波的有限传播法

吴兹潜

（计算机科学系）

§1 问题的提出

典则形式的双曲方程（组）的定解问题，例如$u\epsilon C^1$是双曲方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \qquad (*)$$

的解，而且适合条件

$$\begin{cases} u(\alpha y,y)=\varphi_0(y), \\ u(\beta y,y)=\varphi_1(y), \end{cases} \quad \varphi_0(0)=\varphi_1(0),\ y\geqslant 0,\ 0<\alpha<\beta, \qquad (**)$$

$\varphi_0,\varphi_1\epsilon C^1$，即使如此简单问题的解也以无穷级数的形式出现。

本文通过研究函数方程的近似解法，解决一些类型相当广泛的双曲方程组的定解问题[1]的近似解法。

§2 样条函数[2]与函数方程[1]

定理一 若广义函数方程为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^k,\quad -\infty<x<+\infty,$$

而且常系数a_i，α_i适合于$q=\sum\limits_{i=1}^{l}|a_i|\,|\alpha_i|^k<1, |\alpha_i|<1$，$k\geqslant 0$ 为整数。

i)当 一切的$0<\alpha_i<1$，$|f(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^k$时，则函数方程的唯一解为

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^k\Big/(1-\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i k). \qquad (1)$$

ii) 若 α_i 中至少有一个为负数，当$k=2k_1$ 为偶数，$f(x)$为偶函数，而且$|f(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^{2k}$，则函数方程的唯一解为(1)，但$k=2k_1$。这里

$$(x-x_j)_+^k=\begin{cases}(x-x_j)^k, & x\geqslant x_j, \\ 0, & x\leqslant x_j.\end{cases}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

而$x_j(j=0,1,2,\cdots,n-1)$是自变量x在实轴上的值，而且

$$-\infty<0=x_0<x_1<\cdots<x_n<+\infty\text{。}$$

证　这里只需证明i)，ii)依同理照证。

首先考虑函数方程

$$f(x-x_j)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i(x-x_j))+\beta_j(x-x_j)_+^k \tag{2}$$

的解。定义

$$f_{-1}(x-x_j)=0\,,$$

$$f_0(x-x_j)=\beta_j(x-x_j)_+^k\,,$$

$$f_p(x-x_j)=\sum_{i=1}^{l}a_i f_{p-1}(\alpha_i(x-x_j))+\beta_j(x-x_j)_+^k\,,\ p=1,2,\cdots\cdots$$

由于

$$|f_1(x-x_j)-f_0(x-x_j)|\leqslant|\beta_j|q(x-x_j)_+^k\,,$$

行归纳法得

$$|f_{p+1}(x-x_j)-f_p(x-x_j)|\leqslant|\beta_j|q^{p+1}(x-x_j)_+^k\,,$$

因此级数

$$(f_0-f_{-1})+(f_1-f_0)+\cdots\cdots$$

在$[-N,N]$上绝对一致收敛于函数$f(x)$，而且当$n\to\infty$时，$f(x-x_j)\to\dfrac{\beta_j}{1-q}(x-x_j)_+^k$。由于$N$的任意性，故$f(x-x_j)$在整个实轴上存在，而且它是(2)的解。

命

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}f(x-x_j),$$

由(2)立得(1)，从而求得(1)的解为

$$f(x)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^k}\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^k\,, \tag{3}$$

唯一性的证明。设原方程(1)有两解$f^{(1)}(x),f^{(2)}(x)$，如果

$$|f^{(i)}(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^k\,,\ i=1,2$$

命

$$g(x)=f^{(1)}(x)-f^{(2)}(x),$$

得

$$g(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i g(\alpha_i x),$$

由于

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$|g_0(x)| \leqslant \widetilde{M}(x-x_0)_+^k,$$

行归纳法得

$$|g_n(x)| \leqslant \widetilde{M} q^n (x-x_0)_+^k,$$

当$n\to\infty$时，$|g(x)|\to 0$，所以解唯一，得所证。

定理二 若函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l} a_i f(\alpha_i x)+h(x),\ |\alpha_i|<1,\ -\infty<x<+\infty \tag{4}$$

的常系数a_i，α_i适合于$q=\sum_{i=1}^{l}|a_i||\alpha_i|^k<1$，$|\alpha_i|<1$，$k\geqslant 0$为整数。

i) 当一切的$0<\alpha_i<1$，$|f(x)|$、$|h(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^k$时，函数方程的唯一解为

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{p}\left[\sum_{m_j=1}^{l} a_{m_j} h\left(\prod_{j=1}^{p}\alpha_{m_j} x\right)\right]\right\}, \tag{5}$$

$$\prod_{j=1}^{0}\left[\sum_{m_j=1}^{l} a_{m_j} h\left(\sum_{j=1}^{0}\alpha_{m_j} x\right)\right]=h(x).$$

ii) 当α_i中至少有一个为负数，当$k=2k_1$为偶数，$f(x)$，$h(x)$为偶函数，而且$|f(x)|$、$|h(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^{2k_1}$，则函数方程有唯一解存在，它仍表示为(5)，但$k=2k_1$。

证 只需证明i)，ii)的情况照证。

定义

$$f_{-1}(x)=0,\ f_0(x)=h(x)$$

$$f_p(x)=\sum_{i=1}^{l} a_i f_{p-1}(\alpha_i x)+h(x),$$

由于

$$|f_0(x)-f_{-1}(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^k,$$

行归纳法得

$$|f_{p+1}(x)-f_p(x)|\leqslant M|q|^{p+1}(x-x_0)_+^k,$$

因此级数

$$(f_0-f_{-1})+(f_1-f_0)+\cdots\cdots$$

在$[-N,N]$上绝对一致收敛于一连续函数$f(x)$，当$n\to\infty$时，$f_p(x)\to f(x)$。由于N的任意性，$f(x)$在实轴上存在且连续，而且其解表示为(5)。明欲证。

在定理二的条件下，求(4)的近似解。这里考虑定理二i)的情况。记(3)的右端为$\widetilde{S}_k(x)$，其中β_j，$j=0,1,\cdots,n-1$是待定的，而且$\widetilde{S}_k(x_0)=0$，在实轴作分划：

$$\Pi_x:\ -\infty<x_0<x_1<\cdots\cdots<x_n<+\infty.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将$f(x)=\widetilde{S}_k(x)$代入(4)得

$$\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^k=h(x),$$

将节点$x=x_j$，$j=1,2,\cdots,n$代入上式，容易求得

$$\beta_0=\frac{h(x_1)}{(x_1-x_0)^k},$$

$$\beta_i=\frac{h(x_{i+1})-\sum\limits_{j=2}^{i+1}(x_{i+1}-x_{i-j+1})^k\beta_{i-j+1}}{(x_{i+1}-x_i)^k},\qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

将β_i代入$\widetilde{S}_k(x)$，并记为$S_k(x)$，以$S_k(x)$作为(4)的第零次近似解，即

$$f_0(x)=S_k(x),$$

易得

$$f_p(x)=\sum_{i=1}^{l}a_if_{p-1}(a_ix)+h(x)$$

$$=(\sum_{i=1}^{l}a_ia_i^k)^pS_k(x)+\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\prod_{j=1}^{p}\left[\sum_{m_j=1}^{l}a_{m_j}\ h(\prod_{j=1}^{p}a_{m_j}x)\right]\right\},$$

当$p\to\infty$时，$f_p(x)\to f(x)$。

$$|R_p(x)|=|f(x)-f_p(x)|\leqslant\prod_{j=1}^{p}\left(\sum_{m_j=1}^{l}|a_{m_j}|\,|f(\prod_{j=1}^{p}a_{m_j}x)|\right)$$

$$+\frac{1}{1-|q|}|q|^p\sum_{j=0}^{n-1}|\beta_j|(x-x_j)_+^k$$

$$\leqslant Nq^p\sum_{j=0}^{n-1}(x-x_j)_+^k$$

对于节点$\{x_i\}$，记$h=\max\limits_i\{x_{i+1}-x_i\}$，得

$$R_p(x)=O(q^ph^k).$$

§3 波的有限传播法

在这一节举若干例说明波的有限传播法的应用。

例1 (双曲方程的第四问题)[3,4]设§1方程(*)，满足(**)的解，试求其第p次迭代的近似解。

解 作分划

$$\Pi_x:\ -\infty<0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n<+\infty,$$

$$\Pi_y:\ -\infty<0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n<+\infty.$$

而且假设

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$l=x_{i+1}-x_i=y_{i+1}-y_i,\ i=0,1,\cdots,n-1.$$

方程(*)的一般解为

$$u=f(x)+g(y) \tag{6}$$

由(**)及(6)易得

$$f(y)=f\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)+\varphi_1\left(\frac{y}{\beta}\right)-\varphi_0\left(\frac{y}{\beta}\right), \tag{7}$$

命$\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}<1, h(y)=\varphi_1\left(\dfrac{y}{\beta}\right)-\varphi_0\left(\dfrac{y}{\beta}\right)$，易得

$$f_p(y)=\sum_{j=0}^{p-1}h(\gamma^j y)+\frac{1}{1-\gamma^2}\gamma^2 p\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^2,$$

而

$$\beta_0=\frac{h(y_1)}{l^2},$$

$$\beta_i=(h(y_{i+1})-\sum_{j=p}^{i+1}(jl)^2\beta_{i-j+1})/l^2,\ i=1,\cdots,n-1.$$

而

$$g_p(y)=\varphi_0(y)-f_p(\alpha y)$$

立得问题的第p次近似解为

$$u_p(x,y)=f_p(x)-f_p(\alpha y)+\varphi_0(y).$$

当$p\to\infty$时，$u_p\to u$，而且$R_p=0\left(\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^p l^2\right)$.

例2 （第一类双曲方程组的Goursat问题）。第一类双曲型方程组的典则形式为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_1&1\\b_3&b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0, \tag{H_1}$$

$$b_3=b_1^2-\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)b_1+\frac{1}{4}\neq 0,\ 0<k<1, b_1\neq 0.$$

它的一般解为

$$\begin{cases}u=f_2(y)+f_3(x-ky)+f_4\left(x-\dfrac{y}{k}\right),\\[2ex] v=f_1(x)+\dfrac{1-2b_1k}{2k}f_3(x-ky)+\dfrac{k-2b_1}{2}f_4\left(x-\dfrac{y}{k}\right).\end{cases} \tag{H_1^*}$$

它的特征线族是$x=c_1$, $y=c_2$, $x-ky=c_3$, $x-\dfrac{y}{k}=c_4$. 关于这类方程组的特征问题，解的唯一性的充分必要条件的证明见〔1〕，现举一例说明。

我们要求方程组(H_1)的解$u,v\in C^1(0,+\infty)$，使它们适合条件

$$\begin{cases}u|_{x=kx}=\varphi_1(x), & u|_{y=\frac{x}{k}}=\varphi_2(x),\\[1ex] v|_{y=kx}=\phi_1(x), & v|_{y=\frac{x}{k}}=\phi_2(x),\end{cases}\quad x\geqslant 0. \tag{8}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由$(H)_1^*$及(8)得

$$f_2(kx)+f_3((1-k^2)x)+f_4(0)=\varphi_1(x), \tag{9}$$

$$f_2\left(\frac{1}{k}x\right)+f_3(0)+f_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)=\varphi_2(x), \tag{10}$$

$$f_1(x)+bf_3((1-k^2)x)+af_4(0)=\phi_1(x), \tag{11}$$

$$f_1(x)+bf_3(0)+af_4\left(\frac{k^2-1}{k}x\right)=\phi_2(x). \tag{12}$$

其中， $a=\frac{1}{2}(k-2b_1)$, $b=\frac{1}{2k}(1-2b_1k)$.

由(9)和(11)消去f_3得

$$-f_1(x)+bf_2(kx)=b\varphi_1(x)-\phi_1(x), \tag{13}$$

由(10)和(12)消去f_4得

$$-f_1(x)+af_2\left(\frac{x}{k}\right)=a\varphi_2(x)-\phi_2(x), \tag{14}$$

再由(13)和(14)消去f_1得函数方程

$$f_2(x)=\frac{b}{a}f_2(k^2x)+h(x), \tag{15}$$

$$h(x)=\frac{1}{a}(\phi_1(kx)-\phi_2(kx))-\frac{1}{a}(b\varphi_1(kx)-a\varphi_2(kx)).$$

在实轴上作分划

$$\Pi_x:\ -\infty<x_0<x_1<\cdots<x_n<+\infty,$$
$$x_{i+1}-x_i=l,\ i=0,\ 1,\ \cdots\cdots n,$$
$$\Pi_y:\ -\infty<y_0<y_1<\cdots<y_n<+\infty,$$
$$y_{i+1}-y_i=l,\ i=0,\ 1,\cdots,n.$$

如果 k_1f_i 为偶函数， $|h(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^2$, $|f_i(x)|\leqslant M(x-x_0)_+^x$, $i=1, 2, 3, 4$,

$\left|\frac{b}{a}\right|k^4<1$, 则$f_2(x)$的第$p$次迭代的近似值为

$$f_{2p}(x)=\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)k^4}\left(\frac{b}{a}k^4\right)^p\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j(x-x_j)_+^2$$
$$+\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{b}{a}\right)^i k(k^{2i}x).$$

而

$$\beta_0=\frac{h(x_1)}{l^2},$$

$$B_i=\left(h(x_{i+1})-\sum_{j=2}^{i+1}(jl)^2\beta_{i-j+1}\right)/l^2.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

此外还可以求得

$$f_{1p}(x)=bf_{2p}(kx)-b\varphi_1(x)+\phi_1(x),$$

$$f_{3p}(x-ky)=-f_{2p}\left(\frac{k}{1-k^2}(x-ky)\right)+\varphi_1\left(\frac{x-ky}{1-k^2}\right),$$

$$f_{4p}\left(x-\frac{y}{k}\right)=-f_{2p}\left(\frac{k}{k^2-1}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)+\varphi_2\left(\frac{k^2}{k^2-1}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right).$$

将 f_i 代入 (H_1^*) 即得问题的解为

$$u_p(x,y)=f_{2p}(y)-f_{2p}\left(\frac{k(x-ky)}{1-k^2}\right)-f_{2p}\left(\frac{kx-y}{k^2-1}\right)$$

$$+\varphi_1\left(\frac{x-ky}{1-k^2}\right)+\varphi_2\left(\frac{k(kx-y)}{k^2-1}\right),$$

$$v_p(x,y)=bf_{2p}(kx)-bf_{2p}\left(\frac{k(x-ky)}{1-k^2}\right)-af_{2p}\left(\frac{kx-y}{k^2-1}\right)-b\varphi_1(x)$$

$$+b\varphi_1\left(\frac{x-ky}{1-k^2}\right)+a\varphi_2\left(\frac{k(kx-y)}{k^2-1}\right)+\phi(x).$$

当 $p\to\infty$，$u_p\to u$，$v_p\to v$。

参考文献

〔1〕 华罗庚等，二阶两个自变数两个未知函数线性偏微分方程组，科学出版社，1979。

〔2〕 李岳生等，样条函数方法，科学出版社，1979。

〔3〕 Kuczma, M., *Functional Equations in a Single Variabb*, Warszawa, 1968.

〔4〕 吴新谋，数学物理方程讲义，高等教育出版社，1956。

The Method of Finite Propation of Wave

Wu Ciqian (Wu Tzechine)

Abstract

In this paper we use the spline function to resolve the functional equation

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_if(a_ix)+h(x)$$

by the numerical method and use this result to resolve certain problems for the systems of the hyperbolic equation.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net