二阶RC有源滤波器的相位偏离

陈 钧 量

(无线电电子学系)

摘　　要

本文导出二阶RC有源滤波器相位偏离的计算公式，它与常用的极点参数灵敏度$S_{x_i}^{Q}$和$S_{x_i}^{\omega_0}$联系起来，表明当$Q\gg 1$时，在三分贝通带边频上，灵敏度$S_{x_i}^{\omega_0}$较之$S_{x_i}^{Q}$对相位偏离的影响大$2Q$倍，最后，给出相位偏离统计变化的量度.

七十年代初期，A.L.Rosenblum等人提出多参量统计灵敏度概念研究滤波器传递函数相对变化的绝对值[1]。此后，L.Weyten讨论了滤波器传递函数绝对值的相对变化及其波动[2]，指出这些计算与$S_{x_i}^{Q}$和$S_{x_i}^{\omega_0}$相联系。本文讨论二阶RC有源滤波器相位偏离的计算，并提出在一种较普遍情况下，计算相位偏离的最大值，这些计算在工程和生产上有一定意义，最后，给出相位偏离统计变化的量度。

一、相位偏离的计算

设二阶RC有源带通滤波器的传递函数

$$T(S)=\frac{K\omega_0 S}{S^2+\frac{\omega_0}{Q}S+\omega_0^2} \tag{1}$$

式中，K为常数。

其频率特性

$$T(j\omega)=T(S)\Big|_{s=j\omega}=K\frac{Q}{1+jQ\triangle} \tag{2}$$

式中，$\triangle=\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}$.

将(2)式写为

$$T(j\omega)=\left|T(j\omega)\right|e^{j\theta(\omega)} \tag{3}$$

式中，$\left|T(j\omega)\right|=\frac{KQ}{(1+Q^2\triangle^2)^{2/1}}$

$$\theta(\omega)=-\arctan(Q\triangle)$$

设相位函数$\theta=f(\omega_0,Q)$的各偏导数都存在且连续，则

$$d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}d\omega_0+\frac{\partial\theta}{\partial Q}dQ$$

取近似值得，

$$\triangle\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}\triangle\omega_0+\frac{\partial\theta}{\partial Q}\triangle Q$$

$$=\frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}\sum_i\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i}\triangle x_i+\frac{\partial\theta}{\partial Q}\sum_i\frac{\partial Q}{\partial x_i}\triangle x_i \tag{4}$$

(4)式说明，元件x_i的微量变化$\triangle x_i$引起变化量$\triangle\omega_0$和$\triangle Q$所造成的相位偏离$\triangle\theta(\omega)$。今引用

$$\mathbf{S}_{\omega_0}^{\theta(\omega)}=\omega_0\frac{\partial\theta}{\partial\omega_0}\ \text{和}\ \mathbf{S}_{Q}^{\theta(\omega)}=Q\frac{\partial\theta}{\partial Q},$$

并代入(4)式得

$$\triangle\theta(\omega)=\sum_i\left(\mathbf{S}_{\omega_0}^{\theta(\omega)}\cdot S_{x_i}^{\omega_0}+\mathbf{S}_{Q}^{\theta(\omega)}\cdot S_{x_i}^{Q}\right)\frac{\triangle x_i}{x_i}, \tag{5}$$

式中，

$$S_{x_i}^{\omega_0}=\frac{x_i}{\omega_0}\frac{\partial\omega_0}{\partial x_i},\qquad S_{x_i}^{Q}=\frac{x_i}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x_i}$$

显然，$\mathbf{S}_{\omega_0}^{\theta(\omega)}$和$\mathbf{S}_{Q}^{\theta(\omega)}$分别称为相位对极点参数$\omega_0$和$Q$的灵敏度函数，它们仅与滤波器传递函数及其极点分布有关，且为频率函数，与实现该函数的线路结构无关。而$S_{x_i}^{\omega_0}$和$S_{x_i}^{Q}$为通常的极点参数灵敏度。

由(3)式求得二阶RC有源带通滤波器的相位对极点参数灵敏度

$$\mathbf{S}_{\omega_0}^{\theta(\omega)}=\frac{Q}{1+Q^2\triangle^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega}\right), \tag{6a}$$

和

$$\mathbf{S}_{Q}^{\theta(\omega)}=-\frac{Q\triangle}{1+Q^2\triangle^2}, \tag{6b}$$

为简化计算，我们定义

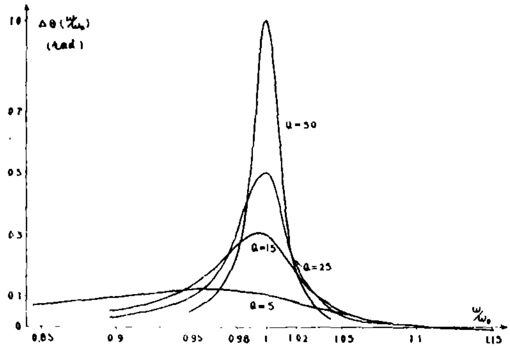
$$\gamma=\frac{\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i}}{\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}}, \tag{7}$$

将(6)和(7)式代入(5)式得，

$$\triangle\theta(\omega)=\frac{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega}\right)-\gamma Q\triangle}{1+Q^2\triangle^2}\left(\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}\right), \tag{8}$$

(8)式可用来计算在任意频率时，二阶RC有源带通滤波器的相位偏离。

对不同的Q值，按(8)式可得图一的曲线。可知：(1)对中心频率f_0来说，曲线是不对称的，(2)Q值越大，曲线的峰值越大，且出现在$f=f_0$处，(3)Q值越小，曲线的峰值越向左移，且曲线趋于平坦。



图一.相位偏离与频率的相对变化

$$\left(设\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i}=10\%,\ \sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}=1\%\right)$$

下面讨论当$\triangle$取几个特殊数值时相位偏离的情况：

i）当$\triangle=0$时，即$\omega=\omega_0$，由(8)式得，

$$\triangle\theta(\omega_0)=2Q\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}, \tag{9}$$

可知，$\triangle\theta(\omega_0)$与$S_{x_i}^{Q}$无关，且当$Q$愈大，$\triangle\theta(\omega_0)$愈大。

ii）当$\triangle=\pm\frac{1}{Q}$时，即在三分贝通带上、下边频

$$\omega_{1,2}=\omega_0\left(1\pm\frac{1}{2Q}\right),\qquad Q\gg 1 \tag{10}$$

上，由(8)和(10)式得，

$$\triangle\theta(\omega_1)=Q\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}-\frac{1}{2}\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i}, \tag{11a}$$

$$\triangle\theta(\omega_2)=Q\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}+\frac{1}{2}\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i}, \tag{11b}$$

观察(11)式可知，在三分贝通带上，下边频时，灵敏度$S_{x_i}^{\omega_0}$较之$S_{x_i}^{Q}$对相位偏离$\triangle\theta$的影响大$2Q$倍。因此，从降低滤波器相位偏离的角度来说，使实现的线路有最低的$S_{x_i}^{\omega_0}$是很必要的，特别是在高Q的时候.这个结论与降低滤波器增益相对偏离的波动对极点参数灵敏度的要求是一致的[2]。

iii）当$|\triangle|\to\infty$时，即$\omega\to 0$或∞，则

$\triangle\theta\to 0$,

例题，设二阶RC有源带通滤波器有下列参数：$\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i}=10\%$,

$\sum_i S_{x_i}^{\omega_0} \dfrac{\triangle x_i}{x_i} = 1\%$和$Q = 25$，

计算当$\omega=\omega_0$，ω_1和ω_2时的相位偏离。

解：　由(9)式得，

$$\triangle\theta(\omega_0) = 2\times 25\times 1\% = 0.5(\text{弧度}) = 28.647^\circ$$

由(11)式得，

$$\triangle\theta(\omega_1) = 25\times 1\% - \tfrac{1}{2}\times 10\% = 0.2(\text{弧度}) = 11.459^\circ$$

$$\triangle\theta(\omega_2) = 25\times 1\% + \tfrac{1}{2}\times 10\% = 0.3(\text{弧度}) = 17.188^\circ$$

以上计算结果也可以从图一中读出。

应当指出，对$T(s)$分别乘以ω_0/S或S/ω_0，将分别得到低通或高通的传递函数，即

$$T_L(s) = T(s)\cdot \frac{\omega_0}{s},$$

$$T_H(s) = T(s)\cdot \frac{s}{\omega_0},$$

所以，对(3)式的$\theta(\omega)$分别加上$(-\pi/2)$或$\pi/2$，就得到这些滤波器的相位函数，

$$\theta_L(\omega) = \theta(\omega) - \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_H(\omega) = \theta(\omega) + \frac{\pi}{2},$$

根据$S_{\omega_0}^{\theta(\omega)}$和$S_Q^{\theta(\omega)}$的定义，故(8)式对低通和高通滤波器也是适用的。

可以证明，当$\gamma\gg 1$和$Q\gg\dfrac{\gamma}{2}$时，$\triangle\theta(\omega)$的最大值和最小值分别出现于$\dfrac{\omega}{\omega_0}=1$和$\dfrac{\omega}{\omega_0} = 1+\dfrac{2}{\gamma}$，此时，

$$\triangle\theta_{max} = \triangle\theta(\omega_0) = 2Q\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\frac{\triangle x_i}{x_i}, \qquad (12)$$

$$\triangle\theta_{min} = -\frac{\gamma}{8Q}\sum_i S_{x_i}^{Q}\frac{\triangle x_i}{x_i},$$

用电子计算机计算(8)式(取步长$f/f_0 = 0.005$)，可得出表Ⅰ，由此说明(12)式是成立的。

表Ⅰ. 相位偏离的最大值和最小值与相应的频率

Q 值	$\Delta\theta$max 的		$\Delta\theta$min 的	
	频率(f/f_0)	数值(弧度)	频率(f/f_0)	数值(弧度)
5	0.96	0.120779	1.27	-0.02029
20	0.995	0.403821	1.225	-6.03315×10^{-3}
35	1	0.700001	1.22	-3.48296×10^{-3}
50	1	1	1.22	-2.44439×10^{-3}

(设 $\sum_i S_{x_i}^{Q}\dfrac{\Delta x_i}{x_i} = 10\%$，$\sum_i S_{x_i}^{\omega_0}\dfrac{\Delta x_i}{x_i} = 1\%$)

在许多情况下，$|\triangle\theta_{max}|>>|\triangle\theta_{min}|$，而且出现$\triangle\theta_{min}$的频率是远在三分贝通带上边频之外，因此，实际上不需要考虑$\triangle\theta_{min}$了。

从(12)式可知，当满足上述条件时，滤波器相位偏离在中心频率上达到最大值，它可供作设计之用。

二、统计变化的量度

设随机变量$\frac{\triangle x_i}{x_i}$的平均值为$\mu_i$，其方差为$\sigma_i^2$，及$\rho_{ij}$是$\frac{\triangle x_i}{x_i}$和$\frac{\triangle x_j}{x_j}$之间的相关系数，即

$$\mu_i = E\left\{\frac{\triangle x_i}{x_i}\right\}, \quad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left\{\frac{\triangle x_i}{x_i}\right\}, \text{ 及}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}\left\{\frac{\triangle x_i}{x_i}, \frac{\triangle x_j}{x_j}\right\}}{\sigma_i\sigma_j}$$

由(8)式得相位偏离的平均值

$$\mu_{\triangle\theta} = E\{\triangle\theta(\omega)\} = \frac{Q}{1+Q^2\triangle^2}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega}{\omega_0}\right)\sum_i S_{x_i}^{\omega_0} - \triangle\sum_i S_{x_i}^{Q}\right]\mu_i, \tag{13}$$

及相位偏离的方差

$$\begin{aligned} Var\{\triangle\theta(\omega)\} = &\sum_i\left(\frac{Q}{1+Q^2\triangle^2}\right)^2\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega}\right)S_{x_i}^{\omega_0} - S_{x_i}^{Q}\triangle\right]^2\sigma_i^2 \\ &+ 2\sum_{i<j}\sum \rho_{ij}\left(\frac{Q}{1+Q^2\triangle^2}\right)^2\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 S_{x_i}^{\omega_0} S_{x_j}^{\omega_0}\right. \\ &\left.+\triangle^2 S_{x_i}^{Q} S_{x_j}^{Q} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{\omega}\right)\triangle\left(S_{x_i}^{Q} S_{x_j}^{\omega_0} + S_{x_i}^{\omega_0} S_{x_j}^{Q}\right)\right\}\sigma_i\sigma_j \end{aligned} \tag{14}$$

所以，只要知道随机变量$\frac{\triangle x_i}{x_i}$的$\mu_i$，$\sigma_j^2$和$\rho_{ij}$的值，或设定$\frac{\triangle x_i}{x_i}$的分布律，对于具体线路来说，则可计算滤波器相位偏离的统计变化，在工程或生产中，它们给评定和比较各种线路的相位偏离提供必要的数据。

三、结 论

本文推导了二阶RC有源滤波器相位偏离的计算公式，表明$\triangle\theta(\omega)$的计算与灵敏度$S_{x_i}^{\omega_0}$和$S_{x_i}^{Q}$相连系。指出当$Q>>1$时，在三分贝通带边频上，$S_{x_i}^{\omega_0}$较之$S_{x_i}^{Q}$对相位偏离的影响大$2Q$倍．故应重视$S_{x_i}^{\omega_0}$的降低。

指出当$\gamma>>1$和$Q>>\frac{\gamma}{2}$时，在中心频率处($\omega=\omega_0$)，出现相位偏离的最大值．最后，给出相位偏离统计变化的量度。

参考文献

〔1〕A. L. Rosenblum and M. S. Ghausi. *IEEE*, *CT*-18 (1971), 6, 592.
〔2〕L. Weyten, *IEEE*, CAS—23 (1976), 8, 506.

The Deviation of Phase in Second—Order RC Active Filters.

Chen Junliang

Abstract

A formula of the deviation of phase in second-order RC active filters is derived. It is related to the sensitivities $S^{Q}_{x_i}$ and $S^{\omega_0}_{x_i}$. It is shown that the effect of sensitivities $S^{\omega_0}_{x_i}$ on the deviation of phase is larger 2Q than $S^{Q}_{x_i}$ at the 3 db passband edge frequencies for $Q \gg 1$. Finally, the measurements of statistic variation of the deviation of phase are given.