关于SU(3)群拓扑荷为4的瞬子

郭硕鸿　陈启洲　关洪

（物理学系）

摘　要

本文讨论了SU(3)群中拓扑荷为4的瞬子组态，求出它们的零模和非零模因子以及它们对重层子对相互作用位势的贡献。结果表明这种组态相对于四个远离的单瞬子组态的贡献是可以忽略的。

在SU(3)规范理论中，存在拓扑荷为4的瞬子[1-3]。这种瞬子相当于在同一位置上四个拓扑荷为1的瞬子的迭合。本文讨论这种拓扑荷为4的瞬子组态对于四个互相远离的拓扑荷为1的瞬子组态对真空跃迁幅和对重层子相互作用位势的贡献。

拓扑荷为4的瞬子解为

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^a \lambda_a,$$

$$A_\mu^a = \frac{4}{g} \bar{\zeta}^a_{\mu\nu} \frac{\rho^2 x_\nu}{x^2(x^2+\rho^2)} \tag{1}$$

其中$\lambda_a(a=1,2\cdots 8)$是SU(3)的八个生成元，

$$\bar{\zeta}^7_{\mu\nu} = \bar{\eta}^1_{\mu\nu}, \quad \bar{\zeta}^5_{\mu\nu} = -\bar{\eta}^2_{\mu\nu}, \quad \bar{\zeta}^2_{\mu\nu} = \bar{\eta}^3_{\mu\nu};$$

$$\bar{\zeta}^a_{\mu\nu} = 0, \qquad a = 1,3,4,6,8, \tag{2}$$

$\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$是't Hooft符号[4]。

λ_7，$-\lambda_5$和λ_2组成角动量算符的三维表示。计算表明

$$[\lambda_2,[\lambda_2,\lambda_a]]+[\lambda_5,[\lambda_5,\lambda_a]]+[\lambda_7,[\lambda_7,\lambda_a]] = \begin{cases} 2\lambda_a, & \text{当}a=2,5,7 \\ 6\lambda_a, & \text{当}a=1,3,4,6,8 \end{cases} \tag{3}$$

因此，λ_2、λ_5和λ_7组成同位旋$t=1$的一组三重态，而余下的λ_1、λ_3、λ_4、λ_6和λ_8则组成一组$t=2$的五重态。这是同嵌入瞬子（以$\lambda_1/2$、$\lambda_2/2$、$\lambda_3/2$作为同位旋算符）的情况不一样的。

拓扑荷为4的瞬子组态对真空跃迁幅的贡献为[4,5]

$$W = \int \prod_i d\gamma_i J(\gamma) Q(\gamma) e^{-S^{cl}}, \tag{4}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中S^{cl}是经典作用量，对拓扑荷为4的瞬子有

$$S^{cl}=-\frac{32\pi^2}{g^2},\tag{5}$$

γ_i为集体坐标，$J(\gamma)$为零模因子，$Q(\gamma)$为非零模因子。't Hooft[4]已给出非零模贡献的一般公式，只要把其中的同位旋代以(3)式意义下的同位旋，就可以求出在拓扑荷为4的瞬子背景场中的量子涨落非零模因子。由于现在矢量场含有一组$t=1$和一组$t=2$的多重态，由't $Hooft$的公式得非零模因子

$$Q(\gamma)=\exp[-\ln(\mu_0\rho)-\alpha(1)-\alpha(2)]\tag{6}$$

其中μ_0为重整化参数，$\alpha(t)$的值在文献[4]中给出。

现在计算零模因子$J(\gamma)$。按照一般理论，SU(3)群的拓扑荷为4的组态共有48个零模[3]。但是，瞬子场(1)式代表四个粘在一起的单瞬子，这种组态只含有13个参数。以z_μ表示瞬子中心的位置，ρ表示瞬子的标度，$R=\exp(\frac{i}{2}\theta_a\lambda_a)$表示总体规范转动，则拓扑荷为4的瞬子有一般形式

$$A_\mu=\frac{4}{g}\bar{\zeta}^a_{\mu\nu}\frac{\rho^2(x-z)_\nu}{(x-z)^2[(x-z)^2+\rho^2]}R\frac{\lambda_a}{2}R^{-1}.\tag{7}$$

此式含13个参数z_μ，ρ和θ_a。对应于这13个参数，可以分别求出13个零模。

以γ_i表示经典解A_μ^{cl}所含的参数，则零模有一般形式

$$\phi_\mu^{(i)}=\frac{\partial A_\mu^{cl}}{\partial\gamma_i}+D_\mu\Lambda^{(i)},\tag{8}$$

式中D_μ为经典场中的协变微分，$D_\mu\Lambda^{(i)}$项是使零模$\phi_\mu^{(i)}$满足背景规范条件

$$D_\mu\phi_\mu^{(i)}=0\tag{9}$$

所需的规范变换。

与参数ρ对应的张缩零模为

$$\phi_\mu^{(\rho)}=\frac{\partial A_\mu^{cl}}{\partial\rho},\tag{10}$$

其模为

$$\left\|\phi_\mu^{(\rho)}\right\|=\left(\iint\left(\phi_\mu^{(\rho)}\right)^2d^4x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{8\pi}{g}.\tag{11}$$

总平移零模为

$$\phi_\mu^{(\nu)}=\frac{\partial A_\mu^{cl}}{\partial z_\nu}+D_\mu A_\nu^{cl}=F_{\mu\nu}^{cl},\tag{12}$$

其模为

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\left\| \phi_\mu^{(\nu)} \right\| = \frac{4\sqrt{2}\pi}{g}. \tag{13}$$

总体规范零模为

$$\phi_\mu^{(a)}(x) = D_\mu\left(\Lambda^{(a)} + \frac{\lambda_a}{g} \right), \tag{14}$$

其中$\Lambda^{(a)}$满足方程

$$\partial^2 \Lambda^{(a)} - 2ig\left[A_\mu^{cl}, \partial_\mu \Lambda^{(a)} \right] - g\left[A_\mu^{cl}, \left[A_\mu^{cl}, \lambda_a \right] \right]$$

$$- g^2\left[A_\mu^{cl}, \left[A_\mu^{cl}, \Lambda^{(a)} \right] \right] = 0 \tag{15}$$

取试解$\Lambda^{(a)} = B(x^2)\lambda_a$，用(3)式，得

$$\partial^2 B - \frac{4\rho^4}{gx^2(x^2+\rho^2)^2} t(t+1)(1+gB) = 0, \tag{16}$$

对$a = 2,5,7$，有 $t = 1$；对$a = 1,3,4,6,8$，有 $t = 2$。令$\phi = 1 + gB$，解(16)式得

$$\phi = \left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2} \right)^t,$$

由此求出

$$\Lambda^{(a)} = -\frac{\rho^2}{g}\frac{1}{x^2+\rho^2}\lambda_a, \qquad a = 2,\ 5,\ 7;$$

$$\Lambda^{(a)} = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{x^2}{x^2+\rho^2} \right)^2 - 1 \right]\lambda_a, \qquad a = 1.3,4,6,8. \tag{17}$$

相应的零模有

$$\left\| \phi_\mu^{(a)} \right\| = \begin{cases} \dfrac{4\pi\rho}{g}, & a = 2,5,7, \\ \dfrac{4\sqrt{2}\pi\rho}{g}, & a = 1,3,4,6,8. \end{cases} \tag{18}$$

以上计算了四个瞬子粘在一起时的13个零模。为了求出全部零模，还需要计算四个瞬子各自独立变动时的零模。由于只有当四个瞬子粘在一起时有精确解(1)式，当四个瞬子各自变动时没有显示形式的精确解，因此不能用通常方法求出这些零模。下面我们给出一种处理方法。

设拓扑荷为4的经典解有四个互相正交的零模ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，和ϕ_4，相应于标度参数ρ_1，ρ_2 ρ_3，和ρ_4

$$\phi_i^\mu = \frac{\partial A_\mu^{cl}}{\partial \rho_i} + D_\mu \Lambda_i, \qquad i = 1,\ \cdots,\ 4.$$

$$(\phi_i,\ \phi_j) = u^2\delta_{ij}. \tag{19}$$

对参数作变换

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\\ \rho_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho'\\ \rho''\\ \rho'''\end{pmatrix}. \tag{20}$$

相应的零模变换为

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\\ \phi''\\ \phi'''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{pmatrix}. \tag{21}$$

取ρ为四个瞬子的总标度参数，则ρ'，ρ''和ρ'''代表它们的相对标度参数，而ρ_1，ρ_2，ρ_3和ρ_4是四个瞬子各自的标度参数的某种线性组合(这种组合使四个零模互相正交)。由(19)、(21)和(11)式得

$$u=\frac{1}{2}\|\phi\|=\frac{4\pi}{g}. \tag{22}$$

因此，和标度参数有关的零模因子为

$$\left(\frac{4\pi}{g}\right)^4 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4. \tag{23}$$

注意此式形式上和四个互相远离的单瞬子的涨缩零模因子是一样的。

对平移零模也可以用同一方法处理，得到和平移有关的零模因子为

$$\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{g}\right)^{16} d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4, \tag{24}$$

其中$z_{i\mu}$可以看做四个瞬子各别的位置参数。注意此式也是和四个互相远离的单瞬子零模因子形式上一样。

求总体规范零模时，注意对$a=3$和8，都只能有两个独立的零模。因此，由(18)式，总体规范零模因子为

$$\left(\frac{2\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{4\pi\rho}{g}\right)^4 d^4t_1 d^4t_2 d^4t_4 d^4t_5 d^4t_6 d^4t_7 d^2t_3 d^2t_8 . \tag{25}$$

四个互相远离的单瞬子的规范零模为

$$\left(\frac{4\pi\rho}{g}\right)^{12}\left(\frac{2\sqrt{2}\,\pi\rho}{g}\right)^{16}\prod_{0=1}^{7} d^4t_i. \tag{26}$$

比较(25)和(26)式，可见拓扑荷为4的瞬子的零模因子比四个远离的单瞬子的零模因子小2^{10}倍。两者非零模因子的比值为

$$e^{-\alpha(2)}/{}^{-}e^{2\alpha\left(\frac{1}{2}\right)}<1.$$

因此，拓朴荷为4的组态相对于四个远离的单瞬子组态对真空跃迁幅的贡献是可以忽略

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的。

下面再计算拓扑荷为4的瞬子对重层子相互作用位势的贡献。距离为R的重层子对之间的位势为[6]

$$V(R)=\int\frac{d\rho}{\rho^5}D(\rho)W(R,\rho),$$

$$W(R,\rho)=-\frac{1}{3}\int d^3z\,\mathrm{Tr}[P\exp(i\oint gA_\mu dx_\mu-1)]. \tag{27}$$

式中$D(\rho)$决定于零模因子，$\vec{z}$为瞬子位置参数，P表示路径编序，回路积分沿边长为$\vec{R}$和T的长方形进行($T\to\infty$)。设

$$L_1=\lambda_7,\qquad L_2=-\lambda_5,\qquad L_3=\lambda_2, \tag{28}$$

则中心在z_μ处的拓扑荷为4的瞬子组态写成

$$A_\mu^a=\frac{2}{g}\bar{\eta}^a_{\mu\nu}L_a\frac{\rho^2(x-z)_\nu}{(x-z)^2[(x-z)^2+\rho^2]}, \tag{29}$$

L_a是角动量算符三维表示，其矩阵元为

$$(L_k)_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}. \tag{30}$$

用公式

$$(\vec{L}\cdot\hat{x})^{2n}{}_{ij}=\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j,\qquad n\geqslant 1$$

$$(\vec{L}\cdot\hat{x})^{2n+1}{}_{ij}=(\vec{L}\cdot\hat{x})_{ij}=-i\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k,\qquad n\geqslant 1 \tag{31}$$

其中$\hat{x}=\vec{x}/|\vec{x}|$。对任意函数$f(x)$有

$$e^{i\vec{L}\cdot\hat{x}f(x)}=\hat{x}_i\hat{x}_j+(\delta_{ij}-\hat{x}_i\hat{x}_j)\cos f(x)+\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k\cos f(x). \tag{32}$$

由(29)和(27)式得

$$W(R,\rho)=-\frac{1}{3}\Big\{2\cos f(z)\cos f(y)+2\hat{z}\cdot\hat{y}\sin f(y)\sin f(y)-2$$
$$-[1-(\hat{z}\cdot\hat{y})^2][1-\cos f(z)-\cos f(y)+\cos f(z)\cos f(y)]\Big\} \tag{33}$$

其中

$$\vec{y}=\vec{z}-\vec{R}, \tag{34}$$

$$f(z)=\frac{2\pi|\vec{z}|}{\sqrt{\vec{z}^2+\rho^2}}, \tag{35}$$

$\vec{R}$为层子对距离。

由$W(R,\rho)$可求得拓扑荷为4的组态所产生的重层子对间的位势$V(R)$。但由于这种组态所占的相空间远远比四个独立的单瞬子所占的相空间小，因此拓扑荷为4的瞬子对物理过程的贡献总是可以忽略的。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

〔1〕 F. Wilczek, *Phys. Lett.*, **65B** (1976), 160.
〔2〕 M.Marciano, H.Pegels, Z. Parsa, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1044.
〔3〕 C. W. Bernard, N. H. Christ, A. H. Guth, E. J. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 2967.
〔4〕 G. 't Hooft, *Phys. Rev.*,**D14**(1976), 3432；**D18**(1978),2199(E).
〔5〕 C. Bernard, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 3013.
〔6〕 C.G. Callan, R. Dashen, D. J. Gross, *Phys.,Rev.*,**D17** (1978), 2717.

On the SU(3) Instantons with Topological Charge 4

Guo Shuohong, Chen Qizhou, Guan Hong

Abstract

The configurations of the SU(3) instantons with topological charge 4 are discussed, and their zero mode and non-zero mode factors as well as their contributions to the interaction potential of heavy quark pairs are evaluated. It is shown that the contributions of these configurations can be neglected as compared with those of the configurations of four far-seperated single instantons.

•出•版•消•息•

山茶属植物的系统研究

张宏达著

本书是山茶属植物的研究专著。作者对全世界的山茶属植物进行了全面的整理和校订；按照系统发育的特征，把196种山茶划分为4个亚属19个组。附有划分亚属及分组和分种的检索表，便于检索和鉴定。在将近200种的山茶当中，有170余种产于我国南部及西南部，尤以云南、广西及广东最为集中。全部的山茶种子都含有油脂，是重要的木本油料植物。其中可供饮用的茶树在我国有17种之多；名贵的观尝金花茶多达10种；艳丽的红山茶多达33种。专著附有图版32幅，还有植物分布及系统发育示意图。新种有拉丁文及中文记载，旧种有扼要的特征描述。每种均附有准确的标本号数。全书约20余万字。可供农、林业工作者，高校教师及专业研究人员使用。该书已由中山大学学报编辑部编印出版。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net