

# 关于超实数的公理化体系(I)\*

——对Keisler公理体系的补充意见

纪哲锐

(物理学系)

## 摘 要

本文对Goethals关于非标准分析的预言进行了探讨,对Keisler关于超实数的公理化体系作了评论。

1973年,在非标准分析问世十三年之后,著名数理逻辑学家哥德尔作了如下的预言:“我认为,在未来的几个世纪中,人们将会认为这是数学史上的一件大怪事,在发明微积分之后三百多年,第一个精确的无穷小理论才发展起来。”“我有充分的理由相信,非标准分析,将以这种或那种形式成为未来的数学分析”<sup>(1)</sup>。本文是循此想法的一个初步尝试,并准备进而探讨其物理应用。

## 一、问题的提出

1960年数理逻辑学家A·鲁滨逊创立了数学分析的新领域——非标准分析,从而在持续了三百多年的关于有穷与无穷的争论中开辟了新的篇章。1666年,牛顿和莱布尼兹差不多同时创立了微积分。这个理论以其在应用上的巨大成就和生动、直观而令人折服,而又由于逻辑上的矛盾而令人困惑。1821年,柯西在他的《分析教程》中首次把微积分理论建立在极限概念的基础上。柯西—韦尔斯特拉斯理论以其逻辑推理的严谨性使大多数数学家感到很满意,而又以其拐弯抹角、十分绕嘴的极限定义使许多初学者不得要领。实际上,柯西的理论仍然有循环论证的弊病,作为这个理论的基本出发点的极限概念是建立在实数系的连续结构的基础上的,而实数系本身的构造,反过来又必须借助于极限概念<sup>(2,4)</sup>。能不能有这样的微积分,它既具有牛顿时期微积分理论的生动、直观,而又保持逻辑上的严谨性?1960年,鲁滨逊在现代数理逻辑和模型论的研究成果的基础上,提出了分析的非标准模型,从而为实现这个想法奠定了理论基础。流行至今达一百五十多年的柯西理论称为标准分析;而同样流行过一百五十多年的牛顿-莱布尼兹理论称为古典分析。非标准分析的问世,标志着数学分析发展到了第三个历史阶段。一百多

\* 本文1978年3月收到,1980年10月经作者修改。

年来,极限理论已经渗透到数学的各个分支,并成为自然科学语言的组成部分。如果非标准分析取代了标准分析,这一分析基础的重大变革必将对数学的各个分支产生深刻的影响,并对数学与物理的教学与研究带来不可估量的影响。因为语言的进化意味着思维的进化,从而意味着可能更快地获得新的发现。

## 二、问题的根据

让我们以一个简单的例子来说明古典分析、标准分析与非标准分析的差别。设自由落体的路程 $x$ 与时间 $t$ 的关系是 $x = 5t^2$ ,从时刻 $t$ 至 $t + dt$ 的位移 $dx = 5(t + dt)^2 - 5t^2 = 10t dt + 5dt^2$ ,从而平均速度 $\frac{dx}{dt} = 10t + 5dt$ 。在求瞬时速度的时候,牛顿面临两者择一的选择:

(1) 或者 $dt \neq 0$ ,则这时平均速度 $\frac{dx}{dt} = 10t + 5dt$ 仍然不是瞬时速度,不能准确反映该瞬时运动的快慢。

(2) 或者 $dt = 0$ ,但这时比值 $\frac{dx}{dt} = \frac{0}{0}$ 显然没有意义。

在这两难的情况下怎么办?只有在等式 $\frac{dx}{dt} = 10t + 5dt$ 的左端让 $dt \neq 0$ ,而在等式的右端又让 $dt = 0$ ,这就显然陷入了逻辑上的矛盾。就这样,“高等数学中的几乎所有的证明,从微分学的最初的一些证明起,从初等数学的观点看来严格地说都是错误的”<sup>[3]</sup>。这样的“是0非0”的 $dt$ 就是古典分析中的“神秘的无穷小”。

矛盾的产生在于“无穷小”在实数域中并不存在。柯西理论的要点是把无穷小仅仅理解为“以0为极限的变量”,从而在论域中把无穷小驱逐出去。因此,瞬时速度被理解为当 $\Delta t$ 趋向0时,平均速度 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$ 的极限。而更严格的说法是:“你任给一个正数 $\epsilon$ ,我总能找到一个正数 $\delta$ ,使得当 $|\Delta t| < \delta$ 时,  $|\frac{\Delta x}{\Delta t} - v| < \epsilon$ 。这样的 $v$ 就叫瞬时速度。”这样一个似乎只能无限靠近,永远不能达到的 $v$ ,在极限意义下又忽然达到了!这是一种巧妙地回避问题实质的回答。正如D·希尔伯特在1925年所指出的:“对数学来说,无限的意义还没有完全得到澄清。在韦尔斯斯特拉斯的分析中,虽然通过把有关无限小和无限大方面的叙述归结为有限量之间的关系,从而消除了无限小和无限大;但是这个无限仍然出现在定义实数的那些无限的数列中,并且此外还出现在实数系统这个概念中,从而这实数系统就被理解为好象是一个既完成又闭合的整体”<sup>[4]</sup>。这样,由引入实无限小而把实数系统扩大这一非常自然的步骤就被轻率地忽视了。

非标准分析是建立在对形式逻辑的本质的更深刻的理解的基础上的。使用过计算机的人都知道,计算机是按照人们事先给它设计好的符号、符号使用规则及安排好的程序来模拟人的某些逻辑思维的。只要人们的安排中没有逻辑矛盾,计算机就不会得出自相矛盾的结果。但计算机是这样一部思维机器,它想得比常人快千万倍,但它不知道自己正在想什么。当人们在进行抽象思维的时候,当他暂时撇开他的概念所由发源的现实原型

的时候,情况也与此相似。所不同的是人总是要不断地从现实原型中吸取营养以丰富和发展自己的概念。计算机只“懂得”“0”和“1”两个符号。至于这“0”和“1”究竟是代表电压的低和高,电灯的亮和暗,晶体管的导通和截止,如此等等,原则上都是任意的。计算机是用“形式语言”来模拟逻辑思维的,它可以而且必须完全撇开思维的内容,正如形式逻辑只讨论思维的形式一样。无穷小是从现实世界中借来的,正如 $i = \sqrt{-1}$ 是从现实世界中借来的一样。复数之所以得到公认,除了它非常有用之外,就是因为它被成功地纳入逻辑体系。无穷小的历史作用显然更大,而它之所以得不到公认,就是由于人们虽然经过多方努力仍然不能够成功地把它纳入逻辑体系。现在情况已经完全改变了。

标准分析本身就是一种形式语言。实数及建立于其上的运算构成实数域 $R$ 。用以谈论 $R$ 的形式语言记为 $L$ , $L$ 中的任意语句是一个关于 $R$ 的命题,当然它要么是真的,要么是假的。 $L$ 中一切真语句的集合记为 $K$ ,并称 $R$ 是 $K$ 的一个“模型”。所谓一个语句集合有模型,就是说至少存在一种解释使得该语句集合中的一切语句皆为真。例如,标准分析中的一切定理 $K$ 在实数域 $R$ 中的解释为真,在有理数域 $Z$ 中的解释就不全为真(如“ $X^2 - 2 = 0$ 有解”),故 $R$ 是 $K$ 的模型,但 $Z$ 不是 $K$ 的模型。一个语句集合如果推不出矛盾,则称为逻辑上协调的。重要的是,根据哥德尔的完全性定理:“一个语句集合是协调的,当且仅当这语句集合有一模型。”以及紧致性定理:“如果一个语句集合的每一个有限子集合都有模型,则这个语句集合有模型。”因此有下列非常简单的推论(鲁滨逊首先作出的):

下列无穷语句集合 $\{K_n\}$ ( $n$ 可以是不可数无限)

$$K_1: \text{存在 } \varepsilon \text{ 使 } 0 < \varepsilon < 1$$

$$K_2: \text{存在 } \varepsilon \text{ 使 } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

.....

$$K_n: \text{存在 } \varepsilon \text{ 使 } 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$$

.....

的每一个有限子集合显然有模型(这就是实数域 $R$ ),于是根据紧致性定理,无穷语句集合 $\{K_n\}$ 本身有模型(记为 $R^*$ )。这样一个对一切自然数 $n$ 都满足 $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ 的 $\varepsilon$ ,在实数域 $R$ 中是不存在的,但它却可以存在于 $R^*$ 中,并称为实无穷小。这样,标准分析中的一切定理和公理(除阿几米德公理外,下同)和无穷语句集合 $\{K_n\}$ 在一起有模型 $R^*$ 。这样,我们得到了一个数学结构,在它的论域 $R^*$ 中不仅包含 $R$ 而且包含无穷小量 $\varepsilon$ ,使得标准分析中的一切真命题在 $R^*$ 中的解释仍为真。一句话,曾是在人们“认识彼岸”的无穷小,现在可以纳入逻辑体系。

### 三、非标准分析的公理化体系

历史上一些重大的科学发现,其出发点往往可以归结为一两句话。狭义相对论是如此,广义相对论是如此,罗巴切夫斯基几何也是如此。作为一个鲜明的对比,我们对后

者的历史作一简短的回顾。历史上第一个公理化体系—欧几里德几何是科学思想的里程碑。两千多年来,许多著名数学家企图证明欧氏几何的第五公设而归于失败。罗巴切夫斯基从如下的猜想出发:第五公设是不可证明的,即第五公设的逆命题与欧氏几何的其他公设并不矛盾。罗巴切夫斯基用如下的公设来代替第五公段:“平面内过给定直线外一点至少可作两条(注:作为推论则有无穷多条)直线与给定直线平行。”而依原样保持其他公设不变,从而创立了逻辑上一致的罗氏几何学。往后的发展证明了第五公设不可证明的猜想是完全正确的。

我们将完全仿照这一思想,从实数系的公理出发来建立超实数系的公理化体系。我们的体系与 Keisler 的体系是有基本分歧的。本文在完成初稿时并未见到 Keisler 的书<sup>[6]</sup>,后来我们才与该书作了比较。下面在阐述我们观点的同时,兼做一些比较。

### 实数系 $R$ 有4条公理:

#### (一) $R$ 的代数公理

(1) 闭合律: 0 和 1 是实数。若 $a$ 和 $b$ 是实数,则 $a+b$ ,  $ab$ ,  $-a$ 是实数。若 $a$ 是实数且 $a \neq 0$ ,则 $1/a$ 是实数。

(2) 交换律:  $a+b=b+a$ ,  $ab=ba$ 。

(3) 结合律:  $a+(b+c)=(a+b)+c$ ,  $a(bc)=(ab)c$ 。

(4) 同一律:  $0+a=a$ ,  $1 \cdot a=a$ 。

(5) 反演律:  $a+(-a)=0$ 。若 $a \neq 0$ ,则 $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ 。

(6) 分配律  $a \cdot (b+c) = ab+ac$ 。

#### (二) $R$ 的序公理

(1)  $0 < 1$ 。

(2) 传递律: 若 $a < b$ 和 $b < c$ ,则 $a < c$ 。

(3) 三分律:  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ , 三式有且仅有一式成立。

(4) 和律: 若 $a < b$ ,则 $a+c < b+c$ 。

(5) 积律: 若 $a < b$ ,且 $0 < c$ ,则 $ac < bc$ 。

(6) 根公理: 对每一实数 $a > 0$ 和每一正整数 $n$ ,都存在实数 $b > 0$ 使得 $b^n = a$ 。

#### (三) $R$ 的阿几米德公理

对每一实数 $a$ ,都存在一正整数 $n$ 使得 $a < n$ 。

#### (四) $R$ 的连续性公理(Cantor)

对于每一个节套,有且仅有一个实数 $\xi$ 为所有区间所共有。

此处的节套是指一连串区间 $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \dots$ 满足当 $n \rightarrow \infty$ 时 $b_n - a_n \rightarrow 0$ 。连续性公理有Dedekind, Weierstrass, Cauchy和Cantor的四种不同表述,若阿几米德公理成立,则它们是等价的。此处我们采用独立于阿几米德公理的Cantor表述。

我们来讨论 $R$ 上的阿几米德公理。

公理的这种表述等价于:不存在无限大的实数。因此又等价于:不存在无限小的实

数。因为对每一实数 $a$ 都存在正整数 $n$ 使得 $a < n$ ，等价于对每一实数 $b = \frac{1}{a}$ 都存在正整数 $n$ 使得 $b > \frac{1}{n}$ ，因此不存在无限小的实数。

而上述公理的否定，即非阿几米德公理可表为：存在一个超实数 $\epsilon > 0$ ，使得对一切正整数 $n$ 都有 $\epsilon < \frac{1}{n}$ 。 $\epsilon$ 称为正无穷小。非阿公理也可等价地表为，存在一个超实数 $\eta > 0$ ，使得对一切正整数 $n$ 都有 $\eta > n$ 。 $\eta$ 称为正无穷大。实际上只要取 $\eta = 1/\epsilon$ 即可。

Keisler关于实数系只提出前三条公理，而丢掉了连续性公理，这是一个重大的疏忽。而Keisler关于超实数系又提出了六条公理，我们认为只需采纳他的前三条公理，而后三条公理是可以证明的，因而是多余的。

为方便讨论，现引用Keisler关于超实数系 $R^*$ 的六条公理如下：

(一)\*  $R^*$ 的代数公理

每一实数都是超实数。若 $a$ 和 $b$ 是超实数，则 $a + b$ ， $ab$ 和 $a - b$ 是超实数。若 $a$ 是超实数且 $a \neq 0$ ，则 $1/a$ 是超实数。

交换律、结合律、同一律、反演律、分配律对一切超实数成立。

(二)\*  $R^*$ 的序公理

传递律、三分律、和律、积律对一切超实数成立。

对每一超实数 $a > 0$ 和每一正整数 $n$ ，存在一个超实数 $b > 0$ 使得 $b^n = a$ 。

(三)\* 无穷小公理(即非阿公理)

存在一个正无穷小超实数。

(四)\* 标准部分公理：每一有限超实数均无限接近于刚好一个(不多也不少)实数。

(五)\* 函数公理：对于每一个(一元或多元)实函数 $f$ ，在 $R^*$ 中均存在一个与之相应的(一元或多元的)函数 $f^*$ ，称为 $f$ 的自然开拓。特别是，由加、减、乘、除所确定的函数由公理(一)\*来决定。

(六)\* 解公理：如果两个公式系统在 $R$ 中具有相同的解集，那么，它们在 $R^*$ 中亦具有相同的解集。(公式系统是指有限个等式和不等式的集合)。

我们把实数系 $R$ 扩大到超实数系 $R^*$ 的做法是：第一，引入非阿公理从而把实数域扩大，这就是Keisler的(三)\*；第二，规定对实数系适用的代数公理、序公理同样适用于超实数系，这就是Keisler的(一)\*(二)\*。除此之外，不再引入任何其他公理。以下我们将证明Keisler的公理(四)\*(五)\*(六)\*。

我们把超实数定义为对实数及无限小 $\epsilon$ 进行有限次( $n$ 次)代数运算而得的一个数，这个数如果是有限的，就称为有限超实数，如果是无限的，就称为无限超实数，容易验证，不存在第三种可能性。依照这个定义，极易证明(从略)，一切有限超实数均取 $\xi + \epsilon$ 的形式，此处 $\xi$ 为有限实数， $\epsilon$ 为无穷小。在定义中我们排除了无限次代数运算，因为所谓‘无限次代数运算’是一个尚未定义的概念。往后我们将给出它的定义。定义： $n$ 次代数运算的结果可视为 $n$ 的函数 $f(n)$ ，同样， $\omega$ 次代数运算的后果可视为 $\omega$ 的函数 $f(\omega)$ ，此处 $\omega$ 是无穷大自然数。依此定义，无限次代数运算的结果只能是有限超实数、无限超实数或者不存在。

容易证明, (定理一)有限超实数采取  $\xi + \epsilon$  的形式是唯一的。反证法: 若取两种不同的形式,  $\xi_1 + \epsilon_1 = \xi_2 + \epsilon_2$ ,

则  $\xi_1 - \xi_2 = \epsilon_2 - \epsilon_1 =$  无穷小

但依  $R$  的阿几米德公理, 两相异实数之差  $\xi_1 - \xi_2$  不能等于非零无限小。  $\therefore \xi_1 - \xi_2 = 0$ ,  $\therefore \epsilon_2 - \epsilon_1 = 0$ ,  $\therefore \xi_1 = \xi_2$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ 。得证。

(定义一)如果有限超实数  $a, b$  之差为无穷小, 即  $a - b = \epsilon$ , 就称  $a$  无限接近于  $b$ , 或  $b$  无限接近于  $a$ , 记以  $a \simeq b$  或  $b \simeq a$ 。

(定义二)如果有限超实数  $a$  与实数  $b$  之差为无穷小, 即  $a - b = \epsilon$ ,  $a \simeq b$ , 就称实数  $b$  是超实数  $a$  的标准部分, 称  $\epsilon$  是超实数  $a$  的非标准部分或无穷小部分。显然, 根据定理一, 有限超实数的标准部分存在且唯一。这就是 Keisler 的标准部分公理(四)\*。而且, 有限超实数的非标准部分也是唯一的。今后以  $^\circ(a)$  标记有限超实数  $a$  的标准部分。

$R$  上的 Cantor 公理, 在  $R^*$  中可表述如下: 对于每一个节套, 存在着无穷多个形如  $\xi + \epsilon_i$  的超实数为所有区间所共有, 其中  $\xi$  是唯一的实数,  $\epsilon_i$  是任何无穷小量。这是因为按照  $R$  的 Cantor 公理, 每一个节套有且仅有一个实数  $\xi$  属于所有区间, 再根据  $R^*$  的非阿公理和定理一, 属于所有区间的还有一切形如  $\xi + \epsilon_i$  的超实数。其中  $i$  标志不同的无穷小量,  $i$  可取遍全体自然数, 或者比如说全体实数。集合  $\{\xi + \epsilon_i\}$  称为以实数  $\xi$  为中心的单子。于是, 在  $R^*$  中每一节套的交集是一个单子。但这一陈述已不是公理, 而是定理。

很容易把实函数的概念推广到超实数域  $R^*$ 。(定义三)若  $x, y \in R^*$ , 且从  $x$  到  $y$  建立了一对一的对应, 则称这个对应  $f$  在  $R^*$  上定义了一个超实函数, 记为  $y = f(x)$ 。

如何把已知的实函数的定义域及值域延拓到  $R^*$ , 这是一个在未曾有函数定义的区域如何补充定义的问题, 因此, 原则上是任意的。Keisler 的函数公理(五)\*, 实际上是至于“自然延拓”的一个不完整的定义: 因为它规定由加、减、乘、除所确定的函数关系由公理(一)\*来决定, 在除此之外的情形下“自然延拓”如何规定呢? 这里没有回答。回答在别处: 解公理(六)\*恰恰就是“自然延拓”的定义的直接推论。因为在 Keisler 的《无限小运算基础》<sup>[6]</sup>一书中给出的自然开拓的定义是: “令  $Y$  是一个实数集,  $Y \subseteq R$ 。所谓  $Y$  的自然延拓是这样子集  $Y^* \subseteq R^*$ , 使得每一个以  $Y$  为实数解集的公式系统以  $Y^*$  为超实数解集”。这样, 所谓“解公理”就是自然延拓的定义的直接推论。可见, Keisler 的公理(五)\*(六)\*不是互相独立的, 它们合起来就是关于自然延拓的定义及存在性, 而这就是鲁滨逊的发现: 存在着分析的非标准模型,  $R$  的一阶语句在  $R^*$  中的解释有着同样的真假值。这是一个逻辑学的定理(转移定理), 当然不能作为数学的公理。结论是: Keisler 的公理(四)\*(五)\*(六)\*是多余的。

在下一篇文章中我将运用超实数公理来讨论微积分及  $\delta$  函数问题, 以及量子场论中的发散困难问题。

### 参 考 文 献

- [1] A.鲁滨逊, 非标准分析, 第二版序言, 1974, 中国科学院数学研究所 (1976).
- [2] C.·B·波耶, 微积分概念史, (1977), 上海人民出版社, 308.
- [3] 恩格斯, 反杜林论, 人民出版社, 132.
- [4] 外国自然科学哲学摘译, 上海人民出版社, 1975, 2.
- [5] H.J. Keisler, *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmilt, Boston, 1975.
- [6] H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976.

## On the Axiomatics of Hyperreal Number

*Ji Zherui*

### Abstract

A study has been made to the Goethal's Prediction about the nonstandard analysis, and a comment also made to the Keisler's axiomatics of hyperreal number.