

变系数四阶微分方程组的有限元素法

马汝念 陈宝耀
(中山大学数学力学系)

刘宏开
(广东省交通研究室)

(一) 前 言

变截面薄壁桥(如图一所示)壁薄而轻,有拱的优点而无拱圈偏心弯矩大的缺点,因而大大节约工料,尤其是采用开口断面,有利于预制安装,加快施工,在固端或连续支承条件下,具有较高的力学效能,明显的技术经济效果。但结构较复杂,施工要求较高。

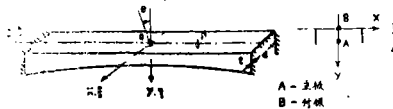
集中荷载变截面薄壁桥的扭转翘曲问题归结为求解变系数四阶微分方程组的边值问题[1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2}(EJ_y \frac{d^2\xi}{dz^2}) + \frac{d^2}{dz^2}(EJ_{wx} \frac{d^2\theta}{dz^2}) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2}(EJ_{wx} \frac{d^2\xi}{dz^2}) + \frac{d^2}{dz^2}(EJ_w \frac{d^2\theta}{dz^2}) - \frac{d}{dz}(GJ_d \frac{d\theta}{dz}) &= P\bar{x}_p\delta(z-z_p) \\ \frac{d}{dz}(EF \frac{d\zeta}{dz}) - \frac{d}{dz}(ES_x \frac{d^2\eta}{dz^2}) &= 0 \\ -\frac{d^2}{dz^2}(ES_x \frac{d\zeta}{dz}) + \frac{d^2}{dz^2}(EJ_x \frac{d^2\eta}{dz^2}) &= P\delta(z-z_p) \end{aligned} \quad (1)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } z = \pm \frac{L}{2} \text{ 时} \quad \xi = \eta = \theta = \zeta = 0 \\ \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 E 为弹性模量, F 为横断面积, J_x, J_y 分别为断面对 x, y 轴的惯矩, J_d 为扭转惯矩, J_{wx} 为对付极和 x 轴的扇形惯矩, S_x 为断面对 x 轴的静矩, J_w 对付极 B 的扇形惯矩, ζ, ξ, η 分别为对付极 B 在 z, x, y 方向的位移, θ 为转角, P 为集中力的模, z_p, \bar{x}_p 为集中力作用点的纵坐标和横坐标。桥梁的下缘取为抛物线



(图一)

(如图一)。

本文用有限元法,采用埃尔米特(Hermite)单元解决这种开口变截面薄壁桥的扭转翘曲问题,证明边值问题(1)(2)广义解的适定性,离散方程解的存在唯一性,并得到了位移精度为 $O(h^4)$ 应力精度为 $O(h^2)$ 的近似解。同时本文在建立有限元离散方程时,对计算方程的系数不采用数值积分,而采用精确求积,从而保证了高精度。

(二) 变系数四阶微分方程组广义解的适定性

令 $I = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ 是一维开区间。为了简便，记 $\frac{d\xi}{dz} = \partial\xi = \xi'$, $\frac{d\eta}{dz} = \partial\eta = \eta'$, ……

$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \partial^2\xi = \xi''$, $\frac{d^2\eta}{dz^2} = \partial^2\eta = \eta''$ 等等，记 $\prod_1^4 C^\infty(I) = C^\infty$ 。

I 上的试验函数空间取为

$\mathbf{D} \equiv \{ w | w \in C^\infty, \text{Supp} w \text{ 是 } I \text{ 的一个紧致支集} \}$ 。

Sobolev 空间 $H^1(I)$ 、 $H^2(I)$ 分别定义为

$$H^1(I) \equiv \{ \varphi(z) | \varphi(z) \in L^2(I), \varphi' \in L^2(I), z \in I \};$$

$$H^2(I) \equiv \{ \varphi(z) | \varphi(z) \in L^2(I), \partial^\alpha \varphi \in L^2(I), \alpha \leq 2, z \in I \}$$

并记 $\prod_1^4 L^2(I) = L^2$ ，及 $H^2(I) \times H^2(I) \times H^1(I) \times H^2(I) = H$ ，

即 $H \equiv \{ w = (\xi, \theta, \zeta, \eta)^T | w \in L^2, \partial^\alpha \xi \in L^2(I), \partial^\alpha \theta \in L^2(I), \partial^\alpha \eta \in L^2(I), \alpha \leq 2, \zeta' \in L^2(I), \}$
在 Sobolev 空间 H 中定义范数

$$\|w\|_H = \left(\sum_{\alpha \leq 2} \int_I (|\partial^\alpha \xi|^2 + |\partial^\alpha \theta|^2 + |\partial^\alpha \eta|^2) dz + \sum_{\beta < 1} \int_I |\partial^\beta \zeta|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

同时定义 Sobolev 空间 H 的半范为：

$$|w|_H = \left\{ \int_I (|\xi''|^2 + |\theta''|^2 + |\zeta'|^2 + |\eta''|^2) dz \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

及定义内积为

$$(w, \bar{w})_H = \int_I \left(\sum_{\alpha \leq 2} (\partial^\alpha \xi \partial^\alpha \bar{\xi} + \partial^\alpha \theta \partial^\alpha \bar{\theta} + \partial^\alpha \eta \partial^\alpha \bar{\eta}) + \sum_{\beta < 1} \partial^\beta \zeta \partial^\beta \bar{\zeta} \right) dz,$$

$$w, \bar{w} \in H,$$

显然 $\mathbf{D} \subset H$ 。定义 $\dot{H} = \overline{\mathbf{D}}$

闭包是按 H 的范数取的。易证 Sobolev 空间 \dot{H} 中半范 $|\cdot|_H$ 与范数 $\|\cdot\|_H$ 等价⁽²⁾。

首先我们将变截面薄壁桥对应微分方程组(1)及边界条件(2)写为算子的形式。

$$\mathbf{L}w = (\mathbf{A}(\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T)' - (\mathbf{B}w')' = f, \quad w \in \dot{H}, \quad (3)$$

式中系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} EJ_y & EJ_{wx} & 0 & 0 \\ EJ_{wx} & EJ_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EF & -ES_x \\ 0 & 0 & -ES_x & EJ_x \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$w = (\xi, \theta, \zeta, \eta)^T$$

$$f = (0, p\bar{x}_p\delta(z - z_p), 0, p\delta(z - p))^T,$$

其中

$$y = a + \frac{4}{L^2} (\hat{H} - a)y^2, \text{ (如图二)}$$

$$J_x = \frac{2}{3} ty^3,$$

$$J_y = \frac{td^2}{2} \left(\frac{d}{6} + y \right),$$

$$J_{ox} = \frac{d^2}{4} ty^2,$$

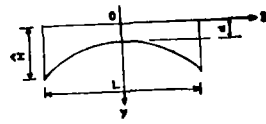
$$J_o = \frac{d^2}{6} ty^3,$$

$$J_d = \frac{t^3}{3} (d + 2y),$$

$$S_x = ty^2,$$

$$F = t(d + 2y),$$

$$G = \frac{3}{7} E.$$



(图二)

L 为桥的长度, t 为梁的壁厚, d 为梁的变截面梗的中距, a 为梁的最小断面高, \hat{H} 为梁的最大截面高。容易求得和(3)等价 $\hat{H} \rightarrow R$ 的线性泛函:

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_I [(\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') A (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T + w'^T B w'] dz - \int_I f^T w dz = \frac{1}{2} a(w, w) - f(w) \quad \forall w \in \hat{H} \tag{5}$$

由于系数矩阵 A, B 是对称的, 故 $a(\cdot, \cdot)$ 是 \hat{H} 上对称的双线性型, $f(\cdot)$ 为 \hat{H} 的对偶空间 \hat{H}' 的元素, 即 $f(\cdot)$ 是定义在 \hat{H} 上的线性泛函。所以变截面薄壁桥应力问题又可归结为:

求 $w \in \hat{H}$
使

$$J(w) = \underset{\tilde{w} \in \hat{H}}{\text{Min}} J(\tilde{w}) \tag{6}$$

的变分问题。

若有常数 $\alpha > 0$ 存在恒使双线性型 $a(\cdot, \cdot)$

$$\text{有} \quad a(w, w) \geq \alpha \|w\|_{\hat{H}}^2 \quad \forall w \in \hat{H}$$

则称 $a(\cdot, \cdot)$ 为 \hat{H} —椭圆。

引理1 矩阵A 是正定的.

证明 由于 $y = a + \frac{4}{L^2} (\hat{H} - a)z^2 \geq a > 0$, z ∈ I

$$\therefore J_y = \frac{td^2}{2} \left(\frac{d}{2} + y \right) \geq \frac{td^2}{2} \left(\frac{d}{6} + a \right) > 0, \quad z \in I$$

又因

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} J_y & J_{\omega x} \\ J_{\omega x} & J_{\omega} \end{vmatrix} &= J_y J_{\omega} - J_{\omega x}^2 = \frac{td^2}{2} \left(\frac{d}{2} + y \right) \frac{td^2}{6} y^3 - \frac{1}{16} d^4 t^2 y^4 \\ &= \frac{t^2 d^5}{24} y^3 + \frac{t^2}{12} d^4 y^4 - \frac{1}{16} t^2 d^4 y^4 > 0, \end{aligned} \quad z \in I,$$

注意 $F = t(d + 2y) \geq t(d + 2a) > 0$, z ∈ I.

$$\therefore \begin{vmatrix} J_y & J_{\omega x} & 0 \\ J_{\omega x} & J_{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} > 0,$$

同理可证 $\begin{vmatrix} F & -S_x \\ -S_x & J_x \end{vmatrix} = \frac{2}{3} t^2 (d + 2y) y^3 - t^2 y^4 \geq \frac{2}{3} t^2 d a^3 + \frac{1}{3} t^2 a^4 > 0$

故 $\det A > 0$, z ∈ I.

所以A是正定的.

引理2 定义在 \mathring{H} 上双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 为 \mathring{H} -椭圆.

证明 由引理1知, 在I上

$(\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') \mathbf{A} (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T$ 是正定二次型, 从而有

$$\int_I (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') \mathbf{A} (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T dz \geq \lambda_1 |w|_H^2$$

式中 λ_1 为矩阵A的最小特征根的下确界

$$\lambda_1 = \inf_{z \in I} \lambda_1(z) > 0$$

因此

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \frac{1}{2} \int_I \left((\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') \mathbf{A} (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T + w' \mathbf{B} w'^T \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_H \left((\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') \mathbf{A} (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T + G J_d \theta'^2 \right) dz \\ &\geq \lambda_1 |w|_H^2 \geq \frac{\lambda_1}{K} \|w\|_H^2 \quad \forall w \in \mathring{H}, \end{aligned}$$

最后的不等式应用了 \mathring{H} 中半范 $|\cdot|_H$ 与范数 $\|\cdot\|_H$ 的等价性. 令 $\lambda_1/K = \alpha > 0$

这就证明了 $a(w, w)$ 为 \mathring{H} -椭圆.

引理3 $a(\cdot, \cdot)$ 是 \mathring{H} 上的连续双线性型.

证明 由引理1知A是正定的, 因而A的特征值均为正的. 显然A的主对角线各元素之和具有正的上界, 记作 M' . A的最大特征值以 M' 为上界. 于是有

$$\int_I (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') A (\tilde{\xi}, \tilde{\theta}'', \tilde{\zeta}', \tilde{\eta}'')^T \leq M' \|w\|_H \|\tilde{w}\|_H \quad \forall w, \tilde{w} \in \dot{H}$$

令 $M_0 = M_{ax} \{ M', M_{ax} GJ \}$ 则有

$$\begin{aligned} a(w, \tilde{w}) &= \int_I (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'') A (\tilde{\xi}, \tilde{\theta}'', \tilde{\zeta}', \tilde{\eta}'')^T + w'^T B w) dz \\ &\leq M_0 \|w\|_H \|\tilde{w}\|_H, \quad \forall w, \tilde{w} \in \dot{H} \end{aligned}$$

所以 $a(\cdot, \cdot)$ 为 \dot{H} 上的连续双线性型.

定理1 边值问题(3)存在唯一广义解且连续依赖于左端 f .

证明 由引理1, 2, 3知 $a(w, \tilde{w})$ 是 \dot{H} 上连续、对称双线性型且是 \dot{H} -椭圆的, $f \in \dot{H}$ 因此根据 Lax-Milgram 引理[2]得知(6)有唯一解. 即方程(3)的边值问题存在唯一广义解 w , 且 $w \in \dot{H} \cap H^3$ 又由引理2知

$$\alpha \|w\|_H^2 \leq a(w, w) = f(w) \leq \|f\| \cdot \|w\|_H,$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示 \dot{H}' 的范数.

故
$$\|w\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|$$

即的(3)广义解 w 连续依赖于 f .

(三) 单元刚度矩阵和荷载列阵

将区间 $L \equiv [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ 剖分为 n 等分, 即剖分成 n 个互不重叠的单元 $e, I = \cup e$. 单元 e 的长度为 $h = \frac{L}{n}$. 假设变截面的变形线为一抛物线 (见图二):

$$y = a + \frac{4}{L^2} (H-a) z^2$$

为计算简便起见, 作自变量变换

$$z = h(x - \alpha_j - 1) \quad (7)$$

式中 $\alpha_j = \frac{n}{2} - j$, 将任何单元 $e: [-\frac{L}{2} + (j-1)h, -\frac{L}{2} + jh]$ 变为标准单元 $[0, 1]$.

在变换(7)下抛物线方程改写为 $y = a + \frac{4h^2}{L^2} (H-a)(x - \alpha_j - 1)^2$ 因而在单元 e 中矩阵(4)元素则变为

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{2}{3}ty^3 = \frac{2}{3}t \left\{ a^3 + \frac{12a^2h^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2 + \frac{3 \cdot 4^2ah^4(H-a)^2}{L^4} \right. \\
 &\quad \left. \times (x-\alpha_j-1)^4 + \frac{4^3h^6(H-a)^3}{L^6}(x-\alpha_j-1)^6 \right\}, \\
 J_y &= \frac{td^2}{2} \left[\left(\frac{d}{6} + a \right) + \frac{4h^2}{L^2}(H-a)(x-\alpha_j-1)^2 \right], \\
 J_{wx} &= \frac{td^2}{4} \left[a^2 + \frac{8ah^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2 + \frac{4^2h^4(H-a)^2}{L^4}(x-\alpha_j-1)^4 \right], \\
 J_w &= \frac{td^2}{6} \left[a^3 + \frac{12a^2h^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2 + \frac{3 \cdot 4^2h^4(H-a)^2}{L^4}(x-\alpha_j-1)^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4^3h^6(H-a)^3}{L^6}(x-\alpha_j-1)^6 \right], \\
 J_d &= \frac{t^3}{3} \left[(d+2a) + \frac{8h^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2 \right], \\
 S_x &= t \left[a^2 + \frac{8ah^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2 + \frac{4^2h^4(H-a)}{L^4}(x-\alpha_j-1)^4 \right], \\
 F &= t(d+2a) + \frac{8h^2(H-a)}{L^2}(x-\alpha_j-1)^2,
 \end{aligned} \tag{8}$$

由(1)的第三及第四方程消去η得

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\left(\frac{J_x F}{S_x} - S_x \right) E \xi' \right) - \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{E J_x C}{S_x} \right) = -P\delta(z-z_p)$$

式中 $S_x \neq 0$, C 为任意常数。由于右端函数属于 H^{-1} 根据微分方程理论知 $\xi \in H^2(I)$, 而 ξ, θ 及 η 分别属于 $H^2(I)$, 从而由 Sobolev 嵌入定理推知, 它们均有

$$H^2(I) \hookrightarrow C^1(I)$$

故可采用 Hermite 三次插值函数^[3]。

$$\left. \begin{aligned}
 \xi^e(x) &= (1, x, x^2, x^3) H_1 u_j \\
 \theta^e(x) &= (1, x, x^2, x^3) H_2 u_j \\
 \xi^e(x) &= (1, x, x^2, x^3) H_1 v_j \\
 \eta^e(x) &= (1, x, x^2, x^3) H_2 v_j
 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

其中

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_i = (\xi_{i-1}, \xi'_{i-1}, \theta_{i-1}, \theta'_{i-1}, \xi_j, \xi'_j, \theta_i, \theta'_i)^T$$

$$v_i = (\zeta_{i-1}, \zeta'_{j-1}, \eta_{j-1}, \eta'_{j-1}, \zeta_i, \zeta'_j, \eta_i, \eta'_j)^T,$$

式中 $\xi_i, \theta_i, \zeta_i, \eta_i$ 和 $\xi'_j, \theta'_j, \zeta'_j, \eta'_j$ 为位移插值函数 ξ, θ, ζ, η 在节点 j 上的值和一阶导数值。

设 $J(w) = \sum_{j=1}^n J_j(w) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_i(w, w) - f_j(w)$

$$a_i(w, w) = \int_{-\frac{L}{2} + (j-1)h}^{-\frac{L}{2} + jh} ((\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T A (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T + w'^T B w') dz$$

$$= h \int_0^1 ((\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T A (\xi'', \theta'', \zeta', \eta'')^T + w'^T B w') dx \tag{10}$$

$$f_i(w) = \int_{-\frac{L}{2} + (j-1)h}^{-\frac{L}{2} + jh} f w dz = h \int_0^1 f w dx$$

以(9)代入(10)得

$$a_i(w_h, w_h) = h^{-3} \int_0^1 [EJ_y (\xi^e)''^2 + 2EJ_{wx} (\xi^e)'' (\theta^e)'' + EJ_w (\theta^e)''^2 + GJ_d (\theta^e)'^2 h^2] dx + h^{-3} \int_0^1 [EF (\zeta^e)'^2 h^2 - 2ES_x (\xi^e)' (\eta^e)'' + EJ_x (\eta^e)''^2] dx$$

在实行计算时，我们把方程(1)分为两组进行，相应地令

$$a_{1i}(w_h, w_h) = h^{-3} \int_0^1 [EJ_y (\xi^e)''^2 + 2EJ_{wx} (\xi^e)'' (\theta^e)'' + EJ_w (\theta^e)''^2 + GJ_d (\theta^e)'^2 h^2] dx,$$

$$a_{2i}(w_h, w_h) = h^{-3} \int_0^1 [EF (\zeta^e)'^2 h^2 - 2ES_x (\xi^e)' (\eta^e)'' h + EJ_x (\eta^e)''^2] dx.$$

记

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2x & 4x^2 & 6x^3 \\ 0 & 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 3x & 9x^2 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 3x & 6x^2 & 9x^3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
 (\xi^e)^{n2} &= u_j^T H_1^T X_2 H_1 u_j \\
 (\theta^e)^{n2} &= u_j^T H_2^T X_2 H_2 u_j \\
 (\theta^e)^{r2} &= u_j^T H_2^T X_1 H_2 u_j \\
 (\xi^e)^n (\theta^e)^n &= u_j^T H_1^T X_2 H_2 u_j \\
 (\zeta^e)^{r2} &= v_j^T H_1^T X_1 H_1 v_j \\
 (\eta^e)^{n2} &= v_j^T H_2^T X_2 H_2 v_j \\
 (\eta^e)^n (\zeta^e)^r &= v_j^T H_2^T X_3 H_1 v_j
 \end{aligned}$$

为了计算单元刚度矩阵, 只须分别计算下列积分。计算结果它们均是 8×8 矩阵。记之为 $K_l (l = 1, \dots, 16)$, 其具体表达式不拟写出, 可详细参阅另文。

$$\begin{aligned}
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-1)} H_1^T X_2 H_1 dx & (l = 1, 2) \\
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-3)} H_1^T X_2 H_2 dx & (l = 3, 4, 5) \\
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-6)} H_2^T X_2 H_2 dx & (l = 6, 7, 8, 9) \\
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-10)} H_2^T X_1 H_2 dx & (l = 10, 11) \\
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-12)} H_1^T X_1 H_1 dx & (l = 12, 13) \\
 K_l &= \int_0^1 (x - a_i - 1)^{2(l-14)} H_2^T X_3 H_1 dx & (l = 14, 15, 16)
 \end{aligned}$$

于是第一组方程的单元刚度矩阵为:

$$\begin{aligned}
 K_l^e &= \frac{Etd^2}{2h^4} \left[(a + \frac{d}{6}) K_1 + \frac{4(H-a)h^2}{L^2} K_2 + a^2 K_3 + \frac{8a(H-a)h^2}{L^2} K_4 \right. \\
 &\quad + \frac{4^2(H-a)^2 h^4}{L^4} K_5 + \frac{a^3}{3} K_6 + \frac{4a^2(H-a)h^2}{L^2} K_7 \\
 &\quad \left. + \frac{4^2 a(H-a)^2 h^4}{L^4} K_8 + \frac{4^3(H-a)^3 h^6}{3h^6} K_9 \right] \\
 &\quad + \frac{Gt^3}{3h^2} \left[(d + 2a) K_{10} + \frac{8(H-a)h^2}{L^2} K_{11} \right] .
 \end{aligned}$$

第二组方程的单元刚度矩阵为:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^e &= \frac{Et}{h^4} \left[(2a + d)h^2 K_{12} + \frac{8(H-a)}{L^2} K_{13} - a^2 h^2 K_{14} \right. \\
 &\quad - \frac{8a(H-a)h^3}{L^2} K_{15} - \frac{4^2(H-a)h^5}{L^4} K_{16} \\
 &\quad + \frac{2a^3}{3} K_6 + \frac{8a^2(H-a)h^2}{L^2} K_7 \\
 &\quad \left. + \frac{2(H-a)^2 a^4 h^4}{L^4} K_8 + \frac{2 \cdot 4^3(H-a)^3 h^6}{L^6} K_9 \right] .
 \end{aligned}$$

求出各单元刚度矩阵后,对号入座方法装配成总刚度矩阵 K_I, K_{II} .

现在计算集中荷载的荷载列阵.设在第 k 个单元中点 (x_p, z_p) 处受到垂直于桥面的集中力 P 的作用,则有

$$(f, w) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f w dz = \sum_{j=1}^n \int_{-\frac{L}{2}+(j-1)h}^{-\frac{L}{2}+jh} f w dz = P \int_{-\frac{L}{2}+(k-1)h}^{-\frac{L}{2}+kh} (\bar{x}_p \theta^e + \eta^e) \delta(z - z_p) dz$$

由于 $x = z/h + \alpha_k + 1$ 当 $z = z_p$ 时, $x = x_p = \frac{z_p}{h} + \alpha_k + 1$,

$$(f, w) = hP \int_0^1 [\bar{x}_p \theta(x) + \eta(x)] \delta(x - x_p) dx = hP [\bar{x}_p \theta^e(x_p) + \eta^e(x_p)]$$

以 $x = x_p = \frac{z_p}{h} + \alpha_k + 1$ 代入(9)中第二式第四式的系数得

$$\begin{aligned} (1, x_p, x_p^2, x_p^3) H_2 = & (0, 0, 2 \frac{z_p^3}{h^3} + 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + 6(1+\alpha_k) \frac{z_p}{h} \\ & + (2+2\alpha_k) \alpha_k^2, \frac{z_p^3}{h^3} + (1+3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (2+3\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k) \alpha_k^2, 0, 0, \\ & + 2 \frac{z_p^3}{h^3} - 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} - 6(1+\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k)^2 (1-2\alpha_k), \\ & \frac{z_p^3}{h^3} + (2+3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (1+\alpha_k)(1+3\alpha_k) \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k)^2 \alpha_k \end{aligned}$$

第一组和第二组方程在第 k 个单元上的荷载列阵为

$$\begin{aligned} f_I^k = P x_p (0, 0, 2 \frac{z_p^3}{h^3} + 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + 6(1+\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (3+2\alpha_k) \alpha_k^2, \\ \frac{z_p^3}{h^3} + (1+3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (2+3\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k) \alpha_k^2, 0, 0, \\ - 2 \frac{z_p^3}{h^3} - 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} - 6(1+\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k)^2 (1-2\alpha_k), \\ \frac{z_p^3}{h^3} + (2+3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (1+\alpha_k)(1+3\alpha_k) \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k)^2 \alpha_k^2), \\ f_{II}^k = P (0, 0, 2 \frac{z_p^3}{h^3} + 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + 6(1+\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (3+2\alpha_k) \alpha_k^2, \\ \frac{z_p^3}{h^3} (1+3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (2+3\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k) \alpha_k^2, 0, 0, \\ - 2 \frac{z_p^3}{h^3} - 3(1+2\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} - 6(1+\alpha_k) \alpha_k \frac{z_p}{h} + (1+\alpha_k)^2 (1-2\alpha_k), \end{aligned}$$

$$\frac{z_p^3}{h^3} + (2 + 3\alpha_k) \frac{z_p^2}{h^2} + (1 + \alpha_k)(1 + 3\alpha_k) \frac{z_p}{h} + (1 + \alpha_k)^2 \alpha_k)^T,$$

而其他单元的荷载列阵均为零。

按照通常的方法可得两组方程的荷载列阵 F_I, F_{II} ，它们实际上各有四个非零元素。

$$\begin{aligned} \text{计及边界条件: } \xi_0 = \xi'_0 = \theta_0 = \theta'_0 = \zeta_0 = \zeta'_0 = \eta_0 = \eta'_0 = \xi_n = \xi'_n = \theta_n = \theta'_n = \zeta_n = \zeta'_n = \eta_n \\ = \eta'_n = 0 \end{aligned}$$

最后便可得到线性代数方程组：

$$Kq = F$$

式中 K 为总刚度矩阵， F 为荷载列阵，

$$q = (\xi_1, \xi'_1, \theta_1, \theta'_1, \zeta_1, \zeta'_1, \eta_1, \eta'_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi'_{n-1}, \theta_{n-1}, \theta'_{n-1}, \zeta_{n-1}, \zeta'_{n-1}, \eta_{n-1}, \eta'_{n-1})^T.$$

(四) 离散方程组的解的存在唯一性

显然，一维 *Hermite* 插值是属于 C^1 的，故有限元近似解 $w_h \in H_0^2$ ，由引理 2 有

$$a(w_h, w_h) \geq \alpha \|w_h\|_H^2$$

而 $a(w_h, w_h) = q^T K q$

由有限维空间范数的等价性知，存在正常数 β 使

$$\|w_h\|_H^2 \geq \beta \|q\|^2$$

式中 $\|q\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j^2 + \xi_j'^2 + \theta_j^2 + \theta_j'^2 + \zeta_j^2 + \zeta_j'^2 + \eta_j^2 + \eta_j'^2)$

$$\therefore q^T K q \geq \alpha \beta \|q\|^2$$

所以有

定理 2 离散方程组是正定的。

由此推知解存在唯一，而且保证计算过程数值稳定。

(五) 收敛速度

若微分方程(1)的右端函数属于 L^2 ，且 $u, v \in H^4$ 式中 $w = (u, v)^T$ ，则根据 Ciarlet—Raviart^[4] 可得方程(3)的解 w 与有限元逼近解 $w_h = (u_h, v_h)^T$ 的误差估计：

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^4 |u|_4,$$

$$\|v - v_h\|_0 \leq Ch^4 |v|_4,$$

$$\|u - u_h\|_2 \leq Ch^2 |u|_4,$$

$$\|v - v_h\|_2 \leq Ch^2 |v|_4.$$

这表示位移的精度达到 $O(h^4)$, 应力精度达到 $O(h^2)$ 。如果集中荷载情形, 可近似地看作是小面积上的分布荷载, 使荷载分量属于 L_2 , 由圣维南原理知, 这只对集中荷载点附近有影响, 所以计算效果应当是相当好的。

(六) 结 束 语

本文用有限元素法解算了变截面薄壁桥问题的位移, 从而可以解算桥的法向应力, 剪应力, 轴向力, 弯矩和总扭转力矩, 还可以编成程序, 电算实例。

本文结果不但对抛物线而且对任何光滑曲线仍然成立。

参 考 文 献

- [1] Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderliche einfach symmetrischen offenem Querschnitt Dr. Ing Zbigniew cywinski, *Damz Die Bautechnik*, 1964, Vol.41, 301—307.
- [2] Ciarlet P.G, *Lectures on the Finite Element Methods*, 1975.
- [3] Strang G. & Fix G, *An Analysis of the Finite Element Methods*, 1972.
- [4] Ciarlet P.G. Raviart P.A., General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with application to finite element methods, *Comp. Methods in Appl. Mech and Eng.*, 1 (1972), 217—249.

The Finite Element Method for Four Order Differential Equation Systems with Variable Coefficients

Ma Runian

Chen Baoyao

Liu Hongkai

Abstract

In this paper we discuss about flexural-torsional buckling problems of thin wall bridge with variable section and derive the method of solving the boundary problem for four order differential equation systems with variable coefficients. By means of the Hermite finite element method, we prove there is uniqueness of generalized solution, the effective numerical calculation, and the higher accurate estimation.