二次样条插值余项估计的訂正和改进

李岳生
（计算机科学系）

1 作者在《高次样条函数的插值方法与偶次样条函数的极值理论》(1974)中定理5和《样条函数方法》(李岳生、齐东旭，1979)中定理3关于二次样条插值余项估计的结果有错。那里所得的估计是 $R_2^{(\alpha)}(f;\ x)=O(h^{3-\alpha}),\alpha=0,1,2$。实际上，在后者条件下，只能达到$O(h^{2-\alpha})$，即关于$h$要降低一阶；如果按前文对分划比不加限制，则还不能包括$\alpha=2$的情形。

上述疏忽，事后我很快注意到了，并在《数值逼近》(李岳生、黄友谦，1979)中作了改正，而在给研究生讲授《样条与插值》课时，更作了精细的估计。后来湘潭大学谢琛泉同志给我来信指出了上述问题，我把改进的估计写信告诉了他。最近从浙江大学提交全国《样条函数理论与应用》会议资料《在节点处插值的二次样条的逼近度》(摘要)中，发现又指出了上述错误。在此除向谢琛泉、杨义群二同志表示感谢外，并借贵刊对上述错误表示订正。

2 考虑到我的《样条与插值》尚未正式出版，而其中对二次样条插值余项估计的结果至今还是新的，在此有必要将它发表出来，但将证明略去。

给定分划$\pi=\{x_i\}_0^{k+1}$：$a=x_0<x_1<\cdots x_{k+1}=b$，设$S(x)$为关于分划$\pi$的属于$C^1[a,b]$的二次样条函数。研究如下插值问题：

$$S'(x_0)=f'(x_0),\ S(x_i)=f(x_i),\qquad i=0,\ 1,\cdots,k+1 \tag{1}$$

用$R(x)=f(x)-S(x)$表示插值余项，则对$f\epsilon H^3[a,b]$有$R(x)=\int_a^b K(x,t)f'''(t)dt$，其中

$$K(x,t)=R_x\left\{\frac{(x-t)_+^2}{2}\right\} \tag{2}$$

R_x表示对x函数作插值时的余项算子。

可以证明：对任一固定x，$x_i<x<x_{i+1}$，$K(x,t)$是t的分段二次多项式，且

$$K^{(\alpha,0)}(x,x_i)=0,\quad i=0,1,\cdots,\ k+1,$$
$$K^{(\alpha,1)}(x,\ b)=0,\qquad \alpha=0,1,2.$$

$K^{(\alpha,\beta)}(x,t)$表示对x的α阶和对t的β阶导数

定理 1 设$f\epsilon H^3[a,b]$，则对任一$x\epsilon[x_i,x_{i+1}]$* $i=0,1,\cdots,k$有$|R^{(\alpha)}(x)|\leqslant A_\alpha(x)\|f'''\|_\infty$，

* 对$\alpha=2$时，于$x=x_i$，x_{i+1}上分别理解为右左极限

$\alpha=0,1,2$。

其中

$$A_\alpha(x)=\begin{cases}\xi(1-\xi)\left(\sum_{j=0}^{i-1}h_j^2+\xi h_i^2\right)h_i/6 & \alpha=0,\\ \frac{1}{6}\left|(2\xi-1)\right|\sum_{j=0}^{i-1}h_j^2+h_i^2g_1(\xi) & \alpha=1,\\ \frac{1}{3h_i}\sum_{j=0}^{i-1}h_j^2+h_ig_2(\xi) & \alpha=2,\end{cases}$$

其中

$$\xi=(x-x_i)/h_i,\quad h_j=x_{j+1}-x_j,\quad 0\leqslant\xi\leqslant1,$$

$$g_1(\xi)=\begin{cases}\xi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\xi\right), & 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6\xi^2}(3\xi^4-6(1-\xi)^4+4(1-\xi)^3-2\xi^3), & \frac{1}{2}\leqslant\xi\leqslant1\end{cases}$$

$$g_2(\xi)=\frac{1}{3}(1-3\xi+6\xi^2-2\xi^3)$$

并且上述估计，在如下意义下是最佳的：

$$\sup_{f,\pi}\frac{|R^{(\alpha)}(x)|}{\|f'''\|_\infty}=A_\alpha(x)\qquad(f\in H^3[a,b])。$$

推论 1　如下估计成立

$$\|R^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant C_\alpha h^{2-\alpha}\|f'''\|_\infty(b-a),\quad \alpha=0,1,2,$$

其中　$h=Max(h_0,\cdots h_k)$，

$$C_0=\frac{1}{24},\quad C_1=\frac{1}{6},\quad C_2=\frac{1}{3}\left(\beta_1+\frac{h}{b-a}\right)$$

$$\beta_1=\underset{0\ i\ k}{Max}\{Max(h_0,\cdots,h_i)/h_i\}$$

定理2　设$f\in C^3[a,b]$且f'''为有界变差函数，且设

$$\frac{1}{h_i}\sum_{j=1}^{i-1}|h_j-h_{j-1}|\leqslant\beta_2\qquad i=1\cdots,k$$

则

$$\|R^{(\alpha)}\|_\infty\leqslant\widetilde{C}_\alpha h^{3-\alpha}(\|f'''\|_\infty+V_a^b(f'''))$$

其中

$$\widetilde{C}_0=\frac{1}{24},\quad \widetilde{C}_1=\frac{1}{6},\quad \widetilde{C}_2=\frac{1}{3}(2+\beta_1+2\beta_2)。$$