

· 綜 述 ·

Hilbert 第12个问题：互反律及 Langlands 的猜想

黎 景 辉

(香港中文大学)

引 言

Hilbert[24]在1900年提出23个数学问题，其中第12个问题至今未被解决，本文介绍在引入代数几何、自守形及调和分析的方法后，关于这个问题的¹⁾工作进展，并提出有关的参考资料。

1.1 Hilbert 第12个问题

设 F 是代数数域，问：怎样刻画 F 的交换扩张？这是Hilbert的第9个问题，我们基本上，已知这一问题的答案是类域论 (CLASSFIELD THEORY)¹⁾ 的主要内容，其中心定理是互反律 (RECIPROCITY LAW)：

定理 代数数域的交换ARTIN L -函数都是HECKE L -函数²⁾。以 F^{ab} 记 F 的极大交换扩张， A_F^x 记 F 的乘值量群 (IDÈ LEGROUP)³⁾， C_F 记 F 的(乘值量)类群 A_F^x / F^x ，

C_F^0 记 C_F 的单位元的连通分支，则从以上定理可以证明存在同构⁴⁾：

$$(1.1) \quad [\cdot] C_F / C_F^0 \longrightarrow Gal (F^{ab} / F)$$

其中 $Gal (F^{ab} / F)$ 是扩张 F^{ab} / F 的 Galois 群。根据Galois 理论，利用这个同构就可以找到 F 的任一个交换扩张 E / F 的 Galois 群，也可以说是找到了 E 。不过这个同构并没有给出 E 的明显构造方法。

当 F 是有理数数域 \mathbf{Q} 时，类域论告诉我们⁵⁾

$$\mathbf{Q}^{ab} = \mathbf{Q} (e_N (1))_{N \in \mathbf{Z}_+^x}.$$

这就是说 \mathbf{Q} 的极大交换扩张是由1的 N 次根 $e_N(1) = \exp \frac{2\pi i}{N}$ 所生成 (\mathbf{Z}_+^x 是指正整数集)。而上面的同构(1.1)则是⁶⁾对 $s \in A_{\mathbf{Q}}^x$ ，

$$(1.2) \quad e_N(1)^{(s)} = e_N(s^{-1}).$$

请注意两点：(一) $e_N(1)$ 只不过是指数函数的特殊值；(二)以上的(1.2)是一个明显的互反律。

Hilbert 的第12个问题可以表述为：如果把 \mathbf{Q} 换为任意的代数数域 F ，可否找到一

些解析函数 f 使在某些点的值生成 F 的极大交换扩张 F^{ab} . 进一步, 我们要求有像(1.2)的明显互反律 (explicit reciprocity law).

1.2 椭圆模函数

\mathbf{Q} 以外的最简单代数数域就是二次扩张, 当 K 是虚二次扩张⁷⁾时, Hilbert 的第12个问题早在本世纪初由 Kronecker, Weber, Takagi 及 Hasse 等人的工作解决了. 这时我们用椭圆模函数代替指数函数.

设 L 为 \mathbf{C} 内的格, 以 $j(L)$ 记椭圆曲线 C/L 的 j -不变量, 以 $f_{a,b,N}^k(L)$ ($k=1, 2, 3$) 记 Weber—Fricke 函数⁸⁾ (我们假设 $\Delta(L) \neq 0$ 及 $(a, b) \neq (0, 0) \pmod N$). 椭圆曲线的 n 阶点的坐标可由 Weber Fricke 函数算出. 对 z 在上复半平面内, 以 $\langle z \rangle$ 记格 $z \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, 则 j 和 $f_{a,b,N}^k$ 可看成上复半平面上的函数: $j(z) = j(\langle z \rangle)$, $f_{a,b,N}^k(z) = f_{a,b,N}^k(\langle z \rangle)$. 这样 j 是一个一阶的模函数而 $f_{a,b,N}^k$ 是 N 阶的模函数⁹⁾.

现设 F 是虚二次扩张. 固定 F 内的一个分式理想 I . 可以把 I 看成 \mathbf{C} 内的格. 设 $2k$ 是椭圆曲线的自同构群的阶. 则由类域论可推出:

$$(1.2) \quad F^{ab} = F(j(\mathcal{O}), f_{a,b,N}^k(\mathcal{O})) \quad a, b \in \mathbf{Z} \quad \mathbf{N} \in \mathbf{Z}_+^*$$

(其中 $(a, b) \not\equiv (0, 0) \pmod N$). 而且有以下的互反律, 对 $s \in \mathbf{A}_F^*$,

$$j(\mathcal{O})^{(s)} = j(s^{-1} \mathcal{O})$$

$$f_{a,b,N}^k(\mathcal{O})^{(s)} = (f_{a,b,N}^k)^{v(s^{-1})}(\mathcal{O})$$

($v(s^{-1})$ 的定义在注10.)³³⁾

这一个虚二次扩张的理论有四个部份:

- (一) 定义在上复半平面上关于 $SL(2)$ 的同余子群的模函数;
- (二) 虚二次扩张 F/\mathbf{Q} ;
- (三) 由 F 的理想所决定在上复半平面内 $GL(2, \mathbf{Q})_+$ 的子群的不动点;
- (四) 椭圆曲线及它的自同态环和 N 阶点.

这显然只是一个一维的情形, 在高维数的情形, Shimura[42], Deligne[14]把以上四个部份分别推广如下:

- (一) 定义在有界对称域 H 上, 关于代数群 G 的算术子群¹¹⁾的自守函数;
- (二) 代数数域;
- (三) $G(\mathbf{Q})$ 的离散子群在 H 内的不动点;
- (四) 交换簇的 PEL 结构¹²⁾, 或 Hodge 结构.

当 G 是典型群的时候, 问题已解决了. 对于一般的代数群, 这问题仍未解决³⁴⁾.

1.3 Shimura 簇

本节简单介绍 Shimura 的结果.¹³⁾

设 F 是全实代数数域¹⁴⁾, B 是 F 上的全不定¹⁵⁾四元数代数, I 是 B 的主对合, G 是定

义在有理数域 \mathbf{Q} 上的代数群, G 的有理点是

$$G(\mathbf{Q}) = \{ a \in GL(n, B) \mid a \cdot {}^t a' = v(a) \cdot 1 \}$$

其中 ${}^t a$ 是转置, $v: G \rightarrow F^\times$ 是同态. 设

$$G^u = \{ a \in G \mid v(a) = 1 \}.$$

取 $G^u(\mathbf{R})$ 的一个极大紧子群 K . 则有界对称域 $G^u(\mathbf{R})/K^{(16)}$ 与 H_n^g 同构, 其中 $g = [F; \mathbf{Q}]$ (F 的次数), H_n 是 n 次 Siegel 上半空间¹⁷⁾. 以 $G(\mathbf{A})$ 记 G 的加值量点¹⁸⁾, G_0 记 $G(\mathbf{A})$ 的有限部份, $G_{\infty+}$ 记 $G(\mathbf{A})$ 无限部份包含单位元的连通分支, 对 G_0 的任一个开紧子群 S_0 . 我们考虑 $G(\mathbf{A})$ 的子群 $G_{\infty+} \cdot S_0$. 以 Z 记由这些 $G(\mathbf{A})$ 的子群所组成的集合.

Shimura 证明: (i) 对每一个 $S \in Z$, 存在一个关于 $\Gamma_S = G(\mathbf{Q}) \cap S$ 的自守函数 f_S , 使这个函数诱导出一个双正则同构 $H_n^g / \Gamma_S \rightarrow V_S$, 其中 V_S 是似投影簇¹⁹⁾; (ii) 对 $S, T \in Z$, 若有 $x \in G_{\infty+} \cdot G_0$ 使 $xSx^{-1} \subset T$, 则有簇同态 $J_{TS}(x): V_S \rightarrow V_T^{\sigma(x)}$ ²⁰⁾.

在 H_n^g 内有一些特别点, 每一个这样的点都是 $G(\mathbf{Q})$ 的某一个子群的唯一不动点对.

任一特别点 z , Shimura 证明存出代数数域 P' , 这 P' 是由有限个全实域的虚二次扩张所合成, 而且对 $S \in Z$, 我们可证明

(iii) $P'(\varphi_S(Z))/P'$ 是交换扩张, (iv) 存在映射 $e: P'^{\times} \rightarrow G$

$$\text{使, 对 } u \in \mathbf{A}_{P'}^{\times}, \varphi_T(z)^{(u)} = J_{TS}(e(u)^{-1})\varphi_S(z)$$

这里的 (iii) 是相对于上一节的公式 (1-2), 而 (iv) 可以看成互反律.

透过标准的化简步骤 (例如看 [42] I Prop 3.14), 只需要对适当的同余子群证明以上的结果, 而这时就可以借用 PEL 结构的模簇²¹⁾.

2.1 自守 L 函数

要推广 § 1.1 的定理, 可以先看怎样推广 Hecke L -函数. 设 χ 是 C_F 的特征标, 则 $\chi = (\chi_p)$, 其中 χ_p 是完备域 F_p 的特征标. 若 π 生成 F_p 的素理想, 则设 $\chi(p) = \chi_p(\pi)$. 这样 Hecke 的 L 函数是由以下公式定义:

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)(N_p)^{-s})^{-1}$$

其中 s 是复数. 以 O_F 记 F 的代数整数环, 则 N_p 是指环 O_F/p 的阶数. 可以证明: 当 $Re s > 1$ 时, $L(s, \chi)$ 是解析函数; $L(s, \chi)$ 可以延拓为半纯函数, 而且存在函数 $\varepsilon(s, \chi)$ 使 $L(s, \chi)$ 满足函数方程:

$$L(s, \chi) = \varepsilon(s, \chi)L(1-s, \chi^{-1})$$

([18] § 8.3) 显然 $F \setminus O$ 只不过是简单的代数群 $GL(1, F)$. 若把 $GL(1, F)$ 换为既约代数群¹¹⁾, 则相应于 χ 就是 G 的自守表示 π ²²⁾. 对 G 的 L 群¹²⁾ G (又称 associated group) 的有限维表示 r , Langlands [30] 用 Euler 积定义了 L 函数 $L(s, \pi, r)$ 并证明了当 $Re s$ 足够大时, $L(s, \pi, r)$ 绝对收敛. 同时还猜想 $L(s, \pi, r)$ 可以延拓为半纯函数, 而且存在函数 $\varepsilon(s, \pi, r)$ 使

$$L(s, \pi, r) = \varepsilon(s, \pi, r)L(s, \tilde{\pi}, r)$$

其中 $\widetilde{\pi}$ 是与 π 逆步的表示。这些猜想还未被解决，其部份的结果可看〔25〕、〔17〕、〔31〕。

2.2 局部 L 函数

G 的自守表示 π 是 $G(\mathbf{A})$ 的容许表示²³⁾。 π 可以写成限制张量积 $\otimes \pi_p$ ，其中 π_p 是 $G(F_p)$ 的容许表示，以上一节的 $L(s, \pi, r)$ 是局部L函数 $L(S, \pi_p, r_p)$ 的积，其中 $r = \otimes r_p$ 。本节讨论这些局部的L函数。假设 F 是局部域。

以 $\Pi(G(F))$ 记由 $G(F)$ 的不可约容许表示(的无限小等价类²⁴⁾)所组成的集合。设

$$\Pi(F) = \bigcup_{n \geq 1} \Pi(GL(n, F)).$$

则 $\Pi(F)$ 是交换范畴²⁵⁾ Langlands **猜想**: 假如可以用Tannaka对偶, 则有 \mathbf{C} 上既约代数群 $G_{\Pi(F)}$ 及匹满映射 $\Pi(GL(n, F)) \leftrightarrow Rep(G_{\Pi(F)})_n$, 其中 $Rep(G_{\Pi(F)})_n$ 是指 $G_{\Pi(F)}$ 的 n 维表示

的等价类所组成的集合²⁶⁾。以 $\Phi(G(F))$ 记所有 $Gal(\bar{F}/F)$ 上的容许同态²⁷⁾ $\varphi: G_{\Pi(F)} \rightarrow {}^L G$ 。

Langlands猜想: 存在满映射 $\Pi_G: \Pi(G(F)) \rightarrow \Phi(G(F))$ 使对 $\varphi \in \Phi(G(F))$, $\Pi_G^{-1}(\varphi)$ 内的

的表示为 L -不可辨别²⁸⁾这时, 若 $\pi \in \Pi_G^{-1}(\varphi)$ 则取 $L(s, \pi, r)$ 为Artin L -函数 $L(s, r \circ \varphi)$ ²⁹⁾。

2.3 L 同态

设 G 及 H 均为既约 F 群, G 为似裂群(quasi-split), 及 $u: {}^L H \rightarrow {}^L G$ 为 L -同态(〔7〕§15)。

设 $\pi = \otimes \pi_p$ 是 $H(\mathbf{A})$ 的不可约容许表示, $\widetilde{\pi} = \otimes \widetilde{\pi}_p$ 是 $G(\mathbf{A})$ 的不可约容许表示。若对每一个 p , 存在 $\varphi_p \in \Phi(H(F_p))$ 使 $\pi_p \in \Pi_H^{-1}(\varphi_p)$ 及 $\widetilde{\pi}_p \in \Pi_G^{-1}(u \cdot \varphi_p)$, 我们说 π 升为 $\widetilde{\pi}$ 这时便有 $L(s, \widetilde{\pi}, r) = L(s, \pi, r \circ u)$ 。以 $A(G/F)$ 记 $G(\mathbf{A})$ 的所有不可约自守表示的等价类。

Langlands**猜想**(〔7〕§17.1): 存在一个映射 $u^*: A(H/F) \rightarrow A(G/F)$ 使 π 升为 $u^*(\pi)$ 。

例如若取 $H = \{1\}$, $G = GL_n$ 。则当 $n = 1$ 时, 以上的猜想便是§1.1的定理, 当 $n = 2$ 时, 这个猜想是与Artin猜想等价(〔20〕)。又若设 E/F 为有限Galois扩张, H 为 F 裂群, $G = R_{H/F}H$, 则以上的猜想便是BASE CHANGE问题(部份的解答可看〔33〕)。又若取 $G = GL_2$, H 为 F 上的一个四元数代数的可逆元, 则这猜想已在〔25〕中解决。

3.1 Hasse-Weil ζ 函数

设 d 为 ≥ 1 的整数, X 为 $\mathbf{Z}[1/d]$ 上的光滑真概型³⁰⁾, 对素数 $p \nmid d$, X 在 p 的 ζ -函数可由以下公式决定:

$$\log Z_p(s, X) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} (\# X(\mathbf{F}_p^m))$$

其中 \mathbf{F}_p^m 是指只有 p^m 个元的域。除了有限个因子外, X 的Hasse-Weil ζ -函数 $Z(s, X)$ 是积 $\prod_{p \nmid d} Z_p(s, X)$ 。代数几何和数论的工作者一直对这个函数很有兴趣。〔48〕介绍这方面

的一些工作, 对任意光滑完备簇的 ζ -函数, 我们所知很少。假如 V 是§1.3中的代数簇, Langlands**猜想** V 的 ζ 函数, 除了有限个因子外, 是可以写成§2.1中的L函数的乘积³¹⁾。

3.2 Shimura簇的 ζ 函数.

取 F, B, G 如§1.3, 并设 $n=1$. 这时 ${}^L G$ 是半直积 $GL(2, \mathbf{C})^g \rtimes Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. 作表示

$\rho: {}^L G \rightarrow \bigotimes_1^g \mathbf{C}^2$ 如下: ρ 在 $GL(2, \mathbf{C})^g$ 上是对每一个因子的标准表示, ρ 在 $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 上是把

因子排列. Langlands[34]证明了以下的

定理 除了有限个因子外, V_s 的Hasse-weil ζ -函数是 $\Pi_\pi L(s-g/2, \pi, \rho)^{m(\pi)}$ 其中 π 为 G 的自守表示, 整数 $m(\pi) \geq 0$.

证明分三部份, 首先用代数几何学的方法算出 $\log Z(s, V_s)$ 的系数, 再用Selberg trace公式算 $L(s-g/2, \pi, \rho)$, 最后利用local orbit integrals(及Bruhat-Tits building的理论)来比较两边的结果^[32].

结语: 综上所述, 在引入调和分析([51], [49]), 自守函数([41], [25])和代数几何([11], [37])的方法后, 互反律是本世纪上半叶数论中的一项伟大成就, 它为更多更好的工作迈出了第一步. Langlands的猜想^[35]是今后的成果的轮廓.

注:

1) 关于类域论早期的历史可以看[21]. 目前讲类域论的教科书有[39], [3]都是用上同调群的方法.

(关于这方面用的上同调群可看[29]). [52]用代数语言(但基本上也是上同调群). 比较古典的(用理想的语言)有[22], [26].

2) 见[18]定理10-1-1和166页. 互反律有很多等价的说法, 这里讲的只不过是其中的一个, 关于ARTIN及HECKE的 L 函数, 请看以下第2.1段.

3) 见[52]第四章; [10].

4) 见[47] § 5.6; [10].

5) 见[52]Chap VIII § 4. 这原是KRONECKER的猜想. 首先由WEBER在1886年证出.

6) 在以下公式中 $e_N(s^{-1})$ 是这样算出来的: 对 $s = (s_p) \in \mathbf{A}_Q^{\times}$, 存在唯一的 $b \in \mathbf{Z}$ 使 $(b\mathbf{Z})_p = s_p^{-1} \mathbf{Z}_p$ 对所有 p 成立, 这时则做 $e_N(s^{-1})$ 为 $e_N(b) = \exp(\frac{2\pi i b}{N})$.

7) 即 $F = \mathbf{Q}(\sqrt{d^-})$, d 是一个没有平方因子的负整数.

8) 设 L 的基是 $\{\omega_1, \omega_2\}$. 定义

$$g_2(L) = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

$$g_3(L) = 140 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

$$\Delta(L) = g_2^3(L) - 27g_3^2(L)$$

$$\delta^\circ(Z, L) = \frac{1}{Z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(Z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

则

$$j(L) = \frac{1728g_2^3(L)}{\Delta(L)}$$

$$f_{a,b,N}^1(L) = \frac{g_2(L)g_3(L)}{\Delta(L)} \mathcal{G}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L\right)$$

$$f_{a,b,N}^2(L) = \frac{g_2(L)^2}{\Delta(L)} \mathcal{G}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L\right)^2$$

$$f_{a,b,N}^3(L) = \frac{g_3(L)}{\Delta(L)} \mathcal{G}\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L\right)^3$$

9) 这就是说：对 $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$, 设

$$\alpha(Z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

则

$$j(\alpha(Z)) = j(Z)$$

若

$$\alpha \in \Gamma(N) = \{ \alpha \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid \alpha \equiv 1 \pmod{N} \}$$

则

$$f_{a,b,N}^k(\alpha(Z)) = f_{a,b,N}^k(Z)$$

10) 在 I 内可找到一个基 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 使 $Z = \omega_1, \omega_2^{-1}$ 在上复半平面上, 则 $I = \mathbf{Q}(Z)$, $F \approx \text{End}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{C}/I)$. 利用公式

$$x\left(\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}\right) = q(x)\left(\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

及注意到 $xI \subseteq I$, 我们可以定义一个匹同态

$$q: F^x \longrightarrow GL(2, \mathbf{Q})_+$$

使 z 为 $q(F^x)$ 的固定点. 对 $s \in \mathbf{A}_F^x$, $q(s)$ 可以写成 rt , 其中 $r \in GL(2, \mathbf{Q})_+$, $t \in GL(2, \infty)_+ \cap GL(2,$

$\mathbf{Z}_p)$. 这样则存在 $\beta \in M_2(\mathbf{Z}) \cap GL(2, \mathbf{Q})_+$ 使

$$t_p \equiv \beta \pmod{N} \cdot M(2, \mathbf{Z}_p)$$

若 $(a, b)\beta = (c, d)$ 则设

$$\left(f_{a,b,N}^k\right)^{p(s)} = f_{c,d,N}^k$$

关于这一节的理论可以参看[41].

11) 代数群, 算术子群见[27].

12) 见[43].

13) 本节所讲的是[42] II 定理5.2的一个特殊情形, 我们把原来的定理适当的简化了, 希望容易明白.

14) 即 totally real algebraic number field, 意思是: 若 g 是 F 的次数, 则有 g

个各不相同的匹同态 $F \rightarrow \mathbf{R}$.

15) 即 $B \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{R} \approx G_2(\mathbf{R})^g$.

16) 参看[23]第VI, VIII章.

17) H_n 的元是 $n \times n$ 对称复矩阵 z , 并要求 $I_m z > 0$.

18) 即 adelic points of G , 见[53].

19) 由[4]知 H_n^g/Γ_s 是同构于似投影簇. 常称 V_s 为Shimura簇. Γ_s 是算术子群. 两篇介绍自守形的近代理论的文章是[5], [6].

20) 在这里 $\sigma(x)$ 是一个适当的Galois群内的元. 关于 V^σ 的定义可看[41]Appendix § 6.

21) 即 moduli variety, 见[43]. 我们讲一个例子. 设 e_i 是正整数满足条件 $e_{i+1} \equiv 0 \pmod{e_i}$. 又设

$$e = \begin{bmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{bmatrix}$$

对 $z \in H_n, a \in \mathbf{R}^{2n}$, 以 $f_z(a)$ 记复列向量 $(e z) a$ 则 $f_z: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{C}^n$ 为 \mathbf{R} -线性同构. 以 D_z 记 $f_z(\mathbf{Z}^{2n})$. 则 \mathbf{C}^n/D_z 是一个以 $E_z(x, y) = B(f_z^{-1}(x), f_z^{-1}(y))$ 为 Riemann 形的配极交换簇. 记它为 A_z . 现设

$$\Gamma = \{ T \in GL(2n, \mathbf{Z}) \mid {}^t T B T = B \}$$

若 $T \in \Gamma$ 及

$$P_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \quad P_e^{-1} \cdot {}^t T^{-1} \cdot P_e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

则 设 $T \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}$. 这样对 $z, w \in H_n, A_z$ 与 A_w 同构的充要条件是存在 $T \in \Gamma$ 使 $T \cdot z = w$. 于是 H_n/Γ 便可看成由 e 所决定的配极交换簇的模簇. 关于交换簇与数论可看两篇介绍性的文章[44], [46].

22) 见[6] § 4.6. 自守表示是 $G(\mathbf{A})$ 在 $G(\mathbf{A})$ 的自守形上的正则表示的 subquotient. 比如, 设为 G 的中心, x 为 $z(\mathbf{A}_F)/z(F)$ 的特征标及

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F))_x = \{ f \in L^2(G(F)z(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})) \mid f(zx) = f(z)f(x), x \in G(\mathbf{A}), z \in z(\mathbf{A}) \}$$

其中 L^2 是指平方可积函数, 则 $G(\mathbf{A})$ 在 $L^2(G(F) \backslash G(\mathbf{A}_F))_x$ 的 G -不变不可约闭子空间上的正则表示为自守表示.

23) 即 admissible representation. 可看[25]308页, [50] § 2, [9] § 1.5.

24) 这些表示都是无限维的表示. 关于无穷小等价见[51] § 4.5.5.

25) abelian category 见[19], [16], [45].

26) 这猜想见[32] § 2; Tannaka对偶见[38]第III章(特别是 § 1.1.1, 2.3.1, 3.2.2, 3.3.1).

27) 见[7] § 8.

28) L -indistinguishable 的条件见[7] § 10.3. 这个猜想是local class field 的推广, 事实上当 $G = GL(1)$ 时, 这就是local class field theory.

29) Artin L 函数见[13],[54],[2]. 我们是要适当地解释文中的 $L(s, r \circ \varphi)$. Weil 在推广 Artin 的 L 函数时引入一个拓扑群 W_F (现在称它为Weil群) 及同态 $\Psi: W_F \rightarrow Gal(\bar{F}/F)$ 以 G^c 记拓扑群 G 的交换子子群的闭包, 以 G^{ab} 记 G/G^c . 对任一有限扩张 E/F , 局部类域论的互反同态可以写为

$$E^x \rightarrow W_E^{ab} \rightarrow Gal(\bar{F}/F)$$

其中 $W_E = \Psi^{-1}(Gal \bar{F}/E)$. 当 $F = \mathbf{C}$ 或 \mathbf{R} 设 W_F^1 是 W_E 当 F 是 nonarchimedean 时, 设 W_F^1 是

$SL(2, \mathbf{C}) \times W_F$, 则存在一个由Weil Deligne群 WD_F 到 W_F^1 的同态把 $w \in W_F$ 映为:

$$\begin{pmatrix} |w|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times w.$$

这时 $\Pi(F)$ 就等价于由 W_F^1 的连续半单 \mathbf{C} 表示所组成的范畴. 并且还有同态 $G_{\Pi(F)} \longrightarrow Gal$

(\bar{F}/F) . 这就是说在Atren的 L -函数的定义中, 我们用 $G_{\Pi(F)}$ 代替了 Galois 群.

30) smooth proper scheme

31) 这个猜想只不过是一个更一般的猜想的特例. Grothendieck 引入 motif 这个概念 ([38] VI § 4, [36], [15]). 每一个 motif M 有一个 L -函数 $L(s, M)$, Deligne, Langlands, Sene, Tate 等人的猜想是:

$$L(s, M) = \prod_i L(s - a_i, \pi_i, r_i)$$

其中右边的是自守表示的 L 函数. 我们离开能够解决这样的猜想还很远, 过去的工作虽然提供很多例子, 但是还有很多工作要做. Langlands[32]和Deligne[14]的文章提出他们所遇到的困难和一些结果; § 1.1的定理及[28]中所讲的weil 猜想亦可以算是这个 motif 的猜想的特例, 总之一切有待各人努力!

32) 关于 selberg trace formula 可看[1], orbital integrals [40]及Bruhat—Tits building 可看[8].

33) [33]的前一半把本段用代数几何的语言写出, 读者可作比较.

34) 这个问题又称为 shimura 猜想: canonical models ([14] § 2.2)的存在性及互反律([14]) § 2.6).

35) 关于这些猜想, 见Langlands 在[32]的序.

参 考 文 献

- [1] J. ARTHUR, A trace formula for reductive groups, *Duke Math. J.*, (1979).
- [2] E. ARTIN, Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, *Abh. Math. SEM. Univ. Hamburg*, 8 (1930), 292—306.
- [3] E. ARTIN and J. TATE, *Class Field Theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [4] W. L. BAILY and A. BOREL, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. Math.*, 84 (1966), 442—528.
- [5] A. SOREL, Introduction to Automorphic Forms, *Proc. Symp. Pure Maths.*, IX (1966), 199—210.
- [6] A. BOREL and H. JACQUET, Automorphic Forms and Automorphic Representation, *Proc. Symp. Pure Math.*, 33 (1979), 189—202.
- [7] A. BOREL, Automorphic L-function, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 33 (1979), 27—62.
- [8] F. BRUHAT and J. TITS, 4 papers in C. R. Acad. Sci. Paris, 263 (1966), 598—601, 766—768, 822—825, 867—869.
- [9] P. CARTIER, Representations of p-adic groups, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 33 (1979), 111—156.
- [10] C. CHEVALLEY, La theorie du corps de classes, *Ann. Math.*, 41 (1940), 391—417.
- [11] P. DELIGNE, Hodge Theory I, I, II, *Publ. Math. IHES* 40.
- [12] P. DELIGNE, Valeurs de fonctions L et periodes d'integrales, *Proc. Symp. Pure Math.*, 33 (1979) I, 313—342.
- [13] P. DELIGNE, Les constantes des equations fonctionnelles des fonctions L, *Springer Lect. Notes Maths.*, 349 (1973), 501—595.
- [14] P. DELIGNE, Varietes de Shimura, *Proc. Symp. Pure Math.*, 33 (1979) I, 247—290.
- [15] M. DEMAZURE, Motifs des varietes algebrique, Sem. Bourbaki ¶365 (1969), *Springer LN Math.*, 180.
- [16] P. GABRIEL, Des categories abeliennes, *Bull. Soc. Math. France.*, 90 (1962), 323—448.
- [17] R. GODEMENT and H. JACQUET, Zeta functions of simple algebras, *Springer Lecture Notes in Math.*, Springer, New York, 260 (1972).
- [18] L. GOLDSTEIN, *Analytic Number Theory*, Prentice Hall, 1971.
- [19] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algebre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119—221.
- [20] S. GELBART, Automorphic forms and Artin's conjecture, *Springer Lecture Notes in Math.*, 627 (1977), 241—276.
- [21] H. HASSE, *History of class field Theory*, in *Algebraic Number Theory*, ed. Cassels & Frolich, Academic press, 1967.
- [22] H. HASSE, Vorlesungen über Klassenkörpertheorie, Physica-Verlag, Wurzburg.

- burg, 1967.
- [23] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [24] D. HILBERT, Mathematical problems, *Bull. AMS*, (1902), 437—478.
- [25] H. JACQUET and R. P. LANGLANDS, Automorphic forms on $GL(2)$, *Springer Lecture Notes in Math.*, 114 (1970), 278(1972).
- [26] G. JANUSZ, *Algebraic Number Fields*, Academic Press, New York.
- [27] 黎景暉, 代数群, 中山大学学报(自然科学版), 1980, 2.
- [28] 黎景暉, 一个椭圆曲线的猜想, 应用数学(重庆), 1980.
- [29] S. LANG, *Rapport sur la cohomologie des groupes*, Benjamin, New York, 1966.
- [30] R. P. LANGLANDS, Problems in the theory of automorphic forms, *Springer Lecture Notes in Math.*, 170 (1970), 18—86.
- [31] R. P. LANGLANDS, *Euler products*, Yale University Press, 1967.
- [32] R. P. LANGLANDS, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 33 (1979) I, 205—246.
- [33] R. P. LANGLANDS, Base change for GL_2 , *Annals of Math. Studies*, Princeton University Press.
- [34] R. P. LANGLANDS, Shimura varieties and the Selberg trace formula, *Canadian J. Math.*, 39 (1977), 1292—1299.
- [35] R. P. LANGLANDS, Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum, *Proc. Symp. Pure Math.*, 28 (1976), 401—418.
- [36] J. MANIN, Correspondences, Motifs and Monoidal Transformations, AMS Transl., Math USSR. Sbornik, 6 (1968), 439—470.
- [37] D. MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Springer Verlag, 1965.
- [38] N. SAAVEDRA RIVANO, Categories Tannakiennes, *Springer Lecture Notes Math.*, 265 (1972), Springer Verlag, New York.
- [39] J.-P. SERRE, *CORPS LOCAUX*, Hermann, Paris, 1962.
- [40] D. SHELSTAD, Orbital integrals, *Ann. Sc. E. N. S.*, 12 (1979), 1—31.
- [41] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.
- [42] G. SHIMURA, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, I, I, *Ann. Math.*, 91 (1970), 144—222; 92(1970), 528—549.
- [43] G. SHIMURA, Moduli and fibre system of abelian varieties, *Ann. Math.*, 83 (1966), 294—338.
- [44] G. SHIMURA, Moduli of Abelian Varieties and Number Theory, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 9(1966), 312—332.
- [45] H. SCHUBERT, *Categories*, Springer Verlag, New York, 1972.
- [46] H. SWINNERTON-DYER, Applications of algebraic geometry to number theory, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 20(1971), 1-52.
- [47] J. TATE, *Global class field theory*, in *Algebraic Number Theory*, ed. Cassels & Frohlich, Academic Press, 1967.

- [48] A. D. THOMAS, *Zeta functions*, Pitman Publishing Co., London, 1977.
- [49] V. VARADARAJAN, Harmonic analysis on real reductive groups, *Syringer Lecture Notes in Math.*, 576(1977), Springer Verlag, New York.
- [50] N. WALLACH, Representaions of reductive Lie groups, *Proc. Symp. Pure Math. AMS*, 331(1977), 71—86.
- [51] G. WARNER, Harmonic analysis on Semi-simple Lie groups, I, II, Springer Verlag, 1972.
- [52] A. WEIL, *BASIC NUMBER THEORY*, Springer-Verlag, 3rd ed., 1974.
- [53] A. WEIL, Adeles and algebraic groups, Institute for Advanced Study, Princeton, 1961.
- [54] A. WEIL, Sur la theorie du corps de classes, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951). 1—35.