

$$g = (g_{ij}) \longrightarrow (g_{11}, g_{12}, \dots, g_{nn}, (\det g)^{-1}),$$

可以将 $GL(n, \Omega)$ 看成 Ω^{n^2+1} 的仿射子簇。

集合 $M(n, \Omega) = \Omega^{n^2}$ 有一个以本身代数子集为闭集的 Zariski 拓扑。群 $GL(n, \Omega)$ 是 $M(n, \Omega)$ 的一个开子集并且有诱导拓扑。如果子群 G 同时又是 $GL(n, \Omega)$ 的闭子集, 则把 G 称为一个代数矩阵群。换言之, 即存在多项式 $p_\alpha \in \Omega[x_{11}, \dots, x_{nn}]$, $(\alpha \in J)$ 使得

$$G = \{ g = (g_{ij}) \in GL(n, \Omega) : p_\alpha(g_{ij}) = 0, (\alpha \in J) \}.$$

若我们把 $GL(n, \Omega)$ 看成 Ω^{n^2+1} 的子簇, 则我们有 $G \subset GL(n, \Omega) \subset \Omega^{n^2+1}$ 。现把多项式环 $\Omega[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, z]$ 看作 Ω^{n^2+1} 上的正则函数, 并设

$$I_G = \{ p \in \Omega[x_{11}, \dots, x_{nn}, z] \mid \text{对任意 } g \in G, p(g) = 0 \}.$$

则商环 $\Omega[x_{11}, \dots, x_{nn}, z]/I_G$ 可作 G 上的正则函数论。我们记此环为 $\Omega[G]$ 又称它为 G 的坐标环。

当 \mathcal{B} 是 Ω 的子环时, 则设 $GL(n, \mathcal{B}) = \{ g \in M(n, \mathcal{B}) \mid \det g \text{ 为 } \mathcal{B} \text{ 内的可逆元} \}$, 并用 $G_{\mathcal{B}}$ 表示交集 $G \cap GL(n, \mathcal{B})$ 。

设 k 是 Ω 的子体, 代数矩阵群 G 称为在 k 上定义或是一个 k -群, 如果 G 所决定的理想 I_G 可以由环 $k[x_{ij}, z]$ 内的元所生成。又如 $I_k = \{ p \in k[x_{ij}, z] \mid \text{对 } g \in G, p(g) = 0 \}$

则商环 $k[x_{ij}, z]/I_k = k[G]$ 就是 G 在 k 上的坐标环。

注: 如果体 k 不是完全体, 单假设 G 是 k 封闭 (即 G 是由一组以 k 为系数的方程所定义), 那么, 并不能得出 G 在 k 上有定义, 只可以说 G 在 k 上的一个完全不可离扩张体 k' 上定义。

1.3 代数群的李代数 一个群簇是光滑的, 所以在每一点上都定义一个切空间。如果把群的单位元 e 上的切空间 \mathcal{G} 内的每一个切向量看成环 $\Omega[G]$ 的左不变 Ω -求导子, 则 \mathcal{G} 有李代数的结构。这是和李群的情形是一样的 (参看: [36] 严志达 p. 8)。如果 G 在 k 上定义, 则 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_k \otimes_k \Omega$, 此处, \mathcal{G}_k 是由环 $k[G]$ 的 k -求导子所组成的代数。如果 k 的特征数是 $p \neq 0$, 则 \mathcal{G} 和 \mathcal{G}_k 是 Jacobson 的意义下的限制李代数。可是, 这时, 代数群和它的李代数的关系要比李群来得弱。例如, \mathcal{G} 的任一个限制子李代数不一定对应于一个子群。同时, 几个代数子群可以有相同的李代数。

群 G 可用内自同构作用在本身, $\text{Int } g: x \longmapsto gxg^{-1}, (x, g \in G)$ 。用 Ad_g 表示 $\text{Int } g$ 在 e 的

微分, 映射 $g \longmapsto Ad_g$ 是一个从 G 到 $GL(\mathcal{G})$ 的 k 态, 称为 G 的伴随表示。

1.4 代数群的同态 设 $\rho: G \rightarrow G'$ 是代数群, $\rho: G \rightarrow G'$ 是一个映射。如果 ρ 适合下列条件, 则 ρ 是代数群态:

(1) ρ 是从 G 到 G' 的群同态;

(2) ρ 的转置映射 ρ^* 是从 $\Omega[G']$ 到 $\Omega[G]$ 的同态

(如果 $f \in \Omega[G']$, 那么 f 是从 G' 到 Ω 的映射, 适合

$$\rho^*(f) = f \circ \rho).$$

当 G 和 G' 在 k 上定义,同时 ρ^* 将 $k[G']$ 映到 $k[G]$ 内,则 ρ 是一个 k 态.态 $\rho:G \rightarrow G'$ 的微分 $d\rho$ 在单位元定义一个在相应李代数上的同态 $d\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$. G 的有理表示是一个态 $\rho: G \rightarrow GL_m$.

G 的特征标 $\chi: G \rightarrow GL_1$ 就是一个次数为1的有理表示,用 $X(G)$ 或 \hat{G} 表示 G 的特征标所成的可换群.群 \hat{G} 是有限生成.

1.5 齐性空间 商群 设 G 是一个在 k 上定义的代数群, H 是 G 的闭 k -子群(即: H 作为一个代数群是在 k 上定义)这时齐性空间 G/H 可以很自然地赋予一个定义在 k 上的拟投射代数集结构.而且投射 $\pi: G \rightarrow G/H$ 是一个定义在 k 上的代数簇态.同时 G 又可看为作用在 G/H 上的代数变换群.

如果 H 是 G 的正规 k 子群,则 G/H 是一个在 k 上定义的代数群.

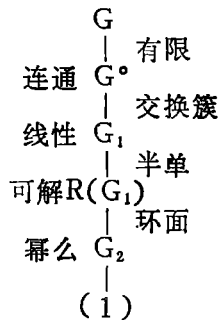
设 G 有一子群 H 和一正规子群 N 适合

(1) G 是 H 和 N 作为抽象群的半直积,

(2) 映射 $\mu: H \times N \rightarrow G$ 是代数簇的同构.这里 $\mu(h,n) = h \cdot n$.那么, G 称为代数群 H 和 N 的半直积.在特征数为零时,条件(1)可推出(2),在特征数为 $p > 0$ 时,不能从(1)得出(2).

1.6 既约群 代数群 G 如果与 $d (= \dim G)$ 个 GL_1 的直积同构,则称 G 为一个代数环面(algebraic torus.)注意,这并不是普通的拓扑环面!以后简称“代数环面”为“环面”.如果代数群 G 是一个可解(或幂零)(solvable(或 nilpotent))的抽象群,则称 G 为可解(或幂零)的.称一线性代数群 G 为幂么的(unipotent),如果 G 的所有代数表示都是由幂么矩阵组成.

设 G 为任一代数群,以 G° 表 G 的单位元的连通分支(在Zariski拓扑内的), G° 为 G 的正规子群,而且 G/G° 为一个有限群. G° 内有一个唯一的最大连通线性子群 G_1 , G_1 为 G° 的正规子群及 G°/G_1 是一个交换簇.(此乃Chevalley定理,证明见Rosenlicht[37]). G_1 内有一个唯一的最大连通线性可解(幂么)正规子群 $R(G_1)$ ($R_u(G_1)$)称为 G 的根—radical(么根—unipotent radical). $G_1/R(G_1)$ 为一半单代数群(semi-simple)这就是说,这是一个根为1的连通线性代数群.设 $R(G_1)$ 的么根为 G_2 ,则 $R(G_1)/G_2$ 为一环面.我们用以下的图表示以上各群的关系:

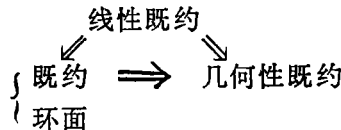


另一方面, $G_1/R_u(G_1)$ 为一既约代数群(reductive group),亦即是说,这是一个么根为1的连通线性代数群.称代数群 G 为线性既约(linearly reductive),如果 G 的所

有有理表示为完全可约。我们说 G 是几何性可约 (geometrically reductive), 如果对 G 的任一有理表示 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 及任一 V 内非零的不变向量 v (即 $\rho(g)v = v, g \in G$), 存在一个次数 >0 的 G 不变齐性多项式函数 f 使 $f(v) \neq 0$.

定理 设 G 为 k 上的线性连通代数群, 以 $Char k$ 表示 k 的特征.

- (1) G 是线性既约, 当且仅当(a) $Char k = 0$ 及 G 是既约或(b) $Char k > 0$ 及 G 是环面;
- (2) 如果 G 是线性既约, 则 G 是几何性既约;
- (3) 如果 G 是既约, 则必是几何性既约.



这定理的第三部分本来是Mumford猜想, 后来由Haboush[38]解决了. 关于这定理和Hilbert的第14问题的关系, 请看Humphreys[10].

2. 代数群的结构

2.1 JORDAN CHEVALLEY分解 设 $g \in GL(n, \Omega)$, 则 g 可唯一地表示为乘积 $g = g_s \cdot g_n$, 此处, g_s 是一个半单矩阵(即 g_s 可以对角化)和 g_n 是一个幂么矩阵(即1是 g_n 的唯一特征值, 或等价于 $g_n - I$ 是幂零的). 同时, $g_s \cdot g_n = g_n \cdot g_s$. 如果 G 是一个代数矩阵群和 $g \in G$, 可以证明 g_n 和 g_s 都属于 G , 并且 g 的分解为半单和幂么两部分与 G 的矩阵群表示无关. 更一般地, 如果 $\phi: G \rightarrow G'$ 是一个代数群态, 同时, $g \in G$, 则 $\phi(g_s) = [\phi(g)]_s$ 和 $\phi(g_n) = [\phi(g)]_n$. 如果 $g \in G_k$, 则 g_s 和 g_n 在 k 的某个完全不可离扩张体上是有理的.

2.2 k -裂环面

定理 设 T 是一个定义在 k 上的环面. 以下条件等价的:

- (1) T 所有的特征标在 k 上定义, 即 $\hat{T} = \hat{T}_k$;
- (2) T 可在 k 上对角化;
- (3) 对每一个在 k 上定义的表示 $\rho: T \rightarrow GL_m$, 群 $\rho(T)$ 在 k 上可对角化.

定义 如果 T 适合上列三个等条件, 则我们说 T 在 k 上可分裂, 并简称 T 为一个 k -裂环面(k -split torus).

如果 T 在 k 上可裂, 则 T 的每一个子环面和商环面亦可裂. 这里总存在一个有限可离伽罗瓦扩张 k'/k 使得 T 在 k' 上可裂. 这个伽罗瓦群在 \hat{T} 上有作用, 其作用完全决定 T 的 k 结构. 子群 \hat{T}_k 就是被这伽罗瓦群固定的特征标集.

定义 称环面 T 为在 k 上各向异性 (anisotropic), 如果 $\hat{T}_k = \{I\}$.

各向异性的环面与普通的紧致环面很相近. 设 $k = \mathbb{R}$, 如果 $\dim T = 1$, 则有两种可能性: 一是 T 在 k 上可裂, 这时 $T_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^*$; 或 T 在 k 上各向异性, 于是 T 与 SO_2 在 k 上同构, 同时 $T_{\mathbb{R}} = SO(2, \mathbb{R})$ 就是圆群. 在一般情形, $T_{\mathbb{R}}$ 是紧致的充要条件是 T 在 \mathbb{R} 上各向异性(当 \mathbb{R} 被 p -进体取代, 则结果仍真). 在此情形下, $T_{\mathbb{R}}$ 是一个拓扑环面(圆群的直积).

定理 设 T 是一个 k 环面. 总存在两个唯一定义的 k 子环面 T_d 和 T_a , 使得

- (1) T_d 在 k 上可裂;
- (2) T_a 在 k 上各向异性;
- (3) $T_d \cap T_a$ 是有限, 并且 $T = T_d \cdot T_a$.

2.3. 抛物子群

定理 设 G 是一连通代数群.

(1) G 的所有极大环面都互相共轭. G 的每一个半单元都包含在一个环面中. 每一个子环面的中心化子都是连通的;

(2) G 的所有极大连通可解子群均互相共轭. G 的每一个元都落在其中一个这样的子群里;

(3) 如果 P 是 G 的闭子群, 则 G/P 是一个投射簇的充要条件为 P 包含一个极大连通可解子群.

G 的秩就是 G 的极大环面的共同维数 (符号 $rk(G)$).

如果 G/P 是一个投射簇, 则称 G 的闭子群 P 为 G 的抛物子群 (parabolic subgroup). 称 G 的极大连通可解子群为Borel子群.

例 当 $G = GL_n$, 向量空间 V 的旗就是一列正增加的子空间 $0 \neq V_1 \subset \dots \subset V_i \subset V_{i+1} = V$. 设 $d_i = \dim V_i$, 则 $\{d_i\}$ 描述此旗的类型. 如果 $d_i = i$, 且 $t = \dim V - 1$, 我们称这样的旗为全旗.

GL_n 的抛物子群就是 Ω^n 中一个旗 F 的稳定群.

G/P 是与 F 同类型的旗所成的流形, 并且就是著名的投射簇. 一个波尔子群就是一个全旗的稳定群. 在适当的基底下, 这是由所有上三角矩阵组成的群.

若 G 是一个 (不一定连通的) 线性代数群, 我们说 G 是既约, 如果 G° 是既约. 我们称 G 的子群 P 为 G 的抛物子群, 如果 P 为 G° 的抛物子群 (见: [42], [43]).

2.4 既约群的根

设 G 是一个既约群和 S 是 G 的一个环面. S 以伴随表示作用在 G 的李代数 \mathcal{G} 上. 因为 S 包含半单元, AdS 是可对角化的,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0^{(S)} \oplus \bigoplus_a \mathcal{G}_a^{(S)},$$

这里, $\mathcal{G}_a^{(S)} = \{ X \in \mathcal{G} : Ad_s(X) = S^a \cdot X \} (a \in \hat{S}; a \neq 0)$.

对于环面 S , G 的根系 $\Phi(G, S)$ 就是上列伴随表示分解中出现的 S 非零特征标集. 如果 $T \supseteq S$, G 对于 T 的任一个根, 若在 S 上不恒等于1, 都对 S 定义一个根. 如果 T 是极大的, $\Phi(G, T) = \Phi(G)$ 就是在普通意义下 G 的根系⁴⁾

2.5 既约 k 群的性质

设 G 是一在 k 上定义的连通既约群.

(1) G 的极大 k 可裂环面在 k 上互相共轭 (以 G_k 的元), 如果 S 是 G 的一个极大 k 可裂环面, 称 S 的维数为 G 的 k 秩 (符号是 $rk_k(G)$). $Z(S)$ 是 $N(S)$ 的连通分支. 称有限群 $N(S)/Z(S)$ 为 G 对于 k 的Weyl群 (符号是 ${}_k W(G)$). $N(S)/Z(S)$ 的一余集都以一在 k 上有理的元

代表: $N(S) = N(S)_k \cdot Z(S)$.

(2) $\Phi(G, S)$ 的元称为 k 根或对于 k 的根, 此处 S 是一个极大可裂环面. 用 ${}_k\Phi$ 或 ${}_k\Phi(G)$ 表示 $\Phi(G, S)$. 这是一个根系. G 对于 k 的Weyl群与 ${}_k\Phi$ 的Weyl群同构: $W({}_k\Phi) \cong {}_kW(G)$.

如果 G 在 k 上为简单的, 则 ${}_k\Phi$ 是不可约.

(3) G 的极小抛物 k 子群 P 在 k 上共轭. 又存在一个 k 可裂环面 S 使得 $P = Z(S) \cdot R_u(P)$ ——这是在 k 上定义的代数半直积. 如果 P 和 P' 都是包含极大 k 可裂环面 S 的极小抛物 k 子群, 则 $P \cap P'$ 包含 S 的中心化子. 包含 $Z(S)$ 的极小抛物 k 子群与Weyl房有(1,1)对应. Weyl群 ${}_kW(G)$ 在包含 $Z(S)$ 的极小抛群 k 子物上有简单传递作用. 在特征数为零的体上, 一个极小抛物 k 子群的幂么根是一个极大幂么 k 子群.

(4) G_k 的Bruhat分解. 设 $V = R_u(P)$, 其中 P 是一个极小抛物 k 子群, 则 $G_k = U_k \cdot N(S)_k \cdot U_k$. 同时, 如果 $n, n' \in N(S)$; $UnU = Un'U \iff n = n'$. 对任一 $w \in {}_kW$, 取一代表 $n_w \in N(S)_k$, 则上列等式可写为 $G_k = \bigcup_{w \in {}_kW} U_k \cdot n_w \cdot P_k$, 此处, 集的并是互不相交的.

我们可更精确地重写这分解. 固定 $w \in {}_kW$, 存在 u 的两个 k 子群 U'_w 和 U''_w 使得, 作为一个代数簇 $U = U'_w \times U''_w$. 同时, 从 $U'_w \times P$ 到 Un_wP 把 (x, y) 映到 xn_wy 的映射是一个在 k 上定义的双正则映射. 这分解给出 G_k/P_k 的一个纤维分解. 设 π 是 G 到 G/P 的投影, 则 $(G/P)_k = G_k/P_k = \bigcap_{w \in {}_kW} \pi\left(\left(U'_w\right)_k\right)$. 如果 k 是代数封闭的, U'_w 是和一仿射空间同构的么群, 因此我们得到 G/P 的一个胞腔剖分.

(5) 标准抛物 k 子群 (对选取固定的 S 和 P)

设 ${}_k\Phi$ 是环面 S 所定义的 G 对于 k 的根系. 极小抛物 k 子群 P 的选取, 决定 ${}_k\Phi$ 的一个Weyl房和一个正根集. 设 ${}_k\Delta$ 是这次序下的简单 k 根集. 如果 Θ 是 ${}_k\Delta$ 的一个子集, 用 S_Θ 表示 $\bigcap_{\alpha \in \Theta} K_{\alpha}$ 的单位元分支. S_Θ 是一个 k 可裂环面, 有维数 $\dim S_\Theta = rk_k(G) - \text{Card } \Theta$. Θ 定义的标准抛物 k 子群就是 $Z(S_\Theta)$ 和 U 生成的子群 ${}_kP_\Theta$. 这子群可写成半直积 $Z(S_\Theta)U_\Theta$, 这里 $U_\Theta = R_u(P_\Theta)$. U_Θ 的李代数是 $\sum \mathcal{G}_\alpha$, 这里 α 是正根而且 α 不是 Θ 中的元的线性组合.

(6) 每一抛物 k 子群都只与一个标准抛物 k 子群在 k 上共轭. 特别地, 如果两个抛物 k 子群在 Ω 上共轭, 则它们已在 k 上共轭.

(7) 设 W_Θ 是由反射 $S_\alpha, \alpha \in \Theta$ 生成的Weyl群 ${}_kW$ 的子群, 如果 Θ 和 Θ' 是 ${}_k\Delta$ 的两个子集, 则 $({}_kP_\Theta)_k \backslash G_k / ({}_kP_{\Theta'})_k \cong W_\Theta \backslash {}_kW / W_{\Theta'}$.

2.6 例子(1) $G = GL(n)$,

$$S = \text{对角矩阵群} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} s^{i_1} & & & \\ & s^{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{i_n} \end{array} \right) \right\},$$

这里 $\lambda_i \in \hat{S}$ 使得 $s^{i_i} = s_{i_i}$. 显然, S 是一个极大裂环面. 那些上三角矩阵给出一个极小抛

Q 对角化后,可更容易计算那些根空间 $q_{ij} = d_i \delta_{ij}$. 考虑以下三种情形:

对 $i < j \leq q$, $\lambda_i - \lambda_j$ 是一个根,其相应的根空间由 $e_{ij} - e_{n-j+1, n-i+1}$ 生成,同时这个根的重数是1.

对 $i \leq q < n - q$, λ_i 是一个重数为 $n - 2q$ 的根,其相应的根空间由 $e_{ij} - d_j^{-1} e_{j, n+i+1}$ ($q+1 \leq j < n - q$)生成.

对 $i < j \leq q$, $\lambda_i + \lambda_j$ 是一个重数为1的根,其相应的根空间由 $e_{i, n-j+1} - e_{j, n-i+1}$ 生成. 那些简单根就是

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{q-1} - \lambda_q \text{ 和 } \lambda_q \text{ 当 } n \neq 2q$$

$$\text{与及 } \lambda_{q-1} + \lambda_q \text{ 当 } n = 2q.$$

那Weyl群就是所有在坐标子空间上对称的循环矩阵的乘积. 当 $n \neq 2q$ 时, Weyl群有任意维数; 当 $n = 2q$ 时, 有偶维数. 群 $SO(F)$ 分裂的充要条件为 $q = [n/2]$. 如果它不分裂, 则存在重数 >1 的根. 抛物 k 子群就是有迷途向旗的稳定子群. 抛物 k 子群在 k 上共轭的充要条件为存在 G_k 的元把一个旗映到另一个旗上. 由Witt的定理, 这是可能的充要条件为那两个旗有相同类型.

(4) 当给出一个埃尔米特形, 我们有类似结果, 不过这时得出一个型 BC_q 的根系.

(5) 对实李群来说, 以上理论与 Iwasawa 和 Cartan 分解有密切联系. 如 \mathcal{G} 是 $G_{\mathbb{R}}$ 的实李代数, 且 G 是一个连通代数既约群, 则 $\mathcal{G} = \mathcal{A} + \mathcal{P}$, 这里 \mathcal{A} 是 $G_{\mathbb{R}}$ 的一个极大紧致子群 k 的李代数. 于是 $G = K \exp \mathcal{P}$.

设 \mathcal{A} 是 \mathcal{P} 的一个极大可换子代数, 则 $A = \exp \mathcal{A}$ 是一个极大 \mathbb{R} -裂环面 S 的实点群的拓扑连通分支. (在Riemann对称空间 $G_{\mathbb{R}}/K$ 上它代表一个极大全测地平子空间).

$$N(S)_{\mathbb{R}} = [K \cap N(A)] \cdot A$$

和

$$Z(S)_{\mathbb{R}} = (K \cap Z(A)) \cdot A.$$

一般用 M 表示群 $K \cap Z(A)$. Weyl群 ${}_{\mathbb{R}}W(G, S)$ 和 $(K \cap N(A))/M$ 同构, 即与E. Cartan提出的对称空间 G/K 的Weyl群同构. 设 $\mathcal{X} = \sum_{\alpha > 0} \mathcal{X}_{\alpha}^{(s)}$, $\alpha \in {}_{\mathbb{R}}\Phi(G, S)$. 设 $N = \exp \mathcal{X}$, 则

$G = K \cdot A \cdot N$ 是一个Iwasawa分解, 同时 $M \cdot A \cdot N$ 是一个极小抛物 k 群的实点群. 假如 $G_{\mathbb{R}}$ 是简单群和 G/K 是一个有界对称域. 那末根系 ${}_{\mathbb{R}}\Phi$ 有两种可能性:

$$G_{\mathbb{R}}/k \text{ 是一个管域 } \iff {}_{\mathbb{R}}\Phi \text{ 的类型是 } C_t,$$

$$G_{\mathbb{R}}/k \text{ 不是一个管域 } \iff {}_{\mathbb{R}}\Phi \text{ 的类型是 } BC_t.$$

3 TITS几何

3.1 Tits 系统

Tits 把上一节的结果推广到抽象群并建立了一个新的几何. 给出一个(抽象)群 G , 两个子群 B, N 及群 $W = N/B \cap N$ 的一个子集 S , 使

- (i) G 由 $B \cup N$ 所生成; $B \cap N$ 是 N 的正规子群;
- (ii) W 由 S 所生成; 若 $s \in S$, 则 $s^2 = 1$;
- (iii) $sBw \subset BwB \cup BsWB (s \in S, w \in W)$;
- (iv) $sBs \subset B, s \in S$.

称 (G, B, N, S) 为一Tits系统(Tits system or BN pair), W 为这Tits系统的Weyl群. 如果有 $g \in G$ 使子群 $P \supset gBg^{-1}$, 则称 P 为抛物子群(parabolic subgroup). 设 $X \subseteq S, W_X$ 为由 X 所生成的 W 的子群, G_X 为 $\cup_{w \in W_X} BwB$. 则任一抛物子群必与唯一的一个 G_X 共轭.

例(i) G 为连通既约 k -群. P 为 G 的一个最小抛物 k 子群. S 为一极大 k -裂环面使 $P = Z(S)R_u(P)$ ($Z(S)$ 为 S 在 G 内的中心化子). 假设 $Z(S) \cong G$. 设 ${}_k W = N(S)/Z(S)$ ($N(S)$ 为 S 在 G 内的正规化子)以 $G(k)$ 表示 G 的 k 有理点, 则存在 $\Sigma \subset {}_k W$ 使 $(G(k), P(k), N(S)(k), \Sigma)$ 为一Tits系统.

(ii) 考虑(i)的特例 $G = GL(n)$. 则 $G(k) = GL(n, k)$ 为系数在 k 内的 $n \times n$ 可逆矩阵, $P(k)$ 为上三角形方阵, $N(S)(k)$ 是 $n \times n$ 的置换矩阵, ${}_k W$ 是对称群 S_n , Σ 是所有对换 $i \rightarrow i + 1 (1 \leq i \leq n - 1)$.

3.2 Tits厦

对任一Tits系统 (G, B, N, S) , 造个单纯复形 \mathcal{B} , 称为这Tits系统的厦(building): \mathcal{B} 的顶点(Vertex)就是 G 的极大抛物子群, 即是 $\{gG_{S-\{s\}} \cdot g^{-1} | g \in G, s \in S\}$. 顶点集 $\{P_1, \dots, P_n\}$ (其中 $P_i \cong P_j$ 若 $i \cong j$) 决定 \mathcal{B} 的一个单纯形(simplex)当且仅当 $P = P_1 \cap \dots \cap P_n$ 是抛物子群. 这就是说 \mathcal{B} 的单纯形相对于 G 的抛物子群. 我们说 P 是 P' 的面(face)当且仅当 $P' \subset P$. 最大的单纯形相对于极小抛物子群, 即 B 的所有共轭子群, 叫这些单纯形做 \mathcal{B} 的房(chamber). 若房 P' 的一个面 P 的维数与 P' 差1, 则称 P 为 P' 的墙(Wall). 例如 $G_{\{s\}} (s \in S)$ 都是 B 的墙.

例: 设 $G = GL(n, k), V = k^n$. 对§3.1例(ii)的Tits系统. G 的抛物子群就是 V 的旗的稳定群, 所以 \mathcal{B} 的单纯形可以看作 V 内的旗. 这样旗 F 是另一个旗 F' 的面, 即是说 F' 是由 F 加细得来. 房是相对于全旗. 可以证明对于关联关系(incident relation)来说, \mathcal{B} 的结构和射影空间 $\mathbf{P}^{n-1}(k)$ 一样.

如果我们把Klein的Erlangen计划看作是几何化成为群论, Tits的工作刚好是相反的方向: 对每一个群作一个相应的几何! 关于Tits几何可看[7], [31].

3.3 Bruhat Tits厦

设 G 是一个连通既约 k -群, T 为 G 的一个极大 k -环面, $\Phi(G, T)$ 为 G 对 T 的根系. 对 $\alpha \in \Phi(G, T)$, 存在一个 G 的单参数子群 $U_\alpha^{(T)}$ 及一个同构 $\theta_\alpha: GL(1) \rightarrow U_\alpha^{(T)}$, 并且满足以下条件: 对 $t \in T, x \in GL(1)$, 都有

$$t\theta_\alpha(x)t^{-1} = \theta_\alpha(t^\alpha x).$$

进一步, 设 $S \subset T$ 为 G 的一个极大 k -裂环面, $\Phi(G, S)$ 为 G 对 S 的根系(见§2.4), $\alpha \in \Phi(G, S)$. 设

$$\Phi_\alpha = \{ \beta \in \Phi(G, T) \mid \beta|_s = n_\beta \alpha, n_\beta \text{ 为正整数} \}.$$

由所有 $U_\beta^{(T)}$, $\beta \in \Phi_\alpha$ 所生成的 G 的子群我们记之为 $U_\alpha^{(s)}$ 或 U_c .

假若 k 是一个非 Archimedes 完备的赋值域则利用 k 的赋值, k 可看成一个滤群. 这样利用 θ_α , $U_\alpha(k)$ 也是一个滤群. 有了这个滤结构 (filtration), Tits 几何的内容 便更丰富. 这时 Tits 便以 Bruhat-Tits 所代替. 为了简单起见, 我们现在还假设 G 是 k -裂的单连通单代数群.

设 V 为一有限维 Euclid 空间; 以 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 记 V 上的内积. 设 A 为一个以 V 为向量部份的仿射空间, 以 F 记 A 上的所有仿射线性映射. 这样 $f: A \rightarrow \mathbb{R} \in F \iff$ 存在 $Df \in V$ 使 $f(x+v) = f(x) + \langle Df, v \rangle, x \in A, v \in V$. 对 $f, g \in F$, 定义 $\langle f, g \rangle$ 为 $\langle Df, Dg \rangle$, 若 $f \in F$ 不是恒等映射, 则设 $h_f = \{ x \in A \mid f(x) = 0 \}$, $f^v = \frac{2f}{\langle f, f \rangle}$ 及 $w_f: A \rightarrow A: x \mapsto x - f^v(x)Df$.

定义 如果下面条件成立, 则称 F 的子集 \mathcal{D} 为一个仿射根系 (见 [39])

- (1) F 可以由 \mathcal{D} 生成, \mathcal{D} 不包含恒等映射,
- (2) 对所有 $a \in \mathcal{D}$, $w_a(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$,
- (3) 对 $a, b \in \mathcal{D}$, $\langle a, b^v \rangle \in \mathbb{Z}$ (整数环),
- (4) 以 $W(\mathcal{D})$ 记由 $w_a, a \in \mathcal{D}$ 所生成的群. 若 K_1, K_2 为 A 的紧子集, 则集

$$\{ w \in W(\mathcal{D}) \mid w(K_1) \cap K_2 \text{ 非空集} \}$$

为有限集.

例 在 $V = X^*(T) \otimes \mathbb{R}$ 内取一对 Weyl 群 W 不变的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 把 V 看作一个仿射空间, 记之为 A . 对 $a \in \Phi(G, T), n \in \mathbb{Z}$ 设

$$\alpha + n: A \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \langle \alpha, x \rangle + n,$$

则 $\mathcal{D} = \{ \alpha + n \mid a \in \Phi(G, T), n \in \mathbb{Z} \}$ 为仿射根系. 称 $W(\mathcal{D})$ 为 $\Phi(G, T)$ 的仿射 Weyl 群.

在 G 内取一个包含着 T 的 Borel 子群. 这样便决定了单根系 $\Delta(G, T)$ (即 $\Phi(G, T)$ 的一个基). 在集

$$A - U_{\alpha \in \mathcal{D}} h_\alpha \text{ 中有一连通分支 } C, \text{ 使 (1) } 0 \in C,$$

(2) $C \subseteq \{ x \in V \mid \text{对 } a \in \Delta(G, T), a(x) > 0 \}$. 这时便有 $\Pi \subseteq \mathcal{D}$ 使 $C = \bigcap_{a \in \Pi} \{ x \in A \mid a(x) > 0 \}$.

设 $\omega: k \rightarrow \mathbb{Z}$ 为 k 的赋值 (记 $\omega(o) = +\infty$), $a \in \Phi(G, T)$, 设 $U_{\alpha+n} = \theta_\alpha(\omega^{-1}[n, \infty])$

$$H = \{ t \in T(k) \mid \text{对 } \lambda \in \hat{T}, \omega(\lambda(t)) = 0 \},$$

$$N = N_c(T)(k),$$

并以 B 记由 H 及 U_α (其中 $a \in \mathcal{D}, a|_c \geq 0$) 所生成的 G 的子群. 可以证明存在一个同构

$$\nu: N/B \cap N \rightarrow W(\mathcal{D}). \text{ 若设 } R = \nu^{-1}(w_a, a \in \Pi),$$

则 $(G(k), B, N, R)$ 是一个 Tits 系统. 在这个情形下, 术语是略有改变. 我们叫 B 的任一共轭子群做 G 的 Iwahori 子群. 若子群 $P \subseteq G, P$ 包含着一个 Iwahori 子群, 则称 P 为一个

Parahoric子群。任一Parahoric子群 P 唯一决定一个集 $F(P)$ 满足以下条件：(1) $F(P) \subseteq \bar{C} \setminus C$, (2) 存在一个集 $R(P) \subseteq R$, 对 $x \in F(P)$, $w \in R(P)$, $w(x) = x$, (3) 存在 $g \in G(k)$ 使 $gPg^{-1} = BW_P B$, 其中 W_P 为由 $R(P)$ 所生成的 $N/B \cap N$ 的子群。

G 的 Bruhat-Tits 厦是

$$\mathcal{B} = \{ (P, x) \mid P \text{ 为 Parahoric 子群, } x \in F(P) \}.$$

我们使 G 作用在 \mathcal{B} 上如下: $g \in G(k), g(P, x) = (gPg^{-1}, x)$. 设 $\mathcal{A}(P) = \{ (P, x) \mid x \in F(P) \}$,

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{w \in N/B \cap N} \bigcup_{P \supseteq wBw^{-1}} \mathcal{A}(P),$$

则可证明存在一匹满映射 $j: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_0$ 及 $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G(k)} g \mathcal{A}_0$ 常称 $\mathcal{A}(p)$ 为 \mathcal{B} 的房 (chamber), $g \in \mathcal{A}_0$ 为 \mathcal{B} 的 apartments.

Bruhat-Tits 厦的理论除了本身内容丰富之外还对其他数学问题有用: 比如 $G(k)$ 的调和分析, Shimura 簇的 ζ -函数的计算等。

4. 代数群分类

在这一节我们只考虑半单代数群

4.1 在代数封闭域上的分类

这是 Chevalley [8] 的工作, 他把 Cartan 等人关于复半单李代数的工作推到代数群去。

称一个同态 $\varphi: G \rightarrow H$ 为一个同生 (isogeny), 如果 G, H 均是维数一样的连通群, 而且 φ 的核为 O 维的, 再者若 φ 的核在 G 的中心内, 则称 φ 为一个中心同生 (central isogeny). 这时叫 G 做 H 的中心覆盖, 以 \tilde{G} 表示 G 的极大中心覆盖, 设 $\mathcal{H} = \{ H \mid G \text{ 为 } H \text{ 的中心覆盖} \}$, 以 \bar{G} 表示 \mathcal{H} 中最小的群. 称 \tilde{G} 为 G 的单连通覆盖, \bar{G} 为 G 的伴随群 (adjoint group).

半单群分类可以化为单连通群的分类及中心同生的分类. 每一个单连通群可以唯一的写成概单群 (almost simple group, 即 G 有一个有限的中心 C 使 G/C 为一单群) 的积, 而概单群的分类就好象单李群一样, 每个概单代数群 G 是由它的根系的 Dynkin 图表 $Dyn(G)$ 决定, 我们有以下几类:

$$A_n : SL_{n+1},$$

$$C_n : Sp_{2n},$$

$$B_n, D_n : \text{正交群},$$

$$E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 : \text{例外群}.$$

4.2 GALOIS 上同调

假定 G 是群, A 是个 G -群²⁾. 对 $s \in G, a \in A$ 我们以 ${}^s a$ 表示算子 s 对 a 作用, 我们以 $H^0(G, A)$ 或 A^G 表示以下的群:

$$\{ a \in A \mid \text{对所有 } s \in G, {}^s a = a \}.$$

我们称一个由 G 到 A 的映射 $s \mapsto a_s$ 为一个由 G 到 A 的 1-上闭链 (1-cocycle), 如果这映射满足以下条件:

$$\text{对任意 } s, t \in G, \quad a_{st} = a_s \cdot {}^s a_t,$$

我们说两个 1-上闭链 $(a_s), (b_s)$ 是等价的, 如果存在一个 $c \in A$, 使 $b_s = c^{-1} a_s c$, 对所有 $s \in G$ 都成立. 这等价关系把所有由 G 到 A 的 1-上闭链分成等价类, 以 $H^1(G, A)$ 表示这些等价类所组成的集合; 以 $Z^1(G, A)$ 表示所有由 G 到 A 的 1-上闭链.

$$\text{设 } A \text{ 是 } G\text{-群, } B \text{ 是 } H\text{-群, } f: A \rightarrow B, g: H \rightarrow G$$

是同态并满足条件:

$$f({}^{g(s)} a) = {}^s(f(a)), \quad s \in H, a \in A,$$

则可定义一个映射 $Z^1(G, A) \rightarrow Z^1(H, B); (a_s) \mapsto (b_s)$ 其中 $b_s = f(a_{g(s)})$. 这映射诱导到一个由 $H^1(G, A)$ 到 $H^1(H, B)$ 的映射. 一般情形下, $H^1(G, A)$ 并不是一个群, 但我们以包含 1-上闭链 $(a^{-1} \cdot {}^s a)$, $a \in A$ 的等价类为 $H^1(G, A)$ 的单位元, 这样便可定义映射 $H^1(G, A) \rightarrow H^1(H, B)$ 的核, 可以证明从 G -群的正合序列: $1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 1$, 可以得出一个新的正合序列:

$$1 \rightarrow H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, B) \rightarrow H^0(G, C) \rightarrow H^1(G, A) \rightarrow H^1(G, B) \rightarrow H^1(G, C).$$

4.3 k-形

设 k 为一完全域, \bar{k} 为 k 的代数封闭, $Gal(\bar{k}/k)$ 为 \bar{k}/k 的 Galois 群. 如果 $Gal(\bar{k}/k)$ 作用在 A 上, 我们把 $H^i(Gal(\bar{k}/k), A)$ 简写成 $H^i(k, A)$.

设 G, G' 为定义在 k 上的代数群, $f: G \rightarrow G'$ 为定义在 k' 上的同构. 称 G' 为 G 的一个 k -形 (k -FORM). 对 $s \in Gal(k'/k)$, 以 ${}^s f(a) = {}^s(f(s^{-1}a))$ 定义 ${}^s f: G \rightarrow G'$, 则 $s \rightarrow a_s = f^{-1} \cdot {}^s f$ 为 $Z^1(k, Aut G)$ 中的元素. 不难证明, G 的两个 k -形 G', G'' 在 \bar{k} 上同构当且仅当它们所定义的 1-上闭链为等价. 反过来, 对 $(a_s) \in Z^1(k, Aut G)$ 可以造一个 G 的 k -形 G' 及 $f: G \rightarrow G'$ 使 G 所定义的 1-上闭链 $a_s = f^{-1} \cdot {}^s f$ (参 Satake [27], p20, 29). 事实上, G' 作为一个集合可看作 G , f 作为一恒等变换, 这时 $Gal(\bar{k}/k)$ 在 G' 上的作用是: ${}^s(f(g)) = f(a_s \cdot {}^s g)$. 这样, G 的 k 形的同构类是与 $H^1(k, Aut G)$ 成一一对应. 所以我们要分类定义在 k 上的代数群只要 (1) 分类在 \bar{k} 上定义的代数群与 (2) 计算 $H^1(k, Aut G)$. 第 (1) 部分已在 § 3.1 解决了.

如果半单代数群 G 内存在一个在 k 上分裂的最大 k -坏面, 则我们说 G 在 k 上分裂 (k -split), 又叫 G 做 Chevalley 群. 如果 G 内存在一个 k 上定义的 Borel 群, 则说 G 是拟分裂 (quasi-split), 又叫 G 做 Steinberg 群.

设 G 为 k 上的 Chevalley-group, \bar{G} 为 G 的伴随群, $Sym(G)$ 是 $Dyn(G)$ 的对称变换群, 则有分裂正合序列:

$$1 \rightarrow \bar{G} \rightarrow Aut(G) \rightarrow Sym(G) \rightarrow 1$$

及上调序列

$$H^1(k, \bar{G}) \rightarrow H^1(k, Aut(G)) \xrightarrow{\circ} H^1(k, Sym(G)) \rightarrow 1.$$

对 $\alpha \in H^1(k, Sym(G))$, $\varphi^{-1}(\alpha)$ 内存在 G 的一个拟分裂 k -形 G_α ; 而且任一 $\varphi^{-1}(\alpha)$ 内的拟分

裂 k -形必与 $G_a k$ -同构。再者, $\varphi^{-1}(a)$ 的元素相对于满足以下条件的 G 的 k -形 G' : 存在一个 \bar{k} 上的同构 $f: G_a \rightarrow G'$ 使 $f^{-1} \circ s \circ f$ 为 G_a 的内自同构, 其中 $s \in Gal(\bar{k}/k)$ 。反过来, 设 G 的类型是 X_y (比如是 A_n 等), G' 是 G 的一个 k -形。 G' 决定 $H^1(k, Aut G)$ 的一个元素 a 。因为 G 在 k 上分裂, 故 $Gal(\bar{k}/k)$ 在 $Dyn(G)$ 的作用恒等于1, 所以 $\varphi(a)$ 是一个 $Gal(\bar{k}/k) \rightarrow Sym(G)$ 的同态。以 L 表示 $\varphi(a)$ 的核所固定的域。设 $z = [L:K]$ 。则我们说 G' 的类型为 2X_y 。

我们称绝对概单连通群 G^s 为典型群, 若 G 是属于以下任一类型: $A_n, {}^2A_n, B_n, C_n, D_n, {}^2D_n$ 。称半单群 G 为典型群, 若 \tilde{G} 可写成为绝对概单连通典型群的积, 关于典型群可看[11],[12]。

4.4 指标

在域 k 上定义的既约代数群的基本理论可分为3个情形来讨论: k 为代数封闭域, k 为任意域及 k 为局部紧域。每个情形又可分为3个部分: 结构, 分类和表示。每一个部分都与群所决定的根资料(root datum, 见[29],[9])有密切关系。根资料决定一个根系, 当 k 分别是代数封闭域任意域, 局部紧域时, 相对的便有绝对根系(如§4.1)有理根系(如§4.2), 仿射根系(如§3.3)。比如要考虑分类问题我们就有以下各情形

k	为分类用的资料
代数封闭域	根资料
任意域	根资料 + 指标
局部紧非阿基米德赋值域	根资料 + 局部指标

我们不能用这短短的篇幅介绍这些结果, 关于指标(index), 读者可看Tits的作品[40], 至于局部指标(local index), 则见于Tits[41]。

5. 离散子群

5.1 算术子群

非零的整数集 Z^x 是 $|\mathbb{R}^x = GL(1, |\mathbb{R})$ 的离散子群。整数有很多丰富的算术性质。我们可以问, 如果把 $GL(1, |\mathbb{R})$ 换作 $GL(n, |\mathbb{R})$, Z^x 换作 $GL(n, Z)$, 有什么算术性质可以推广到 $GL(n, Z)$? 或若更一般的, 考虑一个整体域 k , 即 k 为代数数域或是 $\mathbb{F}_q(X)$ 的一个有限扩张, V 为 k 的所有赋值。对 $v \in V$ 令 k_v 为 k 对 v 的完备化, θ_v 为 k_v 的整数环。设 S 为 V 的一个包括 k 的所有无限赋值的有限子集, 令

$$\theta(S) = \{ x \in k \mid \text{对所有 } v \notin S, x \in \theta_v \}.$$

令 G 为一定义在 k 上的线性代数群, $G(k)$ 为 G 的 k -有理点。称子群 $\Phi \subset G(k)$ 为 S -同余子群, 如果存在一个定义在 k 上的匹表示 $\rho: G \rightarrow GL(n)$ 及 $\theta(S)$ 的一个理想 $\hat{n} \neq 0$ 使群

$$\Phi' = \{ x \in G(k) \mid \rho(x) \in GL(n, \theta), \rho(x) \equiv 1 \pmod{\hat{n}} \}$$

为 Φ 的一个有限指数子群。称子群 $\Psi \subset G(k)$ 为 S -算术子群, 如果存在一个 S -同余子群 Φ 使 $\Phi \cap \Psi$ 同时为 Φ 及 Ψ 的有限指数子群。令 $i_v: k \rightarrow k_v$ 为 k 嵌入 k 的完备化 k_v , $G_\infty = \prod_{v \in S} G(k_v)$,

Φ 为一 S -同余子群, 或 S -算术子群. 则同态

$$i: \Phi \rightarrow G_\infty: x \mapsto (i_{v_1}(x), i_{v_2}(x), \dots)$$

的象 $i(\Phi)$ 为 G_∞ 的一个离散子群.

5.2 几个关于离散子群的问题

在一般的情形下, 我们有一个局部紧群 G . Γ 为 G 的一个子群. 称 Γ 为 G 的一个格(lattice), 如果 Γ 为 G 的一个离散子群及 G/Γ 有一个有限不变测度. 称 Γ 为 G 的一个一致子群(uniform subgroup), 如果 G/Γ 为紧的. 关于李群的离散子群有以下几个重要的问题:

(一) 在什么情形下一个格为一个一致子群?

(二) 整体刚性问题(global rigidity): 设 G, G' 为李群, Γ 为 G (Γ' 为 G')的一个格, $\varphi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ 为一同构, 在什么情形下 φ 可以扩展为 $\Phi: G \rightarrow G'$ 的同构?

(三) 局部刚性问题(local rigidity): 设 G 为一连通李群, Γ 为 G 的一个格, $R(\Gamma, G)$ 为所有由 Γ 到 G 的同态的集合. 我们给以 $R(\Gamma, G)$ 点态收敛拓扑(Topology of pointwise convergence). 对 $g \in G, u \in R(\Gamma, G)$, 我们用

$$u^g(x) = g \cdot u(x) \cdot g^{-1}, \quad x \in \Gamma$$

来定义 $u^g \in R(\Gamma, G)$. 这样我们得到了 G 在 $R(\Gamma, G)$ 上的一个连续作用. 称 $u \in R(\Gamma, G)$ 为局部刚性, 如果 u 的轨道 u^G 为 $R(\Gamma, G)$ 的一个开集. 令 Ad 为 G 在其李代数 \hat{g} 上的伴随表示, 则A. Weil[35]证明了: 如果上同调群 $H^1(\Gamma, Ad \circ u) = 0$, 则 u 为局部刚性的. 所以局部刚性问题就变成问: 在什么情形下 $H^1(\Gamma, \rho) = 0$? (其中 ρ 为 Γ 的一个表示)

(四) 算术性(arithmeticity)问题: 设 G 为定义在整体域上的一个线性代数群, Γ 为 G_∞ 的一个格, 在什么情形下存在一个 G 的 S -算术子群 Φ , 使 $i(\Phi) = \Gamma$.

(五) 同余子群(Congruence subgroup)问题: G 如(四)中, 我们可以把 G 所有的 S -同余子群看作 $G(k)$ 的单位元1的基本领域组, 这样便得到了 $G(k)$ 上的一个拓扑 $\mathcal{A}(c)$ 使 $G(k)$ 为一拓扑群. 令 $\hat{G}(s, c)$ 为 $G(k)$ 对拓扑 $\mathcal{A}(c)$ 的完备化. 同样, 如果我们以 S -算术子群代替 S -同余子群, 我们得到了 $\hat{G}(s, a)$. 明显有个满映射 $\pi(S): \hat{G}(S, a) \rightarrow \hat{G}(S, c)$. 设 $C(S, G)$ 为 $\pi(S)$ 的核. 同余子群问题就是要找出 $C(S, G)$ 的结构. 比如: $C(S, G) = 1$ 即就是说 G 的每一个 S -算术子群为一 S -同余子群.

(六) 设 G 如(四)中, K 为 G_∞ 的一个最大紧子群. 令 $X = G_\infty/K_\infty$ 则 G 的任一个离散子群 Γ 左作用在 X 上. 求作出 $\Gamma \backslash X$ 的显基本域及其紧化.

(七) 设 G 为一李群, Γ 为 G 的一个离散子群, 求作出 G 在 $L^2(\Gamma \backslash G)$ 的正则表示的谱分解及所谓Selberg迹式的显式.

5.3 以上问题的解答

目前大致上有以下的结果:

(i) 如 G 为幂零李群, (一), (二)为Malcev[17]所解决.

(ii) 如 G 为可解李群, (一), (二), (四)为Mostow[19], [20]解决.

(iii) 如 G 为半单李群, (二)为Mostow[21]解决; (三) (当 $\Gamma \backslash G$ 为紧时)为Weil[34]

解决; (七) Langlands [16] 推广了 Selberg [30] 的结果, 利用 Eisenstein 级数解出连续谱, 而离散谱仍是一个迷, Arthur [1] (在光滑紧支集情形) 给出了 Selberg 迹式的显式。

(iv) 如 G 为半单代数群, (一) 为 Mostow-Tamagawa [22] 及 Borel-Harishchandra [6] 解决; (四) 为 Margulis [18] 解决; 关于 (五); Serre [26] 解决 $SL(2)$ 的情形, Bass-Milnor-Serre [2] 解决了 $SL(n), Sp(2n)$ 的情形, Kneser [14, V] Eisenstein [32] 解决了一些正交群的情形, Raghunathan [25] 解决了 k -秩 ≥ 2 的部分情形; 关于 (六): Borel [4] 推广了 Siegel 的二次形约化理论从而作出了显基本域; 关于 $\Gamma \backslash X$ 的紧化有 Satake [28], Bailey-Borel [3] 及 Mumford [24] 的结果。

后记: 要学代数群可看一本教科书: Humphreys J.E., Linear Algebraic Groups, Springer Verlag, 1975. Demazure [9] 关于群概形的一套书可供参考, 关于离散群有 Borel [4] 及 Raghunathan M.S., Discrete Subgroups of Lie Groups, Springer Verlag 1972 (这书俄文译本比英文原著多了好些结果)。

香港中文大学余伟权及广州中山大学黎百恬、马麟浚帮助整理本文。

注:

- 1) 关于代数几何的术语请参看 [15]。
- 2) 参熊全淹, 近世代数学, 上海科技出版社, § 5.1。
- 3) (absolutely almost simple simply connected group) 即是说 $G \otimes_{\mathbb{k}} \bar{\mathbb{k}}$ 为一概单群及 $\tilde{G} = G$ 。
- 4) 根系的定义参看 [32]; 不过这里, 若 $\alpha, \lambda\alpha$ 都同属于一个根系; 我们是容许 $\lambda = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ 或 ± 2 。所以除了缩减根系之外还一系列不可约非缩减根系 BC_n , [5] p12。

参考文献

- [1] Arthur J., A trace formula for reductive groups, I, \mathbb{F} , (to appear).
- [2] Bass H., Milnor J., Serre J-P., Solutions of the congruence subgroup problem, *Publ. Math. IHES*, 33(1967), 59-137.
- [3] Baily W. L., Borel A., Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.*, 84(1966), 442-528.
- [4] Borel A., Introduction aux groupes arithmétiques, Paris, Itermann, 1969.
- [5] Borel A., Linear Algebraic Groups, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 9(1966), 3-19.
- [6] Borel A., Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.*, 75(1962), 485-535.
- [7] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local, *Publ. Math. IHES*, 41(1972), 5-252.
- [8] Chevalley C., Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques, Paris, Ecole Normale Sup., 1956-58.
- [9] Demazure M., Grothendieck A., Schémas en Groupes, Springer Lecture Notes Math., 151, 152, 153(1970), Springer.
- [10] Humphreys J. E., Hilbert 14th Problem, *Amer. Math Monthly*, 1978, 341-353.
- [11] 华罗庚、万哲先, 典型群, 上海科技出版社, 1963.
- [12] Kneser M., Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.
- [13] Kneser M., Semisimple algebraic groups, in Algebraic Number Theory, ed. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Thompson, 1967.
- [14] Kneser M., Normal subgroups of integral orthogonal groups, Springer Lecture Notes 108, Springer Verlag.
- [15] 黎景輝, 代数簇引导, 厦門大学学报(自然科学), 18(1979), 4.
- [16] Langlands R P., Eisenstein series, Springer Lecture Notes, 544(1976).
- [17] Malcev A. I., On a class of homogeneous spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 39(1951).
- [18] Margulis G. A., On the arithmeticity of discrete subgroups, *Soviet Math. Dokl.*, 10(1969), 900-902.
- [19] Mostow G. D., Factor spaces of solvable groups, *Ann. of Math.*, 60(1954), 1-27.
- [20] Mostow G. D., Cohomology of topological groups and solvmanifolds, *Ann. of Math.*, 73(1961), 20-48.
- [21] Mostow G. D., Strong Rigidity of Riemannian Space, *Annals of Math. Studies*.
- [22] Mostow G. D., Tamagawa T., On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, *Ann. of Math.*, 76(1962), 440-463.
- [23] Mumford D., Abelian varieties, Oxford University Press.

- [24] Mumford D., Smooth compactification of locally symmetric varieties, *Math. Sci. press*, 1975.
- [25] Raghunathan M. S., On the congruence subgroup problem, *Publ. Math. IHES*, 46().
- [26] Serre J-P., Le Problème des groupes de congruence pour SL_2 , *Ann. of Math.*, 92 (1970), 439—527.
- [27] Satake I., Classification theory of semi-simple algebraic groups, Marcel Dekker Inc., 1971.
- [28] Satake I., On compactifications of quotient spaces, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 555—580.
- [29] Springer T. A., Algebraic groups, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 33 (1979), 1, 3—28.
- [30] Selberg A., Harmonic analysis and discontinuous groups, *J. Indian Math. Soc.*, 20(1956).
- [31] Tits J., Buildings of Spherical Type and Finite BN Pairs, Springer Lecture Notes, 386(1974).
- [32] Vasserstein L.I., Subgroups of finite index in Spin groups. *Mat. Sbornik*, 75(1968), 178—184.
- [33] 万哲先, 李代数, 科学出版社, 1964.
- [34] Weil A., Variétés abéliennes, Hermann, Paris.
- [35] Weil A., Discrete Subgroups of Lie groups, *Ann. of Math.*, 72(1960), 369—384; 75(1962), 578—602; 80(1964), 149—157.
- [36] 严志达, 李群和微分几何, 人民教育出版社, 1960.
- [37] Rosenlicht M., Some basic theorems on algebraic groups, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 401—443.
- [38] Haboush W. J., Reductive groups are geometrically reductive, *Ann. of Math.*, 102(1975), 68—83.
- [39] Macdonald I. G., Affine Root Systems and Dedekind's η -Function, *Inventiones Math.*, 15(1972), 91—143.
- [40] Tits J., Classification of algebraic Semisimple groups, *Proc. Sym. Pure Math. AMS*, 9(1966), 33—62.
- [41] Tits J., Reductive groups over local fields, *Proc. Sym. Pure Math. AMS*, 33(1979), Part I, 29—69.
- [42] Borel A., Serre J-P., Corners and arithmetic subgroups, *Comm. Math. Helv.*, 48(1973), 436—491.
- [43] Borel A., Tits J., Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t287(1978), A-55-57.