一类随机微分方程的解的存在性与唯一性

石北源
（数学力学系）

§1．引　言

本文考虑如下类型的随机微分方程

$$x_t = H_t + \int_0^t f(\cdot, s, x_{s-})dM_s$$

在随机区间〔0，T）上的解的存在性与唯一性问题，其中T是可料时；(X_t)，(H_t)是在〔0，T）上局部化后是右连续左极限存在适应过程；(M_t)是在〔0，T）上局部化后是半鞅（“局部化”的意义见定义1）；$f(\omega,s,x)$是定义在$\Omega\times R_+\times R$上的实函数。我们得到了在某些条件下方程存在且有唯一的解（定理2），推广了C. Doléans-Dade和P.A.Meyer（1977，〔1〕），P.E.Protter（1977〔2〕）的相应结果（见定理2注2和定理3）。

§2．有关定义与引理

设$(\Omega,\mathbf{F},P)$是一完备概率空间，$(\mathbf{F}_t)_{t\in R_+}$（$R_+=〔0,\infty)$）是F的一族单调上升子σ-代数，满足通常条件，对定义在此概率空间上的过程类，我们以S表示全体零初值半鞅，以$\mathbf{P}^L$表示全体局部有界可料过程，以L表示全体左连续右极限存在适应过程，以R表示全体右连续左极限存在适应过程。由关于鞅的随机积分理论知道，若$(f_t)\in\mathbf{P}^L$，$(M_t)\in\mathbf{S}$，即$M_t=N_t+A_t$，其中(N_t)是局部鞅，(A_t)是零初值适应有限变差过程，那末可定义随机积分

$$\int_0^t f_s dM_s = \int_0^t f_s dN_s + \int_0^t f_s dA_s \text{ ,}$$

并简记为$(f.M)_t=(f.N)_t+(f.A)_t$．它不依赖于$M_t=N_t+A_t$的分解形式而被唯一确定，且$(f.M)_t\in\mathbf{S}$．我们对此随机积分的定义加以推广．首先有

定义1．设T是可料时，定义在$\Omega\times R_+$上满足如下条件的实函数类将分别记为$\mathbf{S}_T$（$\mathbf{P}_T^L$，$\mathbf{L}_T$，$\mathbf{R}_T$）：$(M_t)\in\mathbf{S}_T$（$(f_t)\in\mathbf{P}_T^L$，$(y_t)\in\mathbf{L}_T$，$(x_t)\in\mathbf{R}_T$）当且仅当存在预报T的停时列$\{T_n\}$使得对一切n，$(M_t^{T_n})\in\mathbf{S}$ $\left((f_t^{T_n})\in\mathbf{P}^L,\ (y_t^{T_n})\in\mathbf{L},\ (x_t^{T_n})\in\mathbf{R}\right)$，

对类中元素，如果对几乎所有ω，在〔0，T）上相等，则视为属于同一等价类，等价

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

类中元素将不加区别。易见定义1中的$\{T_n\}$换为预报T的任意停时列时，与原定义等价。

引理1．设T是可料时，$(f_t)\in \mathbf{P}_T^L$，$(M_t)\in\mathbf{S}_T$，则存在唯一的$(N_t)\in\mathbf{S}_T$，使得凡预报T的停时列$\{T_n\}$，对一切n均有 $N_t^{T_n}=(f^{T_n}.M^{T_n})_t$

〔证〕设$\{U_n\}$是预报T的某一停时列，那末对一切n，$(f_t^{U_n})\in\mathbf{P}^L$，$(M_t^{U_n})\in\mathbf{S}$，从而存在$(N_t^n)\in\mathbf{S}$，使得 $N_t^n=(f^{U_n}.M^{U_n})_t$，在$\Omega\times R_+$上定义函数$N_t(\omega)$：

$$N_t(\omega)=\begin{cases} N_t^n(\omega), & 当(t,\omega)\in[0,U_n], \quad n=1,2,\cdots; \\ 0, & 当(t,\omega)\in\Omega\times R_+\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,U_n]. \end{cases}$$

容易证明$(N_t)\in\mathbf{S}_T$和凡预报T的停时列$\{T_n\}$均有 $N_t^{T_n}=(f^{T_n}.M^{T_n})_t$．这样的$(N_t)$在等价类的意义下是唯一的。引理得证。

定义2．设$(f_t)\in\mathbf{P}_T^L$，$(M_t)\in\mathbf{S}_T$，那末由引理1所确定的$\Omega\times R_+$上的实函数$(N_t)\in\mathbf{S}_T$称为(f_t)对(M_t)的随机积分，并记为$N_t=\int_0^t f_s dM_s$和简记为$(f.M)_t$．

该积分的有关性质易由局部有界可料过程对半鞅的随机积分的性质得到。为证明下面的定理2，我们需用到如下引理：

引理2．设T是可料时，$f(\omega,t,x)$是定义在$\Omega\times R_+\times R$上的实函数($R=(-\infty,\infty)$)，满足如下条件：(L_1) 存在$[0,T)$上的非负函数$K_t(\omega)$，使得 $\inf\{t:K_t>n\}\uparrow T$，且对几乎所有$\omega$在$[0,T)$上，凡$x,y\in R$，有

$$|f(\omega,t,x)-f(\omega,t,y)|\leqslant K_t(\omega)|x-y|; \qquad (1)$$

(L_2) 当$t\in R_t$，$x\in R$固定时，$f(\cdot,t,x)$是$\mathbf{F}_t$-可测；(L_3) 对几乎所有ω，凡$x\in R$，$f(\omega,\cdot,x)$是左连续右极限存在函数。

那末存在预报T的停时列$\{T_n\}$使得1) 对几乎所有ω及一切$t\in R_+$，$x,y\in R$，均有

$|f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x)-f(\omega,t\wedge T_n(\omega),y)|I_{\{0<t\leqslant T_n(\omega)\}}\leqslant n|x-y|$，其中$I_{\{\cdots\}}$表示集合$\{\cdots\}$的示性函数；2) 对固定$t\in R_+$，$x\in R$，$f(\cdot,t\wedge T_n,x)$是$\mathbf{F}_t$-可测；3) 对几乎所有$\omega$及一切$x\in R$，$f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x)$是$t$的左连续右极限存在函数；4) 设$(x_t)\in\mathbf{R}_T$，$(M_t)\in\mathbf{S}_T$，则$(f(\cdot,t\wedge T_n,x_{t-}^{T_n}))\in\mathbf{L}$，从而按定义2可定义积分$\int_0^t f(\cdot,s,x_{s-})dM_s$．

〔证〕为证明1)，令

$$K_t^*(\omega)=\sup_{\substack{x^*,y^*\in\Gamma\\ x^*\neq y^*}}\left|\frac{f(\omega,t,x^*)-f(\omega,t,y^*)}{x^*-y^*}\right|I_{\{0\leqslant t<T(\omega)\}},$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中Γ表示全体有理数集合。那末(K_t^*)是可料过程，且满足i) 以$K_t^*(\omega)$代替$K_t(\omega)$，对几乎所有ω，在$[0,T)$上，凡$x,y\in R$,不等式(1)仍成立；ii) 对几乎所有ω,$K_t^*(\omega)$在$(0,T(\omega))$左下半连续；iii) 在$[0,T)$上，$K_t^*(\omega)\leqslant K_t(\omega)$。事实上，由$(K_t^*)$的定义立即得iii)。由$(L_2)$,$(L_3)$和$I\{0\leqslant t<T(\omega)\}$是可料过程得$(K_t^*)$是可料过程。由$(L_1)$和$f(\omega,t,\cdot)$是连续函数可得i)，而由$K_t^*(\omega)$的定义和$f(\omega,t,\cdot)$的左连续性可得ii)。现来证明1)，令$Q_n=inf\{t:K_t^*>n\}$，易见$\{Q_n\}$是单调上升可料时序列。设$\{U_n\}$是预报$T$的某一停时列，那末$T_n=Q_n\wedge U_n$也是预报$T$的停时列，且对几乎所有$\omega$

$$K_t^*(\omega)I_{\{0<t<T_n(\omega)\}}\leqslant n. \qquad (2)$$

对使$K_t^*(\omega)$在$(0,T(\omega))$上左下半续的ω必然有

$$K_t^*(\omega)I_{\{T_n(\omega)\neq 0\}}\leqslant n. \qquad (3)$$

合并(2)和(3)可得，对几乎所有ω

$$K_t^*(\omega)I_{\{0<t\leqslant T_n(\omega)\}}\leqslant n.$$

由此不等式并顾及到K_t^*满足性质i)可得

$$|f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x)-f(\omega,t\wedge T_n(\omega),y)|I_{\{0<t\leqslant T_n(\omega)\}}$$
$$\leqslant K_t^{*T_n}(\omega)I_{\{0<t\leqslant T_n(\omega)\}}|x-y|\leqslant n|x-y|.$$

这就证明了1)，易见由(L_2)和(L_3)推得2)，由(L_3)推得3)，最后证4)，设$t>s>0$,那末由不等式

$$|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{s-}^{T_n}(\omega))-f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x_{t-}^{T_n}(\omega)|$$
$$\leqslant|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{s-}^{T_n}(\omega)-f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{t-}^{T_n}(\omega)|$$
$$+|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{t-}^{T_n}(\omega))-f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x_{t-}^{T_n}(\omega)|$$

可推得$f(\cdot,t\wedge T_n,x_{t-}^{T_n})$是左连续。设$s>t\geqslant 0$,记$f(\omega,t\wedge T_n(\omega))+,x)=\lim\limits_{s\to t+}f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x)$，那末由不等式

$$|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{s-}^{T_n}(\omega))-f(\omega,(t\wedge T_n(\omega))+,x_t^{T_n}(\omega))|$$
$$\leqslant|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{s-}^{T_n}(\omega)-f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_t^{T_n}(\omega))|$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$+|f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{t-}^{T_n}(\omega))-f(\omega,(t\wedge T_n(\omega))+,x_t^{T_n}(\omega)|$$

可推得 $\lim\limits_{s\to t+} f(\omega,s\wedge T_n(\omega),x_{s-}^{T_n}(\omega))=f(\omega,(t\wedge T_n(\omega)+,x_t^{T_n}(\omega))$.

所以$f(\cdot,t\wedge T_m,x_{t-}^{T_n})$是左连续右极限存在过程。其次由2)知$f(\cdot,t\wedge T_n,x)$是$\mathbf{F}_t$-可测，由$(L_1)$知$f(\cdot,t\wedge T_n,\cdot)$是可测函数，所以复合映象$f(\cdot,t\wedge T_n,x_{t-}^{T_n})$是$\mathbf{F}_t$-可测。于是$f(\cdot,t\wedge T_n,x_{t-}^{T_n})\in\mathbf{L}$，从而对$(M_t)\in\mathbf{S}_T$，可定义积分$\int_0^t f(\cdot,s,x_{s-})dM_s$。引理得证。

§ 3 存在性与唯一性定理

定理1[1]。设$(M_t)\in\mathbf{S}$，$(H_t)\in\mathbf{R}$，$f(\omega,t,x)$是定义在$\Omega\times R_+\times R$上的实函数，满足下列条件：$(L_{1.1})$ 存在非负常数K使得对几乎所有ω及所有$t\in R_+$，$x,y\in R$，有

$$|f(\omega,t,x)-f(\omega,t,y)|\leqslant K|x-y|;$$

$(L_{1.2})$ 对固定$t\in R_+$，$x\in R$，$f(\cdot,t,x)$是Ft-可测；$(L_{1.3})$ 对几乎所有ω及所有$x\in R$，$f(\omega,\cdot,x)$是左连续右极限存在函数。

那末存在唯一的过程$(x_t)\in\mathbf{R}$，满足方程

$$x_t=H_t+\int_0^t f(\cdot,s,x_{s-})dM_s.$$

将定理1的条件$(L_{1.1})$中的常数K放宽为可依赖于t和ω的函数$K_t(\omega)$，得到更一般的结果，就是如下定理：

定理2。设T是可料时，$f(\omega,t,x)$是定义在$\Omega\times R_+\times R$上的实函数，满足下列条件：(L_1)存在定义在$(0,T)$上的非负函数$K_t(\omega)$，使得$\inf\{t:K_t>n\}\uparrow T$，且对几乎所有$\omega$，在$(0,T)$上，凡$x,y\in R$，不等式

$$|f(\omega,t,x)-f(\omega,t,y)|\leqslant K_t(\omega)|x-y|$$

成立；(L_2)当$t\in R_+$，$x\in R$固定时，$f(\cdot,t,x,)$是F_t-可测；(L_3)对几乎所有ω及一切$x\in R$，$f(\omega,\cdot,x)$是左连续右极限存在函数。

又设$(M_t)\in\mathbf{S}_T$，$(H_t)\in\mathbf{R}_T$。那末存在唯一的$(x_t)\in\mathbf{R}_T$满足方程

$$x_t=H_t+\int_0^t f(\cdot,s,x_{s-})dM_s \tag{4}$$

方程(4)理解为左右两端的函数在$\mathbf{R}_T$中是属于同一等价类。

〔证〕由引理2得知存在预报T的停时列使对每个n，$f(\omega,t\wedge T_n(\omega),x)I_{\{0<t\leqslant T_n(\omega)\}}$满足定理1的条件$(L_{1.1})\sim(L_{1.3})$，和$(H_t^{T_n})\in\mathbf{R}$，$(M_t^{T_n})\in\mathbf{S}$，故存在$(x_t^n)\in\mathbf{R}$满足方程

$$x_t^n=H_t^{T_n}+\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^n)\,I_{(0,T_n]}dM_s^{T_n}, \tag{5}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当$m>n$时

$$(x^m)_t^{T_n}=H_t^{T_n}+\int_0^{t\wedge T_n}f(\cdot,s\wedge T_m,x_s^m)I_{(0,T_m]}dM_s^{T_m}$$

$$=H_t^{T_n}+\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,(x^m)_{s-}^{T_n})I_{(0,T_n]}dM_s^{T_n},$$

且$((x^m)_t^{T_n})\in\mathbf{R}$。由于定理1，方程(5)的解是唯一的，所以$(x^m)_t^{T_n}=x_t^n$。于是当$m>n$时在$(0,T_m)$上$x_t^m=x_t^n$，令

$$x_t(\omega)=\begin{cases}x_t^m(\omega),\ 当(t,\omega)\in[0,T_n),\ n=1,2,\cdots\cdots,\\ H_t(\omega),\ 当(t,\omega)\bar{\in}[0,T).\end{cases}$$

易见$(x_t)\in\mathbf{R}_T$。其次，由引理2之4)，$f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^{T_n})\in\mathbf{R}$，所以

$$\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^{T_n})dM_s^{T_n}=\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^{T_n})I_{(0,T_n]}dM_s^{T_n}$$

于是

$$x_t^{T_n}=(x^n)_t^{T_n}=H_t^{T_n}+\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^n)I_{(0,T_n]}dM_s^{T_n}$$

$$=H_t^{T_n}+\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,x_{s-}^{T_n})dM_s^{T_n},$$

所以(x_t)是方程(4)的解。设$(\widetilde{x_t})\in\mathbf{R}_T$是方程的另一解，那末

$$\widetilde{x}_t^{T_n}=H_t^T+\int_0^t f(\cdot,s\wedge T_n,\widetilde{x}_{s-}^{T_n})dM_s^{T_n},$$

由定理1关于解的唯一性得$x_t^{T_n}=\widetilde{x}_t^{T_n}$，所以在等价类意义下$(x_t)$与$(\widetilde{x_t})$是同一的。定理得证。

注1。如$(H_t)\in\mathbf{S}_T$，易见方程的解$(x_t)\in\mathbf{S}_T$。

注2。定理2在$K_t(\omega)\equiv$正常数$K,T=\infty$的特例下，就是定理1。

由定理2的注1和局部有界可料过程对连续半鞅的积分是连续过程，容易得到如下结果：

定理3[2]。设T是可料时，$f(\omega,t,x)$是定义在$\Omega\times R_+\times R$上的实函数，满足如下条件：

($L_{3\cdot1}$)存在定义在$[0,T)$上的非负实函数$K_t(\omega)$，使得$\inf\{t;K_t>n\}\uparrow T$，且对几乎所有$\omega$，在$[0,T)$上，凡$x,y\in R$有

$$|f(\omega,t,x)-f(\omega,t,y)|\leqslant K_t(\omega)|x-y|;$$

($L_{3\cdot2}$)固定$s\in R_+$，$x\in R$，$f(\cdot,s,x)$是$\mathbf{F}_s$-可测；

($L_{3\cdot3}$)对几乎所有ω，$f(\omega,\cdot,\cdot)$是$R_+\times R$上的连续函数。又设(M_t)是连续的零初值半鞅，(H_t)是连续的有限变差过程，那末存在唯一的$(x_t)\in\mathbf{S}_T^c$($(x_t)\in\mathbf{S}_T^c$当且仅当$(x_t)\in\mathbf{S}_T$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和对任意预报T的停时列$\{T_n\}$，($x_t^{T_n}$)是连续过程）满足方程

$$x_t = H_t + \int_0^t f(\cdot, s, x_{s-}) dM_s. \tag{6}$$

方程(6)理解为两端的函数属于S_T^c的同一等价类。

注 3．定理 3 的假设条件可减弱为以定理 2 的(L_3)代替($L_{3\cdot 3}$)并只要$(M_t)\in S_T^c$，$(H_t)\in S_T^c$，其余条件不变，定理 3 仍成立。

参考文献

〔1〕C. Doléans-Dade, P.A.Meyer, Equations Differentielles Stochastiques, Sém. Prob. Ⅺ, Lect. Not. in Math., (1977), 581.

〔2〕P.E. Protter, On the Existence, Uniqueness, Convergence and Explosions of Systems of Stochastic Integral equations, *Ann. Probability*, 5 (1977), 2.

On the Existence and Uniqueness of Solutions for a Kind of Stochastic Differential Equations

Shi Beiyuan

Abstract

In this paper, We show that the stochastic differential equation

$$x_t = H_t + \int_0^t f(\cdot, s, x_{s-}) dM_s$$

on the random interal [0,T) has the existence and uniqueness of solutions, where (x_t) are functions which may be localized as processes of the right continuous and the existence of the left limit, (M_t) are functions which may be localized as simematigales.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net