

微波铁氧体的介电常数和 磁导率的测量

史隆培
(物理学系)

提 要

作者曾经提出一种测量微波铁氧体的介电常数和磁导率的方法⁽¹⁾，本文进一步分析表明采用该方法测量损耗角正切达到 10^{-5} 数量级是可能的。

一、引 言

作者曾经提出一种测量微波铁氧体的介电常数和磁导率的方法⁽¹⁾。我们采用测量放入样品前后反射式谐振腔的反射系数变化的方法，来测定 ϵ'' 和 μ'' 。此法不像其他方法那样需要测量频率的复杂仪器。谐振腔的品质因数也不必太高，测量手续简单，而且具有较高的灵敏度。但是为了使系统测量损耗角正切达到 10^{-5} 数量级，还需要作一些补充说明。

文献[1]中假定测量过程 Q_0 、 Q_e 、或 β^* 是不变的，但是实际上由于样品放入前后，谐振腔的共振频率发生变化，因此 β 或 Q_0 、 Q_e 、亦会有微小的改变，而不是一个不变常量，因而会产生这样一个问题，采用文献⁽¹⁾中所给出的测量公式进行计算，是否会影响损耗角正切测试的灵敏度达到 10^{-5} 数量级。进一步的理论分析证明，当考虑到 Q_0 、 Q_e 或 β 随谐振腔的共振频率变化时，文献⁽¹⁾中所给出的测量公式，在测量损耗角正切达到 10^{-5} 范围内仍然是正确的。

另外为了达到预期的测试灵敏度，对测量装置中的元件有何要求亦有必要作补充说明。

二、介电常数的测量公式

把细长的铁氧体棒放到反射式谐振腔中电场最强、磁场近似为零的地方，测量谐振腔共振频率和品质因数的变化，从而测出介电常数的实部 ϵ' 和虚部 ϵ'' 。谐振腔

• 这里的 Q_0 、 Q_e 、 β 是按文献[1]定义的，本文所用符号的意义与文献[1]略有不同。

品质因数的变化, 是通过测量谐振腔的反射系数确定的。

铁氧体在沿Z方向的恒定磁场 \vec{H}_{11} 和微波磁场 \vec{H} 的作用下, 对微波磁场而言, 具有各向异性。微波磁感应强度与磁场的关系为

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{H},$$

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \end{vmatrix},$$

$\overleftrightarrow{\mu}$ 称张量磁导率, 设铁氧体周围充满空气介质, 对空气介质 $\mu_0=1, \epsilon_0=1$ 。

铁氧体的微波介电性质是各向同性的, 即

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

ϵ 称介电常数, 是一个标量。

设谐振腔中充满空气介质, 电磁场为 \vec{E}_0, \vec{H}_0 , 共振圆频率为 ω_0 , 电磁场随时间变化为 $e^{i\omega_0 t}$ 。如果放入一小块铁氧体样品, 谐振腔中的电磁场只是在样品所处位置发生变化, 变为 \vec{E}, \vec{H} , 这称微扰。这时谐振腔的共振圆频率变为 ω_s 。

当样品未放入谐振腔时, 谐振腔内的电磁场满足方程

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_0 + \frac{i\omega_0}{c} \mu_0 \vec{H}_0 &= 0 \\ \nabla \times \vec{H}_0 - \frac{i\omega_0}{c} \epsilon_0 \vec{E}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

当样品放入谐振腔后, 谐振腔内的电磁场满足方程

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{i\omega_s}{c} \overleftrightarrow{\mu}_1 \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{i\omega_s}{c} \epsilon_1 \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{样品内: } \overleftrightarrow{\mu}_1 = \overleftrightarrow{\mu}; \quad \epsilon_1 = \epsilon$$

$$\text{样品外: } \overleftrightarrow{\mu}_1 = \mu_0; \quad \epsilon_1 = \epsilon_0$$

由(1)式(2)式可得

$$\begin{aligned} \oint (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{s} &= -\frac{i\omega_s}{c} \int_{v_s} (\vec{E}_0^* \cdot \Delta \epsilon \cdot \vec{E} + \vec{H}_0^* \cdot \Delta \overleftrightarrow{\mu} \cdot \vec{H}) dv - \\ &- \frac{i(\omega_s - \omega_0^*)}{c} \int_{v_s} (\epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}) dv \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\Delta\epsilon = \epsilon - 1$; $\Delta\vec{\mu} = \vec{\mu} - 1$
 v_s 为样品的体积,
 V_c 为谐振腔的体积,
 \oint_s 表示对谐振腔壁的面积分,

• 表示复数共轭。

据储存在空谐振腔中的能量

$$W_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{v_0} \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H}_0 dv = \frac{1}{8\pi} \int_{v_c} \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E}_0 dv$$

空谐振腔壁吸收的能量可用乌莫夫——波恩亭向量表示, 则流向腔壁的能量为:

$$u_0 = \frac{c}{4\pi} \oint_s (\vec{E}_0^* \times \vec{H}_0) \cdot d\vec{s}$$

一秒内空谐振腔吸收的能量为 u_0 实部的一半,

$$p_0 = \frac{1}{2} R_e u_0 = \frac{1}{2} R_e u_0^*$$

如空谐振腔内空气介质的损耗可以忽略, 则谐振腔的固有品质因数 Q_0 仅决定于腔壁吸收能量的大小。

这时 $Q_0 = Q_{wall}(\omega_0)$

或 $Q_0 = Q_{wa}(\omega_0) = \frac{\omega_0 W_0}{p_0} \tag{4}$

令 $\oint_s (\vec{E}_0^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_0^*) \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} (u + u^*) = \frac{16\pi}{c} p \tag{5}$

$$\frac{1}{8\pi} \int_{v_c} \epsilon_0 \vec{E}_0^* \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{8\pi} \int_{v_c} \mu_0 \vec{H}_0^* \cdot \vec{H} dv = W \tag{6}$$

据 (5)、(6) 式, (3) 可改写为

$$\frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{p}{\omega_s W} = - \frac{\int_{v_s} (\vec{E}_0^* \cdot \Delta\epsilon \cdot \vec{E} + \vec{H}_0^* \cdot \Delta\vec{\mu} \cdot \vec{H}) dv}{16\pi W} \tag{7}$$

先计算 (7) 式左边两项,

令 $\omega_0 = \omega'_0 + i\omega''_0 / 2Q_0$

$$\omega = \omega'_s + i\omega''_s / 2Q$$

其中, Q_0 是未放入样品时谐振腔的固有品质因数。 Q 是带有样品的谐振腔的品质因数。

当 $1/2Q \ll 1$ 并满足微扰条件 $\frac{|\omega'_s - \omega'_0|}{\omega'_s} \ll 1$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} \cong & \frac{\omega'_s - \omega'_0}{\omega'_s} + i \left(\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q_0} \right) \frac{\omega'_0}{\omega'_s} - i \frac{1}{4Q^2} \left(\frac{1}{2Q} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2Q_0} \frac{\omega'_0}{\omega'_s} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

并有
$$\frac{1}{Q_{wall}(\omega)} = \frac{p}{\omega W} \quad (9)$$

根据〔2〕,
$$\frac{1}{Q_{wall}(\omega)} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

$$\frac{1}{Q_{wall}(\omega_s)} = \sqrt{\frac{\omega'_0}{\omega'_s}} \frac{1}{Q_0} \quad (10)$$

当 $\frac{|\omega'_0 - \omega'_s|}{\omega'_s} \ll 1$ 时, (10) 式可表示为

$$\frac{1}{Q_{wall}(\omega_s)} = \frac{1}{Q_0} \left[1 + \frac{\omega'_0 - \omega'_s}{2\omega'_s} - \frac{1}{8} \left(\frac{\omega'_0 - \omega'_s}{\omega'_s} \right)^2 + \dots \right] \quad (11)$$

据 (8)、(9) 和 (11) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{p}{\omega_s W} = & \frac{\omega'_s - \omega'_0}{\omega'_s} + i \left[\frac{1}{2Q} \frac{\omega'_0}{\omega'_s} - \frac{1}{2Q_0} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8Q_0} \left(\frac{\omega'_0 - \omega'_s}{\omega'_s} \right)^2 - \frac{1}{8Q^2} \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_0} \frac{\omega'_0}{\omega'_s} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

下面计算 (7) 式右边的项。

设铁氧体样品是椭球形的, 椭球的主轴处于直角坐标轴 x, y, z 上, 则铁氧体的退磁因子或退电因子可对角化表示为

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix}.$$

在满足微扰条件的情况下利用准静磁条件, 可求出铁氧体内部的磁场

$$\vec{H} = \vec{S} \cdot \vec{H}_0, \quad (13)$$

其中

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{vmatrix},$$

$$S_{11} = \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{N_x}{4\pi} \Delta\mu \right), \quad S_{22} = \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{N_y}{4\pi} \Delta\mu \right),$$

$$S_{12} = -\frac{i\mu_a N_x}{4\pi\xi}, \quad S_{21} = \frac{i\mu_a N_y}{4\pi\xi}, \quad S_{33} = \frac{1}{1 + \frac{N_z}{4\pi} \mu_{11}},$$

$$\xi = \left(1 + \frac{N_x}{4\pi} \Delta\mu \right) \left(1 + \frac{N_y}{4\pi} \Delta\mu \right) - \frac{N_x N_y \mu_a^2}{16\pi^2},$$

$$\Delta\mu = \mu - 1, \quad \Delta\mu_{11} = \mu_{11} - 1.$$

同理, 利用准静电条件, 求出铁氧体内部的电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{N} \cdot \vec{P},$$

$$\epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P},$$

其中 $(-\vec{N} \cdot \vec{P})$ 为样品内的退电场¹⁾。

将上两方程形消去 \vec{P} , 得

$$\vec{E} = \vec{t} \cdot \vec{E}_0, \quad (14)$$

$$\vec{t} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{vmatrix},$$

1) 严格说来, 只当样品形状是椭球形时在均匀的外场磁化(电极化)下, 退磁场(退电场)才能表示为 $-\vec{N} \cdot \vec{M}$ ($-\vec{N} \cdot \vec{P}$)。

$$t_{11} = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{N_y}{4\pi} \Delta\epsilon \right), \quad t_{22} = \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{N_x}{4\pi} \Delta\epsilon \right),$$

$$t_{33} = \frac{1}{1 + \frac{N_z}{4\pi} \Delta\epsilon}, \quad \eta = \left(1 + \frac{N_x}{4\pi} \Delta\epsilon \right) \left(1 + \frac{N_y}{4\pi} \Delta\epsilon \right).$$

测量时选用一个 TE_{10n} 矩形谐振腔, 如图 1 所示. 其共振圆频率为 ω_0 , 谐振腔中的电磁场为

$$\begin{aligned} H_{0x} &= \frac{k_y}{k_0} \sin k_x x \cos k_y y, \\ H_{0y} &= \frac{k_x}{k_0} \cos k_x x \sin k_y y, \\ E_{0z} &= \sin k_x x \sin k_y y, \end{aligned} \quad (15)$$

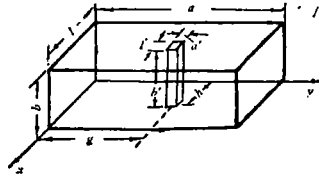


图 1

其中

$$k_x = \frac{\pi}{l}, \quad k_y = \frac{\pi n}{a}, \quad k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

如将长为 b' 截面为 $a' \times l'$ 的长方形铁氧体棒放到 TE_{10n} 谐振腔中, $h = \frac{l}{2}$, $g = \frac{a}{n} \left(p + \frac{1}{2} \right)$, $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 的位置 (如图 1 所示), 这时谐振腔的共振圆频率变为 ω_s , 根据(1)、(2)、(3), 和(4)式计算得

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{p}{\omega_s W} &= - \frac{2}{abl} \left\{ \frac{\Delta\mu + (\Delta\mu^2 - \mu_a^2)}{\xi} \frac{N_y}{4\pi} \frac{k_y^2}{k_0^2} b' \frac{1}{2} (l' + \right. \\ &+ \frac{1}{k_x} \sin k_x l') \frac{1}{2} (a' - \frac{1}{k_y} \sin k_y a') + \\ &+ \frac{\Delta\mu + (\Delta\mu^2 - \mu_a^2)}{\xi} \frac{N_x}{4\pi} \frac{k_x^2}{k_0^2} b' \frac{1}{2} (l' - \\ &- \frac{1}{k_x} \sin k_x l') \frac{1}{2} (a' + \frac{1}{k_y} \sin k_y a') + \\ &+ \frac{\Delta\epsilon}{1 + \frac{N_z}{4\pi} \Delta\epsilon} b' \frac{1}{2} (l' + \frac{1}{k_x} \sin k_x l') \frac{1}{2} (a' + \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{k_x} \sin k_y a' \right\} . \tag{16}$$

当 $k_x l' \ll 1, k_y a' \ll 1$, 忽略含 $(k_x l')^2, (k_y a')^2$ 以上的高次小项, (16)式变为

$$\frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{P}{\omega_s W} = - \frac{2\Delta\epsilon}{1 + \frac{N_z}{4\pi} \Delta\epsilon} \frac{v_s}{V_c} . \tag{17}$$

如果铁氧体是半径为 r 的圆柱形棒, 或半径为 r 的小球, 当满足 $k_x r \ll 1, k_y r \ll 1$ 的条件, 忽略含 $(k_x r)^2, (k_y r)^2$ 以上的高次小项, 同样可以得到(17)式。(17)式中的 N_z 是沿微波电场方向即 Z 方向的退电因子。

下面讨论谐振腔壁对样品内电场的影响, 沿 z 方向被电极化的铁氧体, 两端产生极化面电荷, 极化面电荷作用于谐振腔壁, 使它感生出面电荷, 而感生面电荷可以根据电象法用象电荷等价地描写。所谓电象法, 就是根据谐振腔壁是理想导体, 其内部电场为零, 感生面电荷的分布必需满足谐振腔壁上电位为零的边界条件。可假想象电荷, 它以谐振腔内壁为镜子与极化面电荷相对称地分布, 两者的电荷符号相反(如图2)。象电荷与极化面电荷共同作用, 保证谐振腔内壁电位为零的边界条件。因此象电荷就等价地描写了谐振腔壁上被感生的面电荷。从图2看出, 象电荷产生的电场与极化面电荷在铁氧体内产生的退电场是相反的。随着样品长度的增加, 样品两端愈接近谐振腔壁, 这时样品内部的退电场与象电荷产生的电场, 两者大小愈接近。

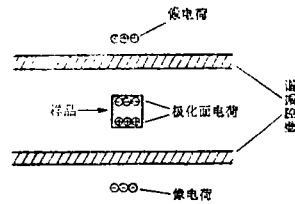


图 2

当样品的长度等于 b 时, 即样品两端与谐振腔壁相接触时, 退电场与象电荷产生的电场相抵消, 这时可以令(17)式中 $N_z = 0$, 在实际测量中, 样品是从壁上开孔的谐振腔中插入(图5所示), 只要样品两端与谐振腔壁接触, 如前述的道理, 可认为这时样品的极化电荷与谐振腔壁感生的面电荷相抵消, 因而, 同样可令 $N_z = 0$. 由此可得

$$\frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{P}{\omega_s W} = - 2\Delta\epsilon \frac{v_s}{V_c} . \tag{18}$$

设 f_0 是空谐振腔的共振频率, f_s 是放入样品后谐振腔的共振频率。并令

$$\frac{1}{2Q_s} = 2\epsilon'' \frac{v_s}{V_c} \tag{19}$$

根据(12)、(18)、(19)式可得

$$\frac{f_s - f_0}{f_s} = - 2(\epsilon' - 1) \frac{v_s}{V_c} \tag{20}$$

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_s} \right) \frac{\omega'_s}{\omega'_0} + \left[\frac{1}{4Q^2} \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_0} \frac{\omega'_0}{\omega'_s} \right) - \frac{1}{4Q_0} \left(\frac{\omega'_0 - \omega'_s}{\omega'_s} \right)^2 \right] \frac{\omega'_s}{\omega'_0} + \dots \quad (21)$$

在满足微扰条件时(21)式可近似表为

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_s} \right) \frac{\omega'_s}{\omega'_0} \quad (22)$$

考虑一反射式谐振腔, 其归一化阻抗为⁽²⁾

$$Z = \frac{1/Q_c}{i(\omega/\omega_c - \omega_c/\omega) + 1/Q} \quad (23)$$

其中 Q_c 为谐振腔的外品质因数; ω_c 是谐振腔的共振圆频率; ω 是讯号源的圆频率。空谐振腔时, $1/Q = 1/Q_0$, Q_0 是谐振腔的固有品质因数; 谐振腔放有样品时,

$$1/Q = (1/Q_0 + 1/Q_s) \frac{\omega'_s}{\omega'_0}$$

设谐振腔的反射系数为 Γ , 则

$$\Gamma = \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| \quad (24)$$

如果放入样品前后的测量过程中, 讯号源的频率与谐振腔的共振频率始终保持一致, 即

$$\omega = \omega_c \quad (25)$$

由(23)、(25)式可得

$$Z = \frac{Q(\omega)}{Q_e(\omega)} \quad (26)$$

再根据⁽²⁾

$$\frac{1}{Q_e(\omega)} \propto \omega$$

可得

$$\frac{Q_e(\omega_0)}{Q_e(\omega_s)} = \frac{\omega'_s}{\omega'_0} \quad (27)$$

根据(24)、(26)、(27)、(22)式可得

$$\Gamma_s = \frac{|\beta - 1 - Q_0/Q_s|}{|\beta + 1 + Q_0/Q_s|} \quad (28)$$

$$\Gamma_0 = \frac{|\beta - 1|}{|\beta + 1|} \quad (29)$$

其中 $\beta = Q_0(\omega'_0)/Q_e(\omega'_0)$ 为空谐振腔的耦合系数, Γ_0 是空谐振腔的反射系数, Γ_s 是放入样品后谐振腔的反射系数。利用(19)、(28)、(29)式, 可求得当 $\beta \leq 1$ 时,

$$\epsilon'' = \frac{1}{2Q_0} \frac{\Gamma_s - \Gamma_0}{(1 + \Gamma_0)(1 - \Gamma_s)} \frac{V_c}{v_s}, \quad (30)$$

当 $\beta > 1 + Q_c/Q_s$ 时,

$$\epsilon'' = \frac{1}{2Q_0} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_s}{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_s)} \frac{V_c}{v_s}, \quad (31)$$

由(20)式测出 ϵ' , 由(30)或(31)式测出 ϵ'' , 由此可以决定 $t_g \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ 。对通常的情况, $\epsilon' > 10$ 。

当 $\beta \leq 1$ 时,

$$t_g \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \approx \frac{\epsilon''}{\epsilon' - 1} = \frac{1}{Q_0(f_0 - f_s)/f_s} \frac{\Gamma_s - \Gamma_0}{(1 + \Gamma_0)(1 - \Gamma_s)}, \quad (32)$$

当 $\beta > 1 + Q_0/Q_s$ 时,

$$t_g \delta_\epsilon = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \approx \frac{\epsilon''}{\epsilon' - 1} = \frac{1}{Q_0(f_0 - f_s)/f_s} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_s}{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_s)}. \quad (33)$$

应该强调指出, 如果利用公式(30)或(31)测量介电常数 ϵ'' , 由于忽略了样品磁损耗的贡献, 因而带来一定的误差。下面估计一下这种误差的数量级。根据公式(16), 在三厘米波段的测量范围内, 当样品是截面为 $a' \times a'$ 的细长方棒时, $\mu_a = 0$, 并可近似令 $N_x = N_y = 2\pi$, $N_z = 0$ 。这时测量得的介电常数 $\epsilon''_{测}$ 和真实的介电常数 $\epsilon''_{真}$ 的差别是

$$\epsilon''_{测} \cong \epsilon''_{真} + 0.2 \mu'' a'^2, \quad a' \text{ 以厘米为单位}$$

因此, 在测量具有极低介电损耗和较高磁损耗样品的介电常数 ϵ'' 或 $t_g \delta_\epsilon$ 时, 即 ϵ'' 与 $\mu'' \times 10^{-3}$ 可以比拟时, 测量 Γ_s , 需要沿 z 方向加一恒定磁场, 恒定磁场的强度远大于铁磁共振磁场, 这时 $\mu' = 1$, $\mu'' \cong 0$, $\mu_a \cong 0$, 所以仍可以用(30)或(31)式算出 ϵ'' 和 $t_g \delta_\epsilon$ 。

三、磁导率的测量公式

把一块长 l 、高 b' 、厚 a' 的薄片样品，放到 TE_{10n} 矩形谐振腔中磁场最大、电场近似为零的位置上，如图3所示。薄片样品与 xz 面平行， $g = \frac{p}{n} a$ ， $p = 1, 2, \dots, n$ 。

设空谐振腔的共振圆频率是 ω_0 ，放入样品后谐振腔的共振圆频率是 ω_s ，当满足微扰条件 $|\omega_s - \omega_0|/\omega_s \ll 1$ 时，据(7)、(13)、(14)、(15)式，计算可得

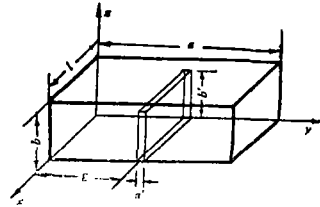


图 3

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{p}{\omega_s W} \\ &= -\frac{1}{abl} \left\{ \frac{\left[\Delta\mu + (\Delta\mu^2 - \mu_a^2) \frac{N_y}{4\pi} \right] \frac{k_y^2}{k_0^2} b'l \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{k_y} \sin k_y a' \right)}{\xi} \right. \\ & \quad + \frac{\left[\Delta\mu + (\Delta\mu^2 - \mu_a^2) \frac{N_x}{4\pi} \right] \frac{k_x^2}{k_0^2} b'l \frac{1}{2} \left(a' - \frac{1}{k_y} \sin k_y a' \right)}{\xi} \\ & \quad \left. + \frac{\Delta\epsilon}{\left(1 + \frac{N_z}{4\pi} \Delta\epsilon \right)} b'l \frac{1}{2} \left(a' - \frac{1}{k_y} \sin k_y a' \right) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

当铁氧体片足够薄，如在远离铁磁共振区测量， $\mu' \approx 1$ ，这时可令 $N_x = 0$ ， $N_y = 4\pi$ 。根据(34)式估计，不会带来较大误差。

当满足条件 $k_y a' \ll 1$ 时，(34)式可约化为

$$\frac{\omega_s - \omega_0^*}{\omega_s} - i \frac{p}{\omega_s W} = -(\mu_{\perp} - 1) \frac{k_y^2}{k_0^2} \frac{v_s}{Vc}, \quad (35)$$

其中

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} = \mu'_{\perp} - i\mu''_{\perp},$$

称为垂直磁导率

如放入样品前后的测量过程中，讯号源的频率与谐振腔的共振频率始终保持一致。设空谐振腔的共振频率为 f_0 ，反射系数为 Γ_0 ，放入样品后，谐振腔的共振频率为 f_s ，反射系数为 Γ_s 。由(12)、(35)式可得

$$\mu'_{\perp} = 1 - \frac{f - f_0}{f_s} \frac{k_0^2}{k_y^2} \frac{V_c}{v_s} \quad (36)$$

令
$$\frac{1}{2Q_s} = -(\mu''_{\perp} - 1) \frac{k_0^2}{k_y^2} \frac{v_s}{V_c} \quad (37)$$

利用(28)、(29)、(37)可求得

若 $\beta \leq 1$ 时:

$$\mu''_{\perp} = \frac{1}{Q_0} \frac{\Gamma_s - \Gamma_0}{(1 + \Gamma_0)(1 - \Gamma_s)} \frac{k_0^2}{k_y^2} \frac{V_c}{v_s}, \quad (38)$$

若 $\beta > 1 + Q_0/Q_s$ 时,

$$\mu''_{\perp} = \frac{1}{Q_0} \frac{\Gamma_0 - \Gamma_s}{(1 - \Gamma_0)(1 + \Gamma_s)} \frac{k_0^2}{k_y^2} \frac{V_c}{v_s} \quad (39)$$

由(36)、(38)或(39)式, 测出 μ'_{\perp} , μ''_{\perp} , 由此可以确定 $tg\delta\mu_{\perp} = \frac{\mu''_{\perp}}{\mu'_{\perp}}$ 。当沿z轴方

向外加恒定磁场为零时, $\mu_a = 0$, $\mu_{\perp} = \mu_0$ 。利用(36)、(38)或(39)式, 测出零场磁导率 $\mu = \mu' - i\mu''$, 和零场磁损耗角正切 $tg\delta\mu = \frac{\mu''}{\mu'}$ 。

应该强调指出, 如果利用公式(36)、(38)或(39)式测量磁导率 μ_{\perp} 时, 由于忽略了样品介电常数的贡献, 因而带来一定的误差。下面估计一下这种误差的数量级。在三厘米波段的测量范围内, 如测量远离铁磁共振区的磁导率, 这时 $\mu' \approx 1$, 当片足够薄, 可令 $N_x = 0$, $N_y = 4\pi$ 。根据公式(34), 估计测量得的磁导率 $\mu'_{\perp\text{测}}$

$\mu''_{\perp\text{测}}$ 和真实的磁导率 $\mu'_{\perp\text{真}}$, $\mu''_{\perp\text{真}}$ 的差别为

$$\mu'_{\perp\text{测}} \cong \mu'_{\perp\text{真}} + 0.3(\epsilon' - 1)a'^2,$$

$$\mu''_{\perp\text{测}} \cong \mu''_{\perp\text{真}} + 0.3\epsilon''a'^2,$$

其中, a' 是薄片样品的厚度, 以厘米为单位。

这种测量误差随着介电常数和 a' 的减小而减小。对介电常数很大的情形, 它对测量磁导率的影响不能忽略时, 应按公式(34), 代入 ϵ' 和 ϵ'' , 进行严格的计算。

四、 测量方法和测量的灵敏度

测量装置的方块图如图 4 所示。

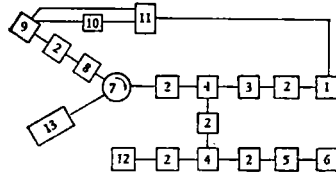


图 4

- | | | |
|----------|-------------|-------------|
| 1——调速管, | 5——晶体檢波器, | 9——晶体檢波器, |
| 2——隔离器, | 6——灵敏电流計, | 10——灵敏电流計, |
| 3——衰减器, | 7——环行器, | 11——电子稳频系統, |
| 4——T形波导, | 8——精密讀数衰减器, | 12——精密波長計, |
| | | 13——反射式谐振腔 |

反射式谐振腔选择 $TE_{10,11}$ 型, 目的使测量YIG或LiT₃铁氧体的介电常数时, 插入1毫米左右直径的样品, 谐振腔共振频率变化达到50赫兆左右, 这时很好地满足微扰条件 $|(f_s - f_0)/f_s| \ll 1$, 同时谐振腔的共振频率变化足够大, 使测量 $tg\delta_e$ 有足够高的灵敏度。

$TE_{10,11}$ 型或 $TE_{10,15}$ 型谐振腔宽面中心, 开两个直径约1.2毫米的小孔, 以便测量介电常数时插入样品。在 $TE_{10,0}$ 型(或更短一些的)谐振腔的窄面中间开1毫米宽的缝, 以便测量磁导率时插入样品(如图5所示)。

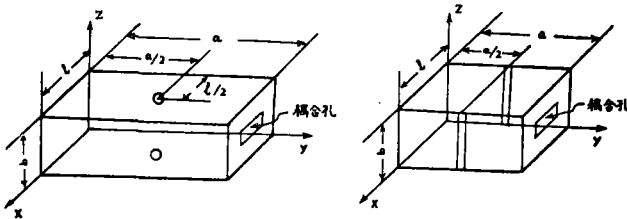


图 5 TE_{10n} 型谐振腔

对测量装置中各个部件的作用, 以及如何测量介电常数和磁导率, 在文献[1]中有详细说明。

测量结果可参阅文献[1], 我们对不同形状的样品进行测量, 采用细长样品和小球样品测出的介电常数符合较好, 采用细长样品不仅测试方法简单计算方法简单而且测量的准确度要高。如果用小球测量时, 应该注意将小球放在远离谐振腔壁的位置

上,并在计算时令其退电因子 $N_z = \frac{4\pi}{3}$ 才能得到正确的测量结果。另外我们还用不同耦合度的谐振腔对同一样品进行测量,结果符合得很好,这说明测量方法的可靠性。实验和理论表明为提高测量灵敏度,应该尽可能提高谐振腔的品质因数 Q_0 ,并使谐振腔接近临界耦合,或适当地缩小谐振腔的体积。

下面我们着重讨论一下本测量方法的灵敏度,以及如何才能达到预期的灵敏度等问题。

1、首先从理论上分析系统测量损耗角正切达到 10^{-5} 数量级的可能性:

公式(28)是文献⁽¹⁾中测量计算的出发点,它是从文献[1]中的(11)式(12)式,以及 $\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_s}$, 和 $Q_0, Q_e, \beta = \frac{Q_0}{Q_e}$ 在整个测量过程中近似不变的前提下得到的。本文论证了 Q_0, Q_e, β 在整个测量过程中不变这一条件并不是必要的。

当取消这一假设后公式(28)仍然成立,条件是 $\frac{\omega'_0 - \omega'_s}{\omega'_s} \ll 1, \frac{1}{Q} \ll 1,$

即忽略了(21)式中右边方括号包含的那一项。

下面我们来估计一下这些被忽略的项(或称修正项)对 ϵ'' 测量所产生的最大误差,或者说给出 ϵ'' 测量的最高精度是多少。

被忽略掉的(21)式右边的项为

$$\left[\frac{1}{4Q^2} \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_0} \frac{\omega'_0}{\omega'_s} \right) - \frac{1}{4Q_0} \left(\frac{\omega'_0 - \omega'_s}{\omega'_s} \right)^2 \right] \frac{\omega'_s}{\omega'_0}$$

按 $Q_0 = 6 \times 10^3 \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{50}{9000} \cong 6 \times 10^{-3}$

和 TE_{1016} 腔估计, $\frac{V_s}{V_c} \approx 10^{-4}$

则 $\frac{1}{4Q^2} \approx 10^{-12} \quad \frac{1}{4Q_0} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \approx 10^{-9}$

忽略这些项给 $\frac{1}{Q_s}$ 测量带来最大误差为 10^{-9} , 据 $\frac{1}{2Q_s} = 2\epsilon'' \frac{V_c}{V_s}$, 因此给出 ϵ'' 测量的最高精度为 $\epsilon'' \approx 10^{-5}$, 由于一般被测的铁氧体的介电常数 $\epsilon' \approx 10$, 因此测量 $t_g \delta_e \approx 10^{-6}$ 是没有问题的。

另外我们的测量公式是在满足微扰条件下得到的,即要求满足 $\frac{|\omega'_0 - \omega'_s|}{\omega'_s}$

$\ll 1$ 时才成立,运用微扰条件:首先使(7)式右边分式的分子项的计算大为简化,

并把(7)式右边分式的分母项中的 W 用 W_0 来代替。另外(9)式的近似成立,亦都运用了

微扰条件。微扰条件导至的测量百分误差为 $\frac{|\omega'_0 - \omega'_s|}{\omega_s} 100\%$ 。

这里原则上谈到了被忽略了的(21)式中的项可以进行修正,但已无多少实际意义。

2、关于系统的测量灵敏度,及对测量装置中元件的要求。

以测量介电损耗角正切为例。据(32)式:

$$t_{g\delta_e} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \cong \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - 1} = \frac{1}{Q_0(f_0 - f_s)/f_s} \frac{\Gamma_s - \Gamma_0}{(1 + \Gamma_0)(1 - \Gamma_s)}$$

从上公式可看出,为提高测量 $t_{g\delta_e}$ 的灵敏度可以通过提高 Q_0 值,或适当减小谐振腔的体积,目的是加大 $f_0 - f_s$,另外为了显示 Γ_0 变到 Γ_s 有较大的变化率,可以调节 β 接近于1(临界耦合),以上是提高测量 $t_{g\delta_e}$ 灵敏度的三个主要途径。

例如测量 $t_{g\delta_e} = 5 \times 10^{-6}$ 的样品,设 $f_0 = 9.3$ 千兆赫,据(32)可计算下面几个例子。

例	Q_0	$f_0 - f_s$ (兆赫)	Γ_0	Γ_s	Γ_0^2	Γ_s^2	$\frac{\Gamma_s^2 - \Gamma_0^2}{\Gamma_0^2}$
1	6000	50	0.200	0.2015	0.0400	0.0406	1.5%
2	6000	80	0.200	0.2025	0.0400	0.0410	2.5%
3	10000	50	0.200	0.2026	0.0400	0.0411	2.8%
4	6000	80	0.100	0.1026	0.0100	0.0105	5%

从上例可看出提高 Q_0 ,适当加大 $f_0 - f_s$,调节 β 接近1的意义。对于 $f_0 - f_s$ 可取的最大范围,由装置中器件的带宽和稳频器、讯号源可能工作的频宽决定。对于太接近临界耦合,这时对环行器、稳频器、和系统的牢固性要求要很高。这点下面再详细讨论。

为了提高系统的测量灵敏度,相应地对测量装置中各部件提出如下的要求:

- ① 谐振腔有足够高的 Q 值,并在保证稳频器正常工作的情况下,越接近临界耦合灵敏度越高,谐振腔的体积选择与被测样品的 ε' 相适应以保证有适当的 $f_0 - f_s$ 。
- ② 要求讯号源有足够的输出功率和功率稳定度。
- ③ 要求稳频器频率稳定度达到 10^{-8} 。
- ④ 要求环行器⑦,从②到③端的隔离大于30db。环行器的其他性能按一般要

求即可。

- ⑤ 要求功率监视和测量的误差足够小，检波器的指示有足够的分辨率。根据这
点要求，波导元件应有足够的带宽。
- ⑥ 系统的稳固性要高，测量过程中不因机械振动引入误差。

下面对环行器与稳频器的要求作一些讨论。

(A) 关于对环行器性能的要求问题：

环行器各端与系统的联接如图 6 所示

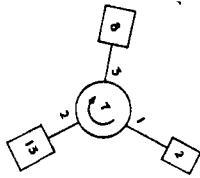


图 6 三端环行器
(其工作情况参阅图 4)

a) 首先讨论 1 至 3 端反向隔离比较好的情况：

我们曾自制如下性能的环行器：三端正向衰减少于 0.4db，反向隔离 1 至 3 端为 43db，2 至 1 端和 3 至 2 端均为 27db (频宽 200 兆赫)。

设 m_{12} 是环行器 2 端输出功率与 1 端输入功率之比， n_{13} 是从 1 端输入功率与 3 端输出功率之比， m_{23} ， n_{21} 的定义与上面类似。 $\alpha_{12}db$ 表示正向衰减， $\alpha_{13}db$ 表示反向隔离。

$$m_{12} = 10^{-\frac{\alpha_{12}}{10}} \quad n_{13} = 10^{-\frac{\alpha_{13}}{10}}$$

对我们的器件 $\alpha_{12} < 0.4$ $\alpha_{13} = 43$ 。

在 3 端测量得谐振腔的反射系数 $\Gamma_{测}$ 与真实的反射数 $\Gamma_{真}$ 存在如下关系：

$$\Gamma_{测}^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) \left(1 - \frac{1}{n_{21}}\right) m_{12} m_{23} \Gamma_{真}^2 + \frac{1}{n_{13}}}{\left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) \left(1 - \frac{1}{n_{21}}\right) m_{12} m_{23} + \frac{1}{n_{13}}} \quad (40)$$

(40) 式是假定 1 → 3 端和 1 → 2 → 3 端两束波是同位相的情况下得到的，这时引起 $\Gamma_{测}$ 和 $\Gamma_{真}$ 的差别最大。

令
$$A = \left(1 - \frac{1}{n_{13}}\right) \left(1 - \frac{1}{n_{21}}\right) m_{12} m_{23}$$

$$\epsilon = \frac{1}{n_{13}}$$

又因 $A \gg \epsilon$

由(40)式可得

$$\Gamma_{\text{测}}^2 \cong \Gamma_{\text{真}}^2 + \frac{\varepsilon}{A} \quad (41)$$

根据(41)式以及上述环行器的性能估计 $\varepsilon < 10^{-4}$, $A > 0.8$, 则 $\Gamma_{\text{测}}^2$ 与 $\Gamma_{\text{真}}^2$ 的差别在 10^{-4} 这一位上。前面例于中 Γ_s^2 与 Γ_0^2 的差别只在 10^{-3} 这位上。

b) 1至3端反向隔离较差(如30db)的情况。

这时 $\Gamma_{\text{测}}^2$ 与 $\Gamma_{\text{真}}^2$ 之差已在 10^{-3} 这一位上。虽然测量 $t_g \delta_e$ 的公式中出现 $\Gamma_s - \Gamma_0$ 。

但是由于 $\Gamma_{\text{测}}^2$ 与 $\Gamma_{\text{真}}^2$ 之间相差为一常数(即 $\frac{\varepsilon}{A}$)，因而对结果的正确性影响并不重要。

如(32)式中的 Γ 用测试出的值代入与用真实值代入，两者之间的百分误差为 $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{A} \left(\frac{1}{\Gamma_s \Gamma_0} \right) 100\%$ 。

根据例2，这种误差为2%。对例4这种误差为6%，当环行器1—3端隔离为40db时。这时例4的误差从6%下降到0.6%。

(B) 对稳频器的技术要求

我们所用的稳频器是自制的电子管稳频器，其频率稳定度为 10^{-6} 。晶体检波器的工作电流为 $5\mu A$ 左右仍能正常工作。正常工作电流的最低限度规定了 Γ_0 选择的下限，对一般速调管电源来讲(大功率讯源除外)。这一工作电流可达到 $\Gamma_0 \approx 0.08$ 左右。

对稳频器的频率飘移为 $\Delta\omega$ ，它对 Γ 测量带来的误差为 $\left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{Q_0}{1+\beta} \right]^2$ 。根据前面4个例子， $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_s$ 的变化在 10^{-3} 这一位上。如要求频率飘移引起 Γ 的测量误差为 $10^{-4} = \left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \frac{Q_0}{1+\beta} \right]^2$ 即要求 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 10^{-6}$ 。这一要求是容易满足的。

五、结 语

本文进一步分析表明，考虑到测量过程中 $Q_0, Q_e, Q_0(\omega)/Q_e(\omega)$ 随频率的变化关系，对 $t_g \delta_e$ 的测量精确度为 10^{-6} 数量级的情况下，文献[1]所给出的测量公式仍然有效。

根据本文分析，对测量 $t_g \delta_e \approx 5 \times 10^{-6}$ 的材料，需要有一个测准到0.01db的精密衰减器，和一套稳频度为 10^{-6} 的稳频器，以及1—3端隔离大于30db(主要指标)，的环行器，最好有一个稳定讯源输出功率的装置，这对提高测量精度亦是十分必要的。另外装置中的波导元件有足够的带宽，以及检测装置有足够的分辨率。

我们已用现有的系统测出 $t_g \delta_e = 2 \times 10^{-4}$ 的样品，仍有分辨更小的 $t_g \delta_e$ 的潜力。

因此结论是按照我们提出的方法测量到 10^{-6} 数量级并不困难。

近年来在数字仪表和数据自动处理技术等方面有很大发展,作者认为有必要采用新技术改进整个测量装置,但是,本文所述的测量原理和方法仍然有效。

参 考 文 献

- [1] 史隆培、廖绍彬,物理学报,23(1974),213.
- [2] J. C. Slater, *Microwave Electronics*, 1950.

Measurement of the Dielectric Constants and the Permeabilities of Microwave Ferrites

Shi Longpei

Abstract

The method of measuring the dielectric constant and the permeabilities of microwave ferrites has been proposed by author⁽¹⁾. By further analysis in this paper, it is shown that it is possible to measure the loss factor with that method to an accuracy of the order of 10^{-6} .