

# 具有随机漂移脉冲信号的功率谱计算

邓集贤 司徒荣 许刘俊

(数学力学系)

(一)

传输信息的机构为通信系统。一个通信系统可以概括如下：

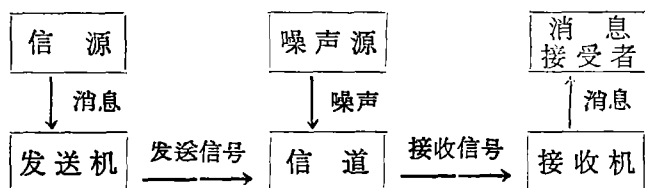


图1 通信的物理模型

从上述的物理模型可见，在通信系统中，关键的问题是消息的传输和处理。

不论哪一种通信系统，它的好坏总可以用它的“数”、“质”两方面来衡量。一般说来，所谓“数”，可以理解为通信系统的效率，也就是单位时间内所能做的“工作量”。所谓“质”，可以理解为通信系统的可靠性。

作为对通信系统定量的研究，在数字通信中，码型功率谱的计算极为重要。无论是考虑定时信息的提取，还是分析信号的频率特性，都需用到码型功率谱。如果功率谱中有直流成分，或者低频能量较大，这样的码型，就不利于线路传输。因此如何计算功率谱的问题，就成为数字通信工作者十分关心的问题。

已编码的在传输过程中发生漂移的脉冲信号可用如下随机过程表示：

$$\xi_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \tilde{g}\left(\frac{t-t_{2n}}{\tau_n}\right)^* \quad (1)$$

其中， $a_n$ 表示第 $n$ 个脉冲的振幅。由它组成的序列 $\{a_n\}$ 是实的弱平稳序列，即相关函数为

$$E(a_n a_{n+k}) = B(k) \quad (k = 0, \pm 1, \dots) \quad (2)$$

$B(k)$ 的形式与信源和所选择的编码方式有关；

• 本文极限指按均方意义收敛。

$\tilde{g}(t)$ 是单个脉冲按相对宽度的形状,它是在 $[0, 1]$ 以外为零的一个实函数;  
 $t_{2n}$ 为第 $n$ 个脉冲的起点时间,它是一个随机变数;  
 $\tau_n$ 为第 $n$ 个脉冲的宽度,它也是一个随机变数。

上述 $t_{2n}$ 及 $\tau_n$ 由干扰的特性所决定。当 $t_{2n}$ 及 $\tau_n$ 均不发生漂移,脉冲按周期 $T$ 发生且单个脉冲按相对宽度的波形就是实际脉冲的波形时,已编码信号可以表示为

$$\xi_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \tag{3}$$

其中,  $g(t)$ 是单个脉冲的波形,它是在 $[0, 1]$ 以外为零的实函数,  $T$ 是脉冲周期。

由于编码信号,即使是由(3)式所表示的很特殊的编码信号,一般也不是弱平稳过程<sup>(1)</sup>。因此,它的功率谱密度不能用其相关函数的富氏变换去求\*。对于(3)式的编码信号, Bennet, W. R.<sup>(2)</sup>在假定此过程是遍历的条件下(他在文章中说,不用假设过程为弱平稳)得到了一个近似公式

$$F(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left[ B(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B(k) \cos \omega k T \right] \tag{4}$$

其中,  $G(\omega)$ 是 $g(t)$ 的富氏变换。

事实上,按一般的遍历性的定义(其意义是:就相关函数而言,对总体的平均等于对时间的平均),就可以推出弱平稳性<sup>(4)</sup>。也就是说,如果此过程在一般意义下是遍历的,则就可应用相关函数与功率谱之间的富氏变换去求其功率谱。这样, Bennet 在(4)式假设的条件就与前提矛盾。

本文从更一般的情形(1)式出发。不需要假设过程具有遍历性,得到了一个计算功率谱的精确公式。对于由(3)式所表示的编码信号,本文在一般码型都能满足的相当广泛的条件下,也能得到(4)式,并且其结果是精确的。

## (二)

我们知道,随机过程 $\xi_t$ 的功率谱为

$$F(\omega) \triangleq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} E \left| \int_{-l}^l \xi_t e^{-i\omega t} dt \right|^2 \tag{5}$$

下面着重讨论脉冲按周期 $T$ 发生,但在传输过程中发生漂移的情形,即在(1)中

$$t_{2n} = nT + \nu_n$$

其中,  $\nu_n$ 为一随机变数。假定对任意 $n$ ,  $|\nu_n| < T$ ,  $|\tau_n| < T$ , 推导 $F(\omega)$ 的计算公式。

首先,利用广义函数,我们有

**引理** 若 $B(\tau)$ 为任意复值函数,满足下列条件之一:

\* 即使过程是弱平稳的,还必须要求在一一定的条件(如本文引理所列的条件之一)下,才能用相关函数的富氏变换去求其功率谱密度。

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)| d\tau < \infty,$$

$$2) B(\tau) = A_0, \quad (A_0 \text{ 为常数})$$

$$3) B(\tau) = A_1 e^{i\lambda_1 \tau},$$

( $A_1$  为常数,  $\lambda_1$  为不为 0 的实数)

$$4) B(\tau) = B_0(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda_k \tau},$$

其中,  $B_0(\tau)$  绝对可积,  $A_k$  有界,  $\lambda_k$  为实数, 且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lambda_k \rightarrow \infty^*$ ,

5)  $B(\tau)$  为周期函数, 且能展为富氏级数.

则下式成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \int_{-l}^l B(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt ds \quad (6)$$

证 1) 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \int_{-l}^l B(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt ds \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{2l} (2l - |\tau|) B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-2l}^{2l} B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{2l} |\tau| B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

由条件 1) 可知, 上式右边第一项等于  $\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$ , 而第二项不难证明它等于零.

证 2) 将  $B(\tau) = A_0$  代入 (6) 式两边. 于是, 左边有

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_0 e^{-i\omega \tau} d\tau = 2\pi A_0 \delta(\omega)$$

而右边为

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \int_{-l}^l A_0 e^{-i\omega(t-s)} dt ds \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} A_0 \int_{-2l}^{2l} \left(1 - \frac{|\tau|}{2l}\right) e^{-i\omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

\*从纯数学角度来说, 是不必假定当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lambda_k \rightarrow \infty$  的. 但考虑到已编码信号的要求, 有必要作这一假设.

$$= \lim_{|w| \rightarrow \infty} \frac{A_0}{|w|^2} (1 - \cos 2|w|) = CA_0 \delta(w).$$

可以证明,  $C = 2\pi$ . 故2)得证.

仿证2), 可得3). 由1), 2), 3)可得4), 从而推出5).

**定理** 设  $\xi_t$  为由(1)式所表示的已编码信号过程. 若

- 1)  $\{\tau_n\}$  独立同分布;
- 2)  $\{\gamma_n\}$  独立同分布;
- 3)  $\{a_n\}$ 、 $\{\tau_n\}$ 、 $\{\gamma_n\}$  相互独立.

令 
$$B(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B(K) \delta(\tau - KT)$$

若  $B(\tau)$  满足上述引理的五个条件之一, 则  $\xi_t$  的功率谱为

$$F(w) = \frac{1}{T} \left\{ B(0) [E|\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)|^2 - |\Psi(w)|^2 |\varphi_v(w)|^2] + |\varphi_v(w)|^2 |\Psi(w)|^2 \mathcal{F}[B(\tau)] \right\} \quad (7)$$

其中,  $\varphi_v(w)$  为  $v_n$  的特征函数,  $\Psi(w)$  为  $\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)$  的数学期望.  $\widetilde{G}(w)$ 、 $\mathcal{F}[B(\tau)]$  分别为  $\widetilde{g}(t)$ 、 $B(\tau)$  的富氏变换.

证 按(5)式, 我们有

$$F(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} E \left| \int_{-NT}^{NT} \xi_t e^{-iwt} dt \right|^2$$

由定理之条件可得

$$\begin{aligned} & E \left| \int_{-NT}^{NT} \xi_t e^{-iwt} dt \right|^2 \\ &= E \left| \int_{-NT}^{NT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \widetilde{g} \left( \frac{t - nT - v_n}{\tau_n} \right) e^{-iwt} dt \right|^2 \\ &= E \left| \int_{-NT}^{NT} \sum_{n=-N}^N a_n \widetilde{g} \left( \frac{t - nT - v_n}{\tau_n} \right) e^{-iwt} dt \right|^2 \\ &= E \left| \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-NT}^{NT} \widetilde{g} \left( \frac{t - nT - v_n}{\tau_n} \right) e^{-iwt} dt \right|^2 \\ &= E \left| \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{g} \left( \frac{t - nT - v_n}{\tau_n} \right) e^{-iwt} dt \right|^2 \\ &= E \left[ \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N a_n a_m \tau_n \tau_m \widetilde{G}(w\tau_n) \overline{\widetilde{G}(w\tau_m)} \times e^{-iw(v_n - v_m) - iw(n-m)T} \right] \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E(a_n a_m) E[\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)] E[\overline{\tau_m \widetilde{G}(w\tau_m)}] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E[e^{-i\omega(\nu_n - \nu_m)}] e^{-i\omega(nm)T} \\ & = \sum_{n=-N}^N B(0) E|\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)|^2 + \\ & + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E(a_n a_m) |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2 e^{2-i\omega(n-m)T} \\ & \quad n \neq m \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} F(w) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \left\{ (2N+1) B(0) E|\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)|^2 \right\} \\ & + |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} \left\{ \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E(a_n a_m) e^{-i\omega(n-m)T} \right. \\ & \quad \left. - (2N+1)B(0) \right\} \\ & = \frac{1}{T} \left\{ B(0) [E|\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)|^2 - |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2] \right\} \\ & + |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} E \left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{-i\omega n T} \right|^2 \\ & = \frac{1}{T} \left\{ B(0) [E|\tau_n \widetilde{G}(w\tau_n)|^2 - |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2] \right. \\ & \quad \left. + |\varphi_\nu(w)|^2 |\Psi(w)|^2 \mathfrak{F}[B(\tau)] \right\}^* \text{. 证毕.} \end{aligned}$$

当我们进一步考察脉冲宽度 $\tau_n$ 和起点时间 $t_{2n}$ 发生漂移的特殊情形时,容易得到下列的推论。

**推论 1** 设 $\tau_n$ 在 $(\tau_0 - \Delta, \tau_0 + \Delta)$ , ( $\Delta \leq \tau_0$ 且 $\tau_0 + \Delta \leq T$ )上服从均匀分布。 $\nu_n$ 为 $(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4})$ 上的均匀分布。 $\widetilde{g}(t)$ 为矩形波

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $\xi_i$ 的功率谱为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{1}{T} \left\{ B(0) \left[ \frac{2}{w} \left( 1 - \frac{\sin \Delta w}{\Delta w} \cos \tau_0 w \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left( \frac{4 \sin \frac{T}{4} w}{T w^2} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{\sin \Delta w}{\Delta w} \cos \tau_0 w + \left( \frac{\sin \Delta w}{\Delta w} \right)^2 \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{4 \sin \frac{T}{4} w}{T w^2} \right)^2 \left[ 1 - 2 \frac{\sin \Delta w}{\Delta w} \cos \tau_0 w + \left( \frac{\sin \Delta w}{\Delta w} \right)^2 \right] \mathfrak{F}[B(\tau)] \right\} \end{aligned}$$

•) 这是由于假设 $B(\nu)$ 满足引理之条件,故由引理之结果,可推得

$$\mathfrak{F}[B(\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E \left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{-i\omega n T} \right|^2 \text{.}$$

**推论 2** 设  $\tau_n$  在  $(\tau_0 - \Delta, \tau_0 + \Delta)$ , ( $\Delta \leq \tau_0$  且  $\tau_0 + \Delta \leq T$ ) 上服从三角形分布, 即  $\tau_n$  的密度函数为<sup>[7]</sup>

$$f_{\tau_n} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^2}(t + \Delta - \tau_0), & \text{当 } \tau_0 - \Delta \leq t \leq \tau_0 \\ \frac{1}{\Delta^2}(\Delta + \tau_0 - t), & \text{当 } \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + \Delta, \\ 0 & \text{, 其它} \end{cases}$$

又设  $\nu_n$  为  $(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4})$  上的三角形分布. 即  $\nu_n$  的密度函数为

$$f_{\nu_n}(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}(1 + \frac{4t}{T}), & \text{当 } -\frac{T}{4} \leq t \leq 0 \\ \frac{4}{T}(1 - \frac{4t}{T}), & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \text{, 其它} \end{cases} \quad (8)$$

$\tilde{g}(t)$  为矩形波

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则  $\xi_t$  的功率谱为

$$F(\omega) = \frac{2}{T\omega^2} \left\{ B(0) \left[ 1 - \frac{2(1 - \cos\Delta\omega)\cos\tau_0\omega}{\Delta^2\omega^2} \right] + \left[ \mathcal{F}[B(\tau)] - B(0) \right] \left[ \frac{512}{T^4\omega^4} \left( 1 - \cos\frac{\omega T}{4} \right)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 - \frac{4(1 - \cos\Delta\omega)\cos\tau_0\omega}{\Delta^2\omega^2} + \frac{4(1 - \cos\Delta\omega)^2}{\Delta^4\omega^4} \right) \right] \right\} \quad (9)$$

**推论 3** 当  $\tau_n \equiv 1$  且  $\nu_n \equiv 0$  时, ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) 则有<sup>[7]</sup>

$$F(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \mathcal{F}[B(\tau)] \\ = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left[ B(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B(k) \cos k\omega T \right]$$

由推论 3 可见, 上式只是 (7) 式的特殊情形. 与 (4) 式比较, 在引理条件下, (4) 式两边是相等的.

**例 1** 求二元单极性码的功率谱 (无漂移情形).

这种码型是在时隙  $t = nT$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) 发出信息“1” (用单极性脉冲表示) 或“0” (用无脉冲表示). 如果在时隙  $t = nT$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) 发出信息是相互独立的. “1”和“0”出现的概率分别为  $p$  和  $(1-p)$ , 即  $\{a_n\}$  为弱平稳序列, 且  $a_n = 1$  的概率为  $p$ ,  $a_n = 0$  的概率为  $(1-p)$ . 于是

$$B(0) = p \\ B(k) = p^2, \quad |k| \geq 1$$

$$\text{令 } B(\tau) = (p - p^2)\delta(\tau) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^2\delta(\tau - nT)$$

则 $B(\tau)$ 满足引理的条件1)和5)。由推论3得到

$$F(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left[ (p - p^2) + \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^2 \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \right] \quad (10)$$

例2 假设例1中的信号在传输过程中受到 $v_n$ 为推论2所表示的三角形分布的干扰。又设 $\tau_n \equiv 1$ 。则信号过程的功率谱(7)式化为

$$F(\omega) = \frac{1}{T} |G(\omega)|^2 \left\{ p - \left[ \frac{32}{T^2\omega^2} (1 - \cos \frac{T\omega}{4}) \right]^2 \left[ p^2 - \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^2 \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \right] \right\} \quad (11)$$

将(11)式与(10)式比较,可以看出,由(8)式所表达的干扰,没有改变(10)中线谱的频率,但改变了线谱的强度。同时,也改变了连续谱的分布。

### 参 考 文 献

- [1] 竇瑞华, 数字线路传输码型概述, 数字通信, 1974, 4, 69—87.
- [2] Bennet. W.R., Statistics of Regenerative Digital Transmission, *BSTJ*, 37 (1958), 6, 1501—1542.
- [3] 熊谷传六, 脉冲编码通讯概论, 科学出版社, 1973.
- [4] 中山大学数力系数字通讯组, 关于码型功率谱的计算, 数字通信, 1978, 3, 1—9.
- [5] Б.Р.Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, Москва, Советское радио, 1974, 456.
- [6] В.Р.拉斯, 通信系统, 国防工业出版社, 1976.
- [7] 中山大学数力系数字通信组, 具有随机漂移脉冲信号的功率谱计算, 数字通信, 1978, 4.

## Calculus of Power Spectrum of Impulse Signal with Random Drift

Deng Jixian    Situ Rong    Xia Liu jun

### Abstract

Let

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \widetilde{g} \left[ \frac{t-t_{2n}}{\tau_n} \right]$$

denote the random process of encoding impulse signal interfered by noise. In this paper we concentrate our attention to the random impulse process with period  $T$ . Under the conditions of our theorem, the power spectrum would be

$$F(\omega) = \frac{1}{T} \left\{ B(0) [E |\tau_n \widetilde{G}(\omega \tau_n)|^2 - |\Psi(\omega)|^2 |\varphi_v(\omega)|^2] + |\Psi(\omega)|^2 |\varphi_v(\omega)|^2 \mathfrak{A}[B(\tau)] \right\}.$$

Particularly, if  $\tau_n \equiv 1$ ,  $\nu_n \equiv 0$ , then

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \widetilde{g}(t - nT),$$

and

$$F(\omega) = \frac{1}{T} |\widetilde{G}(\omega)|^2 \left[ B(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B(n) \cos n\omega T \right].$$

We have obtained, therefore a precise formula under widest conditions than Bennet in obtaining his approximate formula.