律本身互有连系。

我的想法是，从概念上，规范场的积分形式比早期的微分形式更优越，积分公式有更多的结构和更多的意义，它带来的先前关于总体拓扑的问题不容易用微分形式表达。例如，在我们前面讨论磁单极周围的场，我们没有引进不可积相因子的概念，我们没有遇到任何概念上的困难，这是因为我们没有碰到象坐标轴转动这样的问题。一旦碰到这种问题，显然，积分公式就更为优越，因为它指明其固有意义是和坐标轴以及区域R_a和R_b的选择无关。

然而，微分公式是用来计算。（微分和积分公式间的关系十分相似于李代数和李群间的关系）事实上，规范—黎曼分析已经做出来了[21]。

我们已经看到，电磁性是一个规范场。引力是规范场也已普遍被接受了，虽然准确的它是怎样的一个规范场是仍待确定的问题[19,22]。弱作用和强作用是否也是由于规范场，连带非阿贝尔规范场的可重正化性问题一起，是近年来广泛研究的问题[23,24]§。如果人们可以借用生物学家们的术语，人们可以说，正逐渐形成一个"信条"：所有的互作用都是由于规范场。然而，因为包含在解量子化规范场的数学困难，我相信在能够确定地回答强作用和弱作用是怎样由规范场引起之前，将是一个长时间才能解决的问题。

回顾基于规范场的概念如何被物理学家用公式表达出来，我们看到，在每一步进展，都和描述物理世界的概念紧密连系。第一、Maxwell方程来源于电的和磁的四个基本实验定律和Faraday引进的场和通量的概念。Maxwell方程和量子力学原理引导到规范不变性的思想。试图推广这个思想，由相，对称性和守恒律等物理概念的推动，引导到非阿贝尔规范场的理论。而非阿贝尔规范场在概念上和美丽的纤维丛理论中的思想相同，后者是数学家没有参考物理世界的情况下发展起来的，这使我非常惊奇。在1975年，我将我的感觉和陈省身讨论，并说"这是又使人惊奇又使人费解，因为你们数学家捏造出的这些概念超出现实。"他立刻抗议说："不，不，这些概念不是捏造，他们是自然的而且是实在的。"

注：• 标度不变性的思想，在文献9讨论过，较早在1918—19年，Weyl的三篇文章中出现，（在1918年5月2日，6月8日和1919年1月7日）。在前二篇文章，他用术语Masstab Invarianz（见文献14），在第三篇文章，他决定用 Eich Invarianz。

Eich Invarianz的英译，在Henry Brose 1921年翻译Weyl的"空间、时间和物质"[15]一书第四版（由Dover出版）时是"calibration invariance"（刻度不变性）。

我怀疑直到Weyl的1929年的文章[12]之后，还不用"gauge invariance"（规范不变性）。这术语出现在1931年Dirac的文章[1]（也许不是第一次）。

‡保持场强不变的变换（式(21)），必须在19世纪已经知道，然而，它似乎没有确定的名字。在1894年开始出版的关于电学和磁学的Foppl—Abraham—Becker-Sauter的许多版本中，没有用Eich或gauge，直到1964年英译本“电磁场和互作用”一书[16]才在注脚中有术语“Lorentz规范”。

+实验已由Chambers[20]进行了。

§Abers和Lee[23]文中也含有关于R. P. Feynman, L. D. Faddeev, V. N. Popov和M. T. Veltman的早期工作的评述。

参考文献

〔1〕Dirac, P. A. M. 1931. *Proc. Roy. Soc.* A133: 60.
〔2〕Wu, T. T. & C. N. Yang. 1975. *Phys. Rev.* D12: 3845.
〔3〕Wu, T. T. & C. N. Yang. 1976. *Nucl. Phys.* B107: 365.
〔4〕Fierz, M. 1944. *Helv. Phys. Acta.* 17: 27.
〔5〕Wentzel, G. 1966. *Progr. Theor. Phys.* Suppl. 37—38: 163.
〔6〕Wu, T. T. & C. N. Yang. 1977. To be Published.
〔7〕Lipkin, H. J., W. I. Weisberger & M. Peshkin. 1969. *Ann. Phys.* 53: 203.
〔8〕Kazama, Y., C. N. Yang & A. S. Goldhaber. 1977. *Phys. Rev.* D. In press.
〔9〕Weyl, H. 1920. *Raum. Zeit und Materie.* 3rd edit. Springer' Verlag. Berlin—Heidelberg. Mew York.
〔10〕Fock, v. 1927. *Z. Phys.* 39: 226.
〔11〕London, F. 1927. *Z. Phys.* 42: 375.
〔12〕Weyl, H. 1929. *Z. Phys.* 56: 330.
〔13〕Pauli, W. 1933. *Handbuch der Physik.* 2nd edit. Vol. 24 (1): 83. Geiger and Scheel.;
Pauli, W. 1941. *Rev. Mod. Phys.* 13: 203.
〔14〕Weyl, H. 1918. *Sitzber.* Preuss Akad. Wiss.: 465;
Weyl, H. 1918. *Math. Z.* 2: 384:
Weyl, H. 1919. *Ann. Phys.* 59: 101.
〔15〕Weyl, H. 1921. *Space. Time and Matter.* Dover Publicatoins, Inc. New York, N. Y.
〔16〕1964. *Electromagnetic Fields and Interactions.* Blaisdell Publishing Co. Waltham, Mass.
〔17〕Yang, C. N. & R. Mills. 1954. *Phys. Rev.* 95: 631.
〔18〕Yang, C. N. & R. Mills. 1954. *Phys. Rev.* 96: 191.
〔19〕Yang, C. N. 1974. *Phys. Rev. Lett.* 33: 445.
〔20〕Aharonov, Y. & D. Bohm. 1959. *Phys. Rev.* 115: 485;
Chambers, R. G. 1960. *Phys. Rev. Lett.* 5: 3.
〔21〕Yang, C. N. 1975. Proc. Sixth Hawaii Topical Conf. Particle Phys.
〔22〕Utiyama, R. 1956. *Phys. Rev.* 101: 1957.
〔23〕Weinberg, S. 1967. *Phys. Rev. Lett.* 19: 1?64;
Salan, A. 1968. *In Elementary Particle Theory.* N. Svartholm, Ed. Almquist and Forlag. Stockholm, Sweden.
〔24〕'tHooft, G. 1971. *Nucl. Phys.* B35: 167;
Abers, E. S. & B. W. Lee. 1973. *Phys. Rep.* 9C; 1.

（刘金明译）