随机点过程的物理背景和数学模型

梁之舜　邓永录
（数学力学系）

随机点过程实质上是一大类特殊的随机过程，在某些文献中也称为随机事件流、随机事件序列或随机计数过程（复合的点过程也称脉冲过程或跳跃过程）。它早期的研究差不多集中于泊松过程——一类简单而又重要的点过程，A.Я.Хинчин，有关“公用事业数学方法”的著作(如〔15〕、〔16〕、〔17〕)在这方面起着奠基的作用。随后，对另一类重要的点过程——更新过程的研究以及它在工程技术（特别是在可靠性问题）中的应用开拓了从间距性质出发研究点过程的方向。此外，在生物学，天文学等领域中还要研究群体过程（Population Process）……。由于应用和理论上的需要，人们把这些具体过程的各种物理背景综合抽象为一个统一的数学模型来加以研究和处理，于是，在近二、三十年间随机点过程就逐渐形成为随机过程的一个统一而独立的分支。目前，它的应用已日益广泛地渗透到许多领域，但是，它的基本理论还未完全成熟，尚有待于进一步完善。尽管如此，有一些数学家仍然认为，随机点过程的发展已从被称作古典时期的“整体的静态描述”进入到点分布随时间而改变(例如，考虑到过程的调制与反馈等)的“动态描述”，并且研究随机点过程的检测、滤波、预测和控制等问题，在数学工具方面已大量应用现代鞅论(参看P. Bremand, J. Jacod 〔5〕)。

随机点过程的研究在我国还处于初始阶段，我们认为，要使这一分支在我国迅速发展起来，首先必须尽可能弄清楚有关的物理背景和发展的来龙去脉，引起广大的应用工作者的注意，其次是掌握它的基本理论并开展有关的研究工作。

一、随机点过程的物理背景

在客观世界中，存在着大量的随机现象，其中我们所关心的随机事件具有高度局部化的特点，亦即事件的发生可以认为是只限于在时间或空间（记之为X）中的一个很小的范围内，因此在数学上可以用一个理想的点来表示。于是可以粗略地说，一个按一定的统计规律在空间X中随机地分布的点集就形成一随机点过程。

在最简单的情形中，X通常是一维的，人们往往就把X取为时间轴或它的一个区间（或子集）。

例1. 一天中某电话总机接到的呼唤形成一随机点过程。这时 X 是时间区间 〔0,24〕（以小时为单位），每一次呼唤发生的时间就是一个点，这个点过程的一个现实是一时间序列 $\{t_1, t_2, \cdots\cdots, t_N\}$，其中 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant t_N\leqslant 24$，$t_i$ 是第 i 次呼唤发生的时间，N 则是一天内发生的呼唤次数。

类似的例子可以举出很多，例如一台机器在时间区间 $[t_0, t_0+T]$ 内因发生故障而停机的事件也形成一个和上例类似的随机点过程。又如电子管阴极受热而产生的电子发射，地球大气层的放电现象，在动物或人类的神经纤维中插入微电极后产生的尖峰放电现象等。

有时X可以不表示时间，例如，棉纱沿着长度分布的疵点亦同样形成一随机点过程，这时X是实数轴的一个区间 $[0, L]$，其中 L 表示棉纱的长度。

X也可以是一个多维空间，这时它表示二维平面、曲面，三维空间或更高维的空间。

例 2. 假若我们对某地区从时间 t_0 开始的长为 T 的时间区间内发生的地震事件(在一定的震级范围内)进行观测，每一次地震的震中(以它的经度和纬度表示)和发震时间可以根据各站台的观测资料确定。因为震中的广度最多几公里，而震动的持续时间一般是以秒计算，这相对于我们研究的整个地区和时间的范围是很小的，所以可把它理想化为一点。于是，每一地震事件可以用一个三维向量 $(\vec{r}, t)$ 来刻划，而描述地震事件的序列 $(\vec{r_1}, t_1)$，$(\vec{r_2}, t_2)$，……，$(\vec{r_N}, t_N)$ 是一随机点过程的现实，其中 $\vec{r_i}$ 是表示第 i 次地震震中位置的二维向量，t_i 是第 i 次地震的发生时间，它取值于 $[t_0, t_0+T]$，于是，X是一个三维的时间-空间。

分支过程和群体过程（参看〔12〕）是另一类随机点过程，这时 X 表示一个“型空间”，每一点 $x\in$X 表示具有某种属性或属于某种类型的个体。例如，x 可以表示人类或动物的年令、重量、肤色，运动质点的位置、速度、能量，星的亮度、位置以及基本粒子的类型(中子、光子或电子等)……等等。随机点分布可写成如下形式：$\omega=(x_1, n_1;\ x_2, n_2;\ \cdots\cdots;\ x_k, n_k)$，它表示有 n_1 个点属 x_1 型，n_2 个点属 x_2 型，……，n_k 个点属 x_k 型，其中 k 及 $n_1, n_2, \cdots\cdots n_k$ 都是随机的。

在上列例子中，空间 X 是数直线或多维欧氏空间。有时为了理论或应用的需要，还可以把 X 推广到更一般的抽象空间的情形。

除了自然界的随机现象本身产生随机点过程外，在随机过程理论及其应用的研究中，特别是对过程轨道的局部性质进行研究时，常常也会产生随机点过程，著名的“跨越门槛”问题就是这样的一个例子。这类问题是研究一随机过程的轨道向上或向下跨过某水平 u（特别地、当 $u=0$ 时就是跨越零点）或某曲线 C（如为闭曲线则是向内或向外跨越）的时间分布，它在实际应用中有重要的意义。例如，在船舶适航性的研究中，要求算出船舶在海浪作用下引起摇摆时横倾角 $\theta(t)$ 在某时间间隔内取零值的平均次数或超过 $\pm25°$ 以外的平均次数（这里 $\theta(t)$ 是一平稳正态过

程)，求出船舶桅杆越出某个由横倾角与纵倾角构成的园锥外所逗留的平均时间，求出定点海面浪高（亦为平稳正态过程）超过某定值的平均次数等等。除此之外，随机过程的“随机抽样”，“随机缺漏”和纯跳跃过程在某时间间隔内跃度超出某范围的次数等问题也产生不同类型的随机点过程。

最后还要指出，许多随机过程，例如连系于排队论和可靠性理论的平稳随机过程 $\{\xi_t\}$，它的平稳分布常常由一个嵌入的随机过程（马尔可夫链或更新过程）$\{\xi_{t_n}\}$ 所决定，其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n\cdots$ 是一随机点过程，它的发生时间间隔相互独立，这个点过程就是所谓“嵌入点过程”。最近 $K\bar{o}nig$ 等人（参看〔19〕）进一步引入所谓“具有嵌入标值点过程的随机过程”，他们把序列 $\{t_n\}$ 的独立性假设除去，而且所引入的空间是一般的拓扑空间。这样的“嵌入标值点过程”问题是近年来一个值得注意的研究方向，由此亦可看出一般随机过程的研究会引起随机点过程的问题。

二、随机点过程的两类统计特性

对于随机点过程来说，人们关心的首先是代表随机事件出现的时间、地点或状态的点的统计规律，这些规律通常联系于随机点分布的两方面的性质：

（1）计数性质

随机点过程的计数性质联系于点分布落在 X 的某子集中的点数。当 X 是实数轴 $R=(-\infty, +\infty)$ 或正半轴 $R_+=[0, +\infty)$ 时，令 N_t 表示在区间 $[0, t]$ 内出现的点数，即事件发生的次数。易见 $\{N_t, t\in R\}$ 本身是一个取非负整数值的递增随机过程，我们称为随机点过程的“伴随计数过程”，下面将要证明随机点过程和它们的伴随计数过程之间存在一一对应关系，因此，人们有时直接把计数过程称做点过程。

在统计资料的分析中，所谓“平均发生率”有着特殊的意义，它是单位时间内事件的平均发生次数。通过观测对记录到的事件的发生次数进行累加并描点 (t, N_t) 而画出统计图，从图中就可看出平均发生率。

但是，这样的图只是给出 N_t 的一个现实，根据一个现实而进行的统计分析不一定能充分反映研究对象的本质。进一步的研究需要根据研究对象的物理特性确定随机过程的有限维分布，特别是求出 $P_r\{N_t=k\}$，$k=0,1,2,\cdots\cdots$。过程的瞬时发生率（或称强度函数）

$$\lambda(t)=\lim_{h\to 0}\frac{P\cdot\{N_{t+h}-N_t>0\}}{h}$$

就是一个能反映过程的计数特性的量。$\lambda(t)$ 可能是一个常数，也可能是依赖于 t 的

函数，或在某种意义下是一个随机变量或随机过程。但是，$\lambda(t)$作为一个极限可能不存在，这时只能讨论强度Λ_t，粗略地说，Λ_t表示在〔0，t〕内的平均发生次数。在理论上它一般是普通的斯蒂阶司测度，但也可能是依赖于过程N_t的过去或其它随机过程的随机测度。随机点过程问题的研究，新模型的建立以及随机点过程在控制问题中的应用等常常是围绕着与$\lambda(t)$或Λ_t有关的问题展开的。

（2）间距性质

这里所说的间距是指一事件的发生和相继的另一事件发生之间的间距。当X是时间轴R或R_+时，它就是相继事件之间的时间间隔。假定T_1是原点到第一个事件的时间间隔，T_i是第i-1个事件到第i个事件的时间间隔，则$T_1, T_2,\cdots\cdots T_n,\cdots\cdots$是一随机序列。随机点过程的统计性质可以通过这一随机序列的统计性质反映出来。在大多数情形中，序列各项可以是相互独立同分布，也可以是相互独立但不同分布，还可以是相互依赖而形成一马尔可夫链等等。

当T_2，T_3，……，T_n是（相互独立）同分布（T_1的分布可能不同）时，重要的问题是研究$T_i=T$的分布即“等待时间分布”（用可靠性理论的术语则是“寿命分布”），此外还有从任一时刻t到后一事件发生的等待时间——“接后发生时间”和从前一事件发生到给定时刻t所经过的时间——“对前发生时间”。

对应于“瞬时发生率”我们有“临界发生率”（用可靠性理论的术语是“故障率”），它定义为

$$\mu(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t^{-1}P\{t<T\leqslant t+\Delta t\,|\,T>t\}.$$

直观上，故障率近似地等于那些直到时刻t仍正常工作的设备在紧接着时刻t之后单位时间发生的平均故障数。

三、随机点过程的有序性 (Orderliness)

在点过程性质的研究中，“有序性”的概念起着重要的作用。但它的名目繁多，较常见的就有平常性（普通性)或辛钦有序性；以概率为1的有序性；一致有序性；解析有序性；条件有序性等等。

在对有序性作简单讨论之前，先引入随机点过程的平稳性这一概念。

为叙述方便起见，假设$X=R_+$并把$t\in X$理解为时间。对于任意$0\leqslant s<t$，定义$N_{s,t}=N_t-N_s$。随机点过程$\{N_t;\ t\geqslant 0\}$称做平稳的，如果N_t具有平稳增量，即对任意$0\leqslant t_1<t_2$和$h\geqslant 0$，随机变量N_{t_1,t_2}与N_{t_1+h,t_2+h}有相同的分布。这也就是说，事件在某一时间区间发生的次数只依赖于区间长度而与区间的位置无关。

有序性这一概念是А.Я.辛钦首先提出并指出它的重要性。在平稳事件流的讨

论中他又提出“平常性”这一概念，即过程满足条件：

$P_r\{N_{t,t+h}\geqslant 2\}=P_r\{N_{0,h}\geqslant 2\}=o(h)$，一般把这性质称做“辛钦有序性”。直观上它表示事件不可能同时发生，因而可把事件发生的时间按先后排次序。从类似的想法出发，人们又引入另一种有序性——以概率为1的有序性。如果任一随机点分布以概率为1没有重点，即满足条件

$$P_r\{t_i\neq t_j,\ i\neq j\}=1,$$

就称它是以概率为1有序的，这里 t_i, t_j 是点（事件）的发生时间。可以证明，辛钦有序蕴含以概率为1有序，但反之未必成立。如果加上对任意 t，N_t 有有限的一阶矩（即 $EN_t<\infty$）这条件，则由以概率为1有序也可推出辛钦有序，从而这两种有序性等价。

对于非平稳的情形，情况较为复杂，这时有序性的定义应叙述为：

随机点过程 $\{N_t, t\geqslant 0\}$ 称做辛钦有序的，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\equiv\delta(t,\varepsilon)>0$，使当 $\delta'<\delta$ 时有

$P_r\{N_{t,t+\delta'}\geqslant 2\}\leqslant\varepsilon P_r\{N_{t,t+\delta'}=1\}$。如 $\delta(t,\varepsilon)\equiv\delta(\varepsilon)$ 与 t 无关，则过程称做一致辛钦有序的。

随机点过程 $\{N_t, t\geqslant 0\}$ 称做解析有序的，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\equiv\delta(\varepsilon,t)>0$，使当 $\delta'<\delta$ 时有

$$P_r\{N_{t,t+\delta'}\geqslant 2\}\leqslant\varepsilon\delta'.$$

如 $\delta(t,\varepsilon)\equiv\delta(\varepsilon)$ 与 t 无关，则过程称做一致解析有序的。

易见当点过程是平稳时，必有 $\delta(t,\varepsilon)\equiv\delta(\varepsilon)$ 与 t 无关，这时有序性和一致有序性是等价的。我们还可进一步证明，对于平稳点过程来说，如果对任意 $t>0$，N_t 均有有限一阶矩，则上面提到的各种有序性等价（参看〔1〕，P.348）。

还有一个要用到的概念是所谓“条件有序性”。

令 $\mathbf{F}_{t-}=\sigma\{N_s,\ 0\leqslant S<t\}$，即它是由过程在 t 以前的历史产生的 σ 代数。如果对任意事件 $Q\epsilon\mathbf{F}_{t-}$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\equiv\delta(t,\varepsilon)>0$，使当 $\delta'<\delta$ 时恒有

$P_r\{N_{t,t+\delta'}\geqslant 2\mid Q\}\leqslant\varepsilon P_r\{N_{t,t+\delta'}=1\mid Q\}$，则称点过程 $\{N_t, t\geqslant 0\}$ 是条件有序的。显然，条件有序性蕴含无条件有序性。

四、随机点过程的数学定义

前面已给出了随机点过程的描述性定义，为了理论上的需要，我们还要给出严格的数学定义。

（1）随机点分布与点列可测空间

状态空间X可以是一维或多维的欧氏空间，也可以是更一般的拓扑空间，例如

是可分的局部紧 Hausdorff 空间。但为了讨论简单起见，这里假定 X $=R$或其子集，而 B 是 X 中全体波雷尔集组成的 σ 代数。

以 $\langle x\rangle$表示 X 中某些点的集合，这些点可以重复，将它们按大小次序排列就可写成 $\langle x\rangle=\{\cdots x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2,\cdots\cdots\}$，其中$\cdots\cdots\leqslant x_{-2}\leqslant x_{-1}<0\leqslant x_1\leqslant\cdots$。我们还假定 $\langle x\rangle$ 满足有限性假设——它在 X 内没有聚点，这意味着在 X 的任意有界集内只有 $\langle x\rangle$ 的有限多个点。记所有满足有限性假设的点列 $\langle x\rangle$ 为Ω_x。对于只有 n 个点的点列一般记为 $x^{(n)}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

以 Z_+表示全体非负整数；B$'$表示 B 中全体有界集。对于任意 $A\epsilon$B$'$, $k\epsilon Z_+$, 记 $G=\{\langle x\rangle: card(i; x_i\epsilon\langle x\rangle\cap A)=k\}$，即 G 由恰有 k 个 x_i 落在 A 中的那些$\langle x\rangle$所组成。当 A 取遍 B$'$和k 取遍 Z_+ 时，我们得到所有形如 G 的集合类 C，以 σ(G) 表示由 G 产生的 σ 代数（有些文献称此为由投影产生的 σ 代数），于是，我们得到点列可测空间（Ω_x, σ(G))。

（2）计数测度空间

所谓计数测度就是取非负整数值（包括$+\infty$）的测度。若给定状态空间(X, B)，我们把$N(\cdot)$(或简记为N)称做(X,B)上的计数测度，如果它是定义于B上的计数测度，而且满足有限性条件——对任意$A\epsilon$B$'$，有$N(A)\epsilon Z_+<\infty$。以 N 表(X, B)上所有这样的计数测度，于是，Ω_x与N之间存在一一对应关系，我们还可定义N上的σ代数σ(N)，使得在可测空间(Ω_x,σ(G))与(N,σ(N))之间存在一一对应的可测变换。事实上，对于给定的$\langle x\rangle\epsilon\Omega_x$,定义

$N_{(x)}(A)=card(i: x_i\epsilon\langle x\rangle\cap A)$, $A\epsilon$B,易见$N_{(x)}(\cdot)$是一计数测度，即$N_{(x)}(\cdot)\epsilon$N,反过来，若给定计数测度$N(\cdot)\epsilon$N,定义

$$\langle x\rangle^{(N)}=(\cdots, x_{-2}^{(N)}, x_{-1}^{(N)}, x_1^{(N)}, \cdots)\text{如下：}$$

$$x_n^{(N)}=\begin{cases} y\geqslant 0 & \text{当}N[0,y)<n\leqslant N[0,y] \qquad n=1,2\cdots \\ y<0 & \text{当}N(y,0)<-n\leqslant N[y,0) \qquad n=-1,-2,\cdots \end{cases}$$

显然$\langle x\rangle^{(N)}\epsilon\Omega_x$，这就建立了$\Omega_x$与N之间的一一对应关系。现再定义$\sigma$(N)为N上由所有形如

$U=\{N(\cdot): N(A)=k\}$, $A\epsilon$B$'$,$k\epsilon Z_+$的集合产生的σ代数(与σ(G)类似，σ(N)也称做由投影产生的σ代数)，我们可以证明σ(N)也是由所有形如

$S=\{N_{(x)}(\cdot): \langle x\rangle\epsilon\Gamma\}$　$\Gamma\epsilon\sigma$(G)的集合产生的σ代数。

这样一来，如上定义的Ω_x与N之间的一一对应关系也就是点列可测空间(Ω_x, σ(G))与计数测度空间(N,σ(N))之间的一个一一可测映象，我们用$\tilde{f}$表从Ω_x 到N的这一映像，$\tilde{f}^{-1}$表其逆映象(对于更一般的空间X.一一对应的证明见 *J. E. Moyal*

〔11〕)。

(3)随机点过程的定义

假若给定了概率空间(Ω,F,P),我们说一个(给定在这空间上的)随机点过程就是从(Ω,F)到$(N,\sigma(N))$的一个可测映象f。因为f由$f'=f\widetilde{f}^{-1}$唯一地决定一个从(Ω,F)到$(\Omega_x,\sigma(G,))$的可测映象f'(反之,若给定了一个从(Ω,F)到$(\Omega_x,\sigma(G)$,的可映映像f'则由$f=f'\widetilde{f}$也唯一地决定一个从(Ω,F)到$(N,\sigma(N))$的可测映像f,故随机点过程也可以等价地定义为从(Ω,F)到$(\Omega_x\sigma(G))$的一个可测映象f'。

另一方面,基本空间上的概率测度P通过映像f(对应地,映像f')诱导出可测空间$(N,\sigma(N,)$上的一个概率测度P(对应地,可测空间$(\Omega_x,\sigma(G))$上的一个概率测度P')。因此,随机点过程又可等价地定义为给定概率测度P的计数测度空间$(N,\sigma(N),P)$或给定概率测度P'的点列可测空间$(\Omega_x,\sigma(G),P')$。上面介绍的四种等价定义是随机点过程的常用的一般定义。

(4)由间距定义随机点过程与由δ函数定义随机点过程

由于研究的出发点不同,我们还有其它定义随机点过程的方法。例如,当我们着重从间距性质出发研究随机点过程时,可以把每一$\langle x\rangle\epsilon\Omega_x$写成点列的形式

$$(\cdots,x_{-2},x_{-1},x_1,\cdots),$$

其中$\cdots\leqslant x_{-2}\leqslant x_{-1}<0\leqslant x_1\leqslant\cdots$。令$\xi_1=x_1,\xi_{-1}=-x_{-1},\eta_n=x_n-x_{n-1},n=-1,\pm 2,\cdots,\xi_1,\xi_{-1},\eta_n$,均是非负实数。再令

$$\eta=(\xi_1,\xi_{-1},\eta_n,n=-1,\pm 2,\cdots),$$

全体这样的数列构成空间S,它与Ω_x一一对应。由全体形如$\{\eta:\xi_1\leqslant z_1,\xi_{-1}\leqslant z_{-1},\eta_{i_1}\leqslant y_{i_1},\eta_{i_2}\leqslant y_{i_2},\cdots,\eta_{i_k}\leqslant y_{i_k}$)的集合产生的$\sigma$代数记为$\sigma(S)$,其中,$i_1,\cdots,i_k$取任意相异的整数值,$z_1,z_{-1},y_{i_1},\cdots,y_{i_k}$为任意非负实数。于是,从$(\Omega,F,P)$到$(S,\sigma(S))$的任一可测映像定义一随机点过程,而这一映像由P诱导出概率测度$\widetilde{P}$,故概率空间$(S,\sigma(S),\widetilde{P})$亦表示这一随机点过程。

当$n\epsilon Z_+,\xi_{-1}=\xi_1=0$且各$\eta_n$相互独立同分布时,这是普通的更新过程。若$\xi_1>0$并与各$\eta_n$独立但不同分布,则得到“修改的更新过程”。

在通讯理论中经常碰到所谓脉冲过程

$$S(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\delta(t-t_n),$$

其中$\{\alpha_n\}$为一族随机变量,$\{t_n\}$为时间轴上的随机点分布,函数$\delta(\cdot)$的定义如下:$\delta(0)=1,\delta(t)=0$当$t\neq 0$。这实际上是以α_n为标值的标值点过程,当$\alpha_n\equiv 1$时就

是普通的随机点过程的一种表达方式，这时有

$$N_{s,t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{(s,t]}(t_n) \qquad 0\leqslant s<t,$$

和

$$\mathrm{N}(A)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_A(t_n) \qquad A\in\mathrm{B}'.$$

这里$I_A(\cdot)$表示集合A的示性函数。

五、随机测度与随机点过程

在这一节中我们主要阐明随机点过程、随机测度和一般的随机过程之间的关系。

为方便起见，我们暂设$\mathrm{X}=R_+$，以M表示(R_+,B_+)上$Radon$测度μ的全体（即要求μ满足有限性条件——对任意有界集$B\in\mathrm{B}'_+$恒有$\mu(B)<\infty$）。又以$\sigma(\mathrm{M})$表空间M上由投影产生的σ代数，这即是说$\sigma(\mathrm{M})$是包含所有形如

$$M=\{\mu:\mu(A)\leqslant y\} \quad A\in\mathrm{B}'_+,\ y\in R_+$$

的集合的最小σ代数。对于每一$\mu\in\mathrm{M}$，对应一定义于R_+上的有穷单调非降右连续左极限存在的函数$\Lambda_t=\mu([0,t])$，我们可以称之为μ的分布函数，以$\overline{\mathrm{M}}$表示所有这样的函数Λ_t。反之，每一$\Lambda_t\in\overline{\mathrm{M}}$也对应一$\mu\in\mathrm{M}$因此$\mathrm{M}$与$\overline{\mathrm{M}}$是一一对应的。如果用$\sigma(\overline{\mathrm{M}})$表示在空间$\overline{\mathrm{M}}$上由投影产生的$\sigma$代数，即它是包含所有形如

$$\Gamma=\{\Lambda_t:\ \Lambda_s\leqslant y\} \quad s,\ y\in R_+$$

的集合的最小σ代数，我们可以证明可测空间$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}))$与可测空间$(\overline{\mathrm{M}},\sigma(\overline{\mathrm{M}}))$之间存在一一对应可测映像，所以有时人们把这两个空间等同起来而不加区别。

设给定了基本概率空间$(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$，从这空间到可测空间$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}))$的可测映象就称做随机测度。若$\Lambda(\omega)$是一个这样的随机测度，它由概率测度$\mathrm{P}$诱导出$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}))$上的一个概率测度$\Pi$，其定义是$\Pi(A)=\mathrm{P}\{\omega:\Lambda(\omega)\in A\}$对任意$A\in\sigma(\mathrm{M})$，$\Pi$称做$\Lambda$的分布。这样一来，我们也可以等价地定义随机测度为一给定概率测度Π的概率空间$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}),\Pi)$，由于$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}))$与$(\overline{\mathrm{M}},\sigma(\overline{\mathrm{M}}))$之间存在一一对应的可测映像，从$(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$到$(\mathrm{M},\sigma(\mathrm{M}))$的可测映像与从$(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$到$(\overline{\mathrm{M}},\sigma(\overline{\mathrm{M}}))$的可测映像可通过这个一一对应可测映像相互唯一地确定，故随机测度又可等价地定义为从$(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$到$(\overline{\mathrm{M}},\sigma(\overline{\mathrm{M}}))$的可测映像$\overline{\Lambda}(\omega)$或给定概率测度$\overline{\Pi}$的概率空间$(\overline{\mathrm{M}},\sigma(\overline{\mathrm{M}}),\overline{\Pi})$。

根据一般随机过程理论中的柯尔莫果洛夫定理，对于给定的基本概率空间$(\Omega,$

F,P)，实随机过程$\{x_t(\omega),\ t\in T\}$可了解为从$(\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P})$到实函数空间$(R^T,\ \mathrm{B}^T)$的可测映像，其中$R^T$表示定义于$T$而取值于$R$的全体实函数，$\mathrm{B}^T$是由投影产生的$\sigma$代数。显然$\overline{\mathrm{M}}\subset R^T$，故随机测度可看作是一般随机过程的一种特殊情形。

令$\overline{\mathrm{N}}$为所有取值于Z_+的单调非降右连续左极限存在的跃度为整数的阶梯函数，则空间N与$\overline{\mathrm{N}}$之间存在一一对应关系。事实上，每一$N\in\mathrm{N}$对应一$N_t=N([0,t])\in\overline{\mathrm{N}}$。反之，对于每一$N_.\in\overline{\mathrm{N}}$，令$N([0,t])=N_t$可唯一地确定一$N\in\mathrm{N}$。用类似于定义$\sigma(\mathrm{M})$和$\sigma(\overline{\mathrm{M}})$的方法，我们可以分别定义空间N与$\overline{\mathrm{N}}$上由投影产生的$\sigma$代数$\sigma(\mathrm{N})$与$\sigma(\overline{\mathrm{N}})$,即$\sigma(\mathrm{N})$与$\sigma(\overline{\mathrm{N}})$分别是N与$\overline{\mathrm{N}}$上包含所有形如

$$\{N:\quad N(A)\leqslant k\}\qquad A\in\mathrm{B}',\ k\in Z_+$$

与

$$\{N_t:\quad N_s\leqslant k\}\qquad s\in R_+,\ k\in Z_+$$

的集合的最小σ代数，易见$(\mathrm{N},\ \sigma(\mathrm{N}))$与$(\overline{\mathrm{N}},\ \sigma(\overline{\mathrm{N}}))$之间存在一一对应可测映像，故随机点过程又可以看作是从基本概率空间$(\Omega,\ \mathrm{F},\ \mathrm{P})$到阶梯函数空间$(\overline{\mathrm{N}},\ \sigma(\overline{\mathrm{N}}))$的可测映象。因为显有$\overline{\mathrm{N}}\subset\overline{\mathrm{M}}\subset R^T$，所以在这种观点下，随机点过程是一类特殊的随机测度，从而是一类特殊的随机过程。

在[13]中指出，如果我们在空间M中定义淡收敛(vague convergence)如下*)：

设给定$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots\cdots\in\mathrm{M}$,我们说$\mu_n$淡收敛于$\mu$并记为$\mu_n\xrightarrow{v}\mu(t)$，如果它们的分布$\Lambda(t)=\mu([0,t])$，$\Lambda_1(t)=\mu_1([0,t])$，$\Lambda_2(t)=\mu_2([0,t])$，$\cdots$在$\Lambda(t)$的所有连续点$t$上有$\Lambda_n(t)\to\Lambda(t)$。利用这种收敛性，可以在空间M(或$\overline{\mathrm{M}}$)中引入淡拓扑，在这种拓扑结构中，M是可分完备的距离空间，而且集合$\{\mu:\ \mu\in\mathrm{M},\ \Lambda_t=\mu([0,t])<y\}$是开的，其中$t,y$是任意非负实数。

如果用B(M)表示M上的全体波雷耳集(在淡拓扑意义下)组成的σ代数，则可证$\sigma(\mathrm{M})=\mathrm{B}(\mathrm{M})$,这一方面说明我们定义$\sigma(\mathrm{M})$的方法是合宜的,另一方面也说明在许多问题(例如有关测度收敛问题)的讨论中采用波雷耳代数作为可测结构是适宜的。

在[13]中还证明了N是M中的闭集，因而$\mathrm{N}\in\mathrm{B}(\mathrm{M})$，一随机测度$\mu$是一随机点过程，如果它所诱导出的概率测度$\Pi$使得$\Pi(\mathrm{N})=1$（详细地写就是$\Pi(\mathrm{N})=\mathrm{P}\{\omega:\ \Lambda(\omega)\in\mathrm{N}\}=1$)。

*）[19]給出淡收斂的另一种常用定义：$\mu_n\xrightarrow{v}\mu$,如果对所有具有紧支承的連續函数f有$\int f\,d\mu_n\to\int f\,d\mu$。

六、随机点过程的存在定理

在一般的随机过程理论中，证明了对于一给定的有限维分布函数族，如果它具有对称性和一致性，则在一定的意义下存在唯一的随机过程，这过程以给定函数族作为它的有限维分布，这就是著名的柯尔莫果洛夫存在定理。在随机点过程理论中也有类似的定理，人们常称为Moyal-Harris-Nawrotzki 存在定理，本文将要给出它的一个较为初等的详细证明。

仍设$\mathbf{X}=R$，对于一给定的随机点过程$(\mathbf{N},\sigma(\mathbf{N}),P)$，它的有限维分布函数(fini function)定义为

$$p(A_1,\cdots,A_k;\ i_1,\cdots,i_k)\triangleq P\{N:\ N\in\mathbf{N},\ N(A_j)=i_j,\ j=1,\ \cdots,\ k\}\tag{1}$$

对任意$A_j\in\mathbf{B}'$，$i_j\in Z_+$。

定理1　随机点过程的有限维分布函数有如下性质，其中$A,A_1,\cdots,A_k$是R上任意的有界波雷耳集：

1° 对称性：对整数$1,2,\cdots,k$的任意排列$j_1,j_2,\cdots,j_k$有

$$p(A_{j_1},A_{j_2},\cdots,A_{j_k};\ i_{j_1},i_{j_2},\cdots,i_{j_k})=p(A_1,A_2,\cdots,A_k;\ i_1,i_2,\cdots,i_k).$$

2° 一致性：

$$\sum_{i_k=0}^{\infty}p(A_1,\cdots,A_{k-1},A_k;\ i_1,\cdots,i_{k-1},i_k)=p(A_1,\cdots,A_{k-1};\ i_1,\cdots,i_{k-1}).$$

3° 有限性：

$$\sum_{i=0}^{\infty}p(A;\ i)=1\ 。$$

4° 有限可加性：对互不相交的$A_1,\cdots,A_k$有

i) $p\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k}A_j;\ i\right)=\sum\limits_{i_1+\cdots+i_k=i}p(A_1,\cdots,A_k;\ i_1,\cdots,i_k)$；

ii) $$p\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j;\ A_1,\cdots,A_k;\ i,\ i_1,\cdots,i_k\right)=\begin{cases}0 & \text{当}\sum\limits_{j=1}^{k}j\neq i\ ;\\ p(A_1,\cdots,A_k;\ i_1,\cdots,i_k) & \text{当}\sum\limits_{j=1}^{k}j=i.\end{cases}$$

5° 连续性：当$A_j\downarrow\phi$时 $\lim\limits_{j\to\infty} p(A_j,0)=1$。

〔证〕 由有限维分布函数的定义(1)易得性质1°、2°，现证3°

由点过程的有限性得 $P\{N:N(A)<\infty\}=1$，

故有 $1=P\{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{N:N(A)=i\}\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{N:N(A)=i\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p(A;i)$。

往证性质4°。事实上，若$A_1,\cdots,A_k$是互不相交的有界波雷耳集，则有

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j;i\right)=P\{N:N(\bigcup_{j=1}^{k}A_j)=i\}$$

$$=P\{N:\sum_{j=1}^{k}N(A_j)=i\}$$

$$=P\left\{\bigcup_{i_1+\cdots+i_k=i}\{N:N(A_j)=i_j,j=1,\cdots,k\}\right\}$$

$$=\sum_{i_1+\cdots+i_k=i}P\{N:N(A_j)=i_j,j=1,\cdots,k\}$$

$$=\sum_{i_1+\cdots+i_k=i}p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k)\ .$$

故i)得证。下面证明ii)：

$$p\left(\bigcup_{j=1}^{k}A_j;A_1,\cdots,A_k;i,i_1,\cdots,i_k\right)=P\{N:N(\bigcup_{j=1}^{k}A_j)=$$

$$=i,N(A_j)=i_j;j=1,\cdots k\}$$

$$=\begin{cases}P\{\phi\}=0 & \text{当}\sum\limits_{j=1}^{k}i_j\neq i;\\ P\{N:N(A_j)=i_j,j=1,\cdots,k\}=p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k) & \text{当}\sum\limits_{j=1}^{k}i_j=i\ .\end{cases}$$

最后，证明性质5°。设$A_j\downarrow\phi$，则由N的有限性知对所有$N\in\mathrm{N}$有

$$N(A_j)\downarrow 0,$$

故存在正整数j_0，当$j\geqslant j_0$时有$N(A_j)=0$，

从而有

$$\lim_{j\to\infty}p(A_j;0)=\lim_{j\to\infty}P\{N:N(A_j)=0\}=P\{\mathrm{N}\}=1\text{。定理1证完。}$$

我们还要证明定理1的逆命题亦成立，即若给定一族满足性质1°～5°的有限维分布函数，则通过它能唯一地定义一随机点过程，这就是随机点过程的存在定理。

在证明本定理之前先给出一些定义和引理。

以 H 表示 R 中全体左开右闭且具有有理端点的区间之有限并，易知 H 是环，它含有可列多个元素（集合），且 R 上的波雷耳代数 B 就是由 H 产生的 σ 代数。

以 R^H 表示定义于 H 上取值于 R 的集函数的全体。

以 Z_+^H 表示定义于 H 上取值于 Z_+ 的集函数的全体。

又以 N_H 表示定义于 H 上的计数测度的全体。

易见有如下的包含关系

$$\mathsf{N}\subseteq \mathsf{N}_H\subseteq Z_+^H\subseteq R^H。$$

引理　若给定的有限维分布函数族 $\{p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k)\}$ 满足定理 1 的性质 1°～3°，则它在 $(R^H,\ \mathsf{B}^H)$ 上唯一地定义一概率测度 P，使得对任意 $A_j\in H$，$i_j\in Z_+$ 有

$$P\{w:w\in R^H,w(A_j)=i,j=1,\cdots,k\}$$
$$=p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k)\tag{2}$$

和

$$P(Z_+^H)=1\ 。\tag{3}$$

这里 B^H 是 R^H 上由投影产生的 σ 代数。

〔证〕 对任意正整数 k，$A_j\in H$ 和任意实数 $r_j(j=1,\cdots,k)$，定义

$$F_{A_1,\cdots,A_k}(r_1,\cdots,r_k)\triangleq\sum_{\substack{i_j\leqslant r_j\\ i_j\in Z_+}}p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots;i_k)$$

（若有一 r_j 为负，则令 F 等于 0）。

由性质 1°，2° 知这样定义的分布函数族 $\{F_{A_1,\cdots,A_k}(r_1,\cdots,r_k)\}$ 满足一般随机过程理论中的柯尔莫洛夫存在定理的条件，故在 (R^H,B^H) 上定义唯一的概率测度 P，它满足条件（2）*，往证它还满足（3）。事实上，对任给 $A\in H$，有

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}\{w:w\in Z_+^H,w(A)=k\}=Z_+^H,$$

所以

$$P\{Z_+^H\}=P\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}\{w:w(A)=k\}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{w\ w(A)=k\}$$

* 柯尔莫洛夫定理中参数集T是一实数集，但不难看出把T改为任意参数集仍成立。

$$=\sum_{k=0}^{\infty}p(A;k),$$

故由性质 3° 得 $P\{Z_{+}^{H}\}=1$，引理证完。

现证明随机点过程的存在定理。

定理 2 若给定满足定理 1 中性质 1°～5° 的有限维分布函数族 $\{p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k)\}$，则它在 $(\mathbf{N},\sigma(\mathbf{N}))$上唯一地定义一概率测度 P，使得对任意正数 k，$A_j\in\mathbf{B}'$和 $i_j\in Z_+(j=1,\cdots,k)$有

$$P\{N:N(A_j)=i_j,\ j=1,\cdots,k\}$$
$$=p(A_1,\cdots,A_k;i_1,\cdots,i_k)。$$

〔证〕在引理中我们证明了 $P\{Z_{+}^{H}\}=1$，本定理则进一步要求证明 $P\{\mathbf{N}\}=1$。现在令 $\mathbf{A}'$ 表示Z_{+}^{H}中满足性质4°的集函数，即对任意 $w\in\mathbf{A}'$ 和互不相交的有界波雷耳集 $A_j(j=1,\cdots,n)$有

$$w\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=\sum_{j=1}^{n}w(A_j)。$$

以 $\mathbf{A}''$ 表示 $\mathbf{A}'$中具有性质5° 的集函数，即对任意 $w\in\mathbf{A}''$ 和任意有界波雷耳集 $A_j\downarrow\phi$ 有 $w(A_j)\downarrow 0$。因为这样的满足有限可加性 4° 和连续性 5° 的非负集函数就是测度，故 $\mathbf{A}''=\mathbf{N}_H$，这样一来，我们有如下的包含关系：

$$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{N}_H=\mathbf{A}''\subseteq\mathbf{A}'\subseteq Z_{+}^{H}\subseteq R^{H}。$$

往证 $P\{\mathbf{N}_H\}=1$，为此先证明 $P\{\mathbf{A}'\}=1$。由引理知 $P\{Z_{+}^{H}\}=1$，故只须证明 $P\{Z_{+}^{H}\backslash\mathbf{A}'\}=0$。事实上，对每一$A_h\in H$，由$H$的定义知$A$可表为有限多个互不相交的具有有理端点的区间之并，即$A_h=\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)}$，其中 $A_j^{(h)}$是互不相交的具有有理端点的区间。利用性质 2°、3°、4° 可得

$$P\left\{w:w\in Z_{+}^{H};\ w\left(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)}\right)=\sum_{j=1}^{n_h}w\left(A_j^{(h)}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{w:w\left(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)}\right)=k,\ \sum_{j=1}^{n_h}w\left(A_j^{(h)}\right)=k\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_{n_h}=k}P\left\{w:w\left(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)}\right)=k,\ w\left(A_j^{(h)}\right)=k_j,\ j=1,\cdots,n_h\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_{n_h}=k}p\left(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)},A_1^{(h)},\cdots,A_{n_h}^{(h)};k,k_1,\cdots,k_{n_h}\right)$$

$$=\sum_{k_1,\cdots,k_{n_h}=0}^{\infty}p(A_1^{(h)},\cdots,A_{n_h}^{(h)};\ k_1,\cdots,k_{n_h})=1。$$

令$B_h=\left\{w:w\epsilon Z_+^H;w(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)})\neq\sum_{j=1}^{n_h}w(A_j^{(h)})\right\}$，显然有

$$P\{B_h\}=P\{Z_+^H\}-P\left\{w:w\epsilon Z_+^H\ w\left(\bigcup_{j=1}^{n_h}A_j^{(h)}\right)=\right.$$

$$\left.=\sum_{j=1}^{n_h}w\left(A_j^{(h)}\right)\right\}=1-1=0\ 。$$

又由于每一A_h对应一B_h，而H中只含可列多个元素，故$P\{\bigcup_h B_h)\leqslant\sum_h P(B_h)$，这里对$h$求和(或并)表示按对一切可能的$A_h\epsilon H$所对应的$B_h$求和。

现在，若$w\epsilon Z_+^H\backslash \mathbf{A}'$，则必存在某一$B_h$使得$w\epsilon B_h$，故$Z_+^H\backslash\mathbf{A}'\subseteq\bigcup_h B_h$，从而

$$P\{Z_+^H\backslash\mathbf{A}'\}\leqslant P\{\bigcup_h B_h\}=0,$$

这就证明了$P\{\mathbf{A}'\}=1$。下面证明$P(\mathbf{A}'')=1$，类似于前述，我们也是证明$P(\mathbf{A}'-\mathbf{A}'')=0$。

设$w_0\epsilon\mathbf{A}'-\mathbf{A}''$，则存在一串集合$A_n\epsilon H, A_n\downarrow\phi$，但$w_0(A_n)\not\to 0$，这相当于说恒有$w_0(A_n)\geqslant 1$。我们可以进一步证明存在一串具有有理端点的区间$\{I_n\}$，使得i) $I_n\subseteq A_n$; ii) $I_n\downarrow\phi$; iii) $w_0(I_n)\geqslant 1$。事实上，令$A_1=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_{l_1}$，其中$D_j$ ($j=1,\cdots,l_1$)为互不相交的具有有理端点的区间。因为对每一n均有$A_n=A_1A_n=D_1A_n\cup D_2A_n\cup\cdots\cup D_{l_1}A_n$，而且$w_0\epsilon\mathbf{A}'$，故可选一$h_1$，$1\leqslant h_1\leqslant l_1$，使得对所有$n$有$w_0(D_{h_1}A_n)\geqslant 1$。现取$I_1=D_{h_1}$，则$w_0(I_1)\geqslant 1$，$w_0(I_1A_n)\geqslant 1$对所有$n$。再对集合$I_1A_2$作如上的讨论，则又可选出区间$I_2$，使得$I_2\subseteq I_1$，$w_0(I_2)\geqslant 1$，$w_0(I_2A_n)\geqslant 1$对所有$n$，……，如此继续下去，就可选出一串满足上面三个要求的区间$\{I_n\}$。对每一有理数r和正整数n，令$G_{r,n}=\{w:w\epsilon\mathbf{A}',w(r,r+\frac{1}{n}]\geqslant 1\}$，则

$$P\{G_{r,n}\}=P\{w:w(r,r+\frac{1}{n}]\geqslant 1\}$$

$$=P\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\{w:w(r,r+\frac{1}{n}]=i\}\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P\{w:w(r,r+\frac{1}{n}]=i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p((r,r+\frac{1}{n}],\ i)$$

$$=1-p((r,r+\frac{1}{u}],\ 0)$$

由连续性5°知当$n\to\infty$时$p((r,\ r+\frac{1}{n}],0)\to 1$，从而$P\{G_{r\cdot n}\}\to 0$。再令$G_r=\bigcap_n G_{r\cdot n}$，则$P\{G_r\}\leqslant P\{G_{r,n}\}\to 0$，故有$P\{G_r\}=0$。另一方面，因为$I_n\downarrow\phi$，故必存在一整数$n_0$，使当$n\geqslant n_0$时$I_n$的左端点都是某一有理数$r_0$，即$w_0\epsilon G_{r_0}$，从而$\mathbf{A}'\backslash\mathbf{A}''\subseteq\bigcup_r G_r$，故

$$P\{\mathbf{A}'\backslash\mathbf{A}''\}\leqslant\sum_r P\{G_r\}=0,$$

由此得

$$P\{\mathbf{N}_H\}=P\{\mathbf{A}''\}=P\{\mathbf{A}'\}=1。$$

最后，由测度扩张定理知定义在环H上的测度μ可唯一地扩张为由H产生的σ环$\sigma(H)=\mathbf{B}$——R的波雷耳代数上的测度，即$\mathbf{N}$与$\mathbf{N}_H$是一一对应的，故实际上有$\mathbf{N}=\mathbf{N}_H$，从而$P\{\mathbf{N}\}=P\{\mathbf{N}_H\}=1$，定理证完。

参考文献

〔1〕P. A. W. Lewis (ed.), *Stochastic Point Processes*, (Proceeding of a conference at IBM) Wiley, New York, 1972.

〔2〕D. L. Snyder, *Random Point Processes*, Wiley-Interscience, New York, 1975.

〔3〕Anthony Ephremides (ed.), *Random Processes* Ⅰ, *Poisson and Jump-Piont Processes*, Halsted Press, 1975.

〔4〕S. K. Srinivasan, *Stochastis Point Processes and Their Applications*, Hafner Press, New York, 1974.

〔5〕P. Brèmand, J. Jacod, Processus Ponctuels et martingales: Résultats récents sur la modélisation et le Filtrage, *Adv. Appl. Prob.*, 9, (1977) 362-416.

〔6〕D. R. Cox, P. A. W. Lewis, *The Statistical Analysis of Series of Events*, John Wiley& Sons Inc., New York, 1966.

〔7〕A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, *Théorie des Fonctions Aléatoires*, Paris, 1952.

〔8〕T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

〔9〕J. J. Hunter, Renewal theory in two dimensions: basic results, *Adv. Appl. Prob.*,6 (1974), 376—391.

〔10〕M. R. Leadbetter, On basic results of point processes theory, Proc. 6th Berkeley Symp. *Math. Statis. Prob.*, 3 (1972), 449-462.

〔11〕R. K. Milne, Simple Proofs of some theorems on Point Processes, *Ann. Math. Stat.*, 42 (1971), 368-372.

〔12〕J. E. Moyal, The general theory of stochastic population processes, *Acta Máth.*, 108(1962),1-31.

〔13〕Jan Grandell, Point processes and random measures, *Adv. App. Prob.*, 9, (1977),502—526.

〔14〕M. Westcott, The probability generating functional, *J. Austr.*,14,(1972) 448—446.

〔15〕А. Я. Хинчин, Мат. Методы Теории Массового Обуслу., Москва, 1955 (中譯本：公用事业理論的数学方法，张里千、殷涌泉譯)。

〔16〕А. Я. Хинчин, Потоки случайных событий без псоледействия, Теория Вероятностей и ее применения, том 1(1956), 3—18。

〔17〕А. Я. Хинчин, О пуассоновских погоках случайных событий, Том. 1, 1956, 320—327。

〔18〕D. König, Stochastic processes with basic stationary marked point processes, *Adv. Appl. Prob.*, 9(1977), 440—442.

〔19〕P. Jagers, Aspects of random measures and point processes, "Advances in Probability and Related Topics", Ed. Peter Ney and Sidney Port, 1974.