关于有势马尔科夫链

戴永隆
（数学力学系）

有势马尔科夫链的概念是候振挺、陈木法首先引进的[2]。本文对有势马尔科夫链的一般形式作两点简要的注记。

设E是有限或可列集，$\{a_{ij}, i,j\in E\}$是满足下列条件的数值矩阵：

1) 当$i\neq j$，$i,j\in E$时，$a_{ij}\geqslant 0$，但a_{ii}任意。

2) $a_{ij}>0 \Rightarrow a_{ji}>0$，　$i,j\in E$，　$i\neq j$。

下面只考虑这种矩阵。当$a_{ij}>0$时，令

$$\phi_{ij}=\log\frac{a_{ji}}{a_{ij}}$$

在上述条件下，如果存在数列$\{u_i,\ i\in E\}$，使得

$$u_j-u_i=\phi_{ij}\qquad i,j\in E,\quad -\infty<u_i,\ u_j<\infty$$

则称$\{a_{ij}, i,j\in E\}$有势$\{u_i, i\in E\}$。

§1 齐次的场合

类似于随机游动的定义[1]，设R^d是d维整点集：$x=(x^{(1)},\cdots,x^{(d)})$，$x^i=0,\pm 1\cdots$，$1\leqslant i\leqslant d$。

对任意$x,y\in R^d$，假定有实函数$a(x,y)$与之对应。矩阵$(a(x,y),x,y\in R^d)$如果满足：

3) $a(x,y)=a(o,y-x)$，$(x,\ y\in R^d)$，

则称$(a(x,y),x,y\in R^d)$是齐次的。

如果$a(x,y)$满足条件3)，还满足

4) $a(x,y)\geqslant 0$且对任意$x\in R^d$有

$$\sum_{y\in R^d} a(x,y)=1$$

则称$\{a(x,y),\ x,y\in R^d\}$是随机游动[1]。

对d维矢量(横写)：

$$\vec{c}_1=(c_1^{(1)},\cdots,c_1^{(d)})$$

$$\vec{c}_2=(c_2^{(1)},\cdots,c_2^{(d)})$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的数积以下式表之

$$\vec{c_1} \cdot \vec{c_2} = \sum_{i=1}^{d} c_1^{(i)} c_2^{(i)}$$

定理1 设$(a(x,y), x,y\in R^d)$是满足上述条件1)、2)、3)的矩阵，则$(a(x,y),x,y\in R^d)$是有势的充要条件是存在d维矢量$c=(c^{(1)}\cdots,c^{(d)})$使得：

$$a(y,x)=e^{(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{c}}a(x,y) \qquad (1)$$

证明 充分性。当$a(x,y)>0$，由(1)

$$\phi_{xy}=\log\frac{a(y,x)}{a(x,y)}=(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{c}$$

因此它的势函数正是$\{u_x=\vec{x}\cdot\vec{c},\ x\in R^d\}$

必要性。先设$d=1$，如果只有$x\in R^1$，使

$$a(0,x_1)>0,\quad a(0,-x_1)>0,\quad x_1\neq 0$$

则取c使

$$\frac{a(0,x_1)}{a(0,-x_1)}=e^{-cx_1}$$

由于$a(x,y)=a(0,y-x)$以及对一切非零$x\neq x_1$都有$a(0,x)=0$，故(1)显然成立。

现设如有$x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，$x_1\neq\pm x_2$使

$$a(0,x_1)>0,\qquad a(0,x_2)>0$$

则取c_1，c_2使得

$$\frac{a(0,x_1)}{a(0,-x_1)}=e^{-c_1x_1}\qquad \frac{a(0,x_2)}{a(0,-x_2)}=e^{-c_2x_2}$$

于是

$$\left(\frac{a(0,x_1)}{a(0,-x_1)}\right)^{x_2}=e^{-c_1x_1x_2}$$

$$\left(\frac{a(0,x_2)}{a(0,-x_2)}\right)^{x_1}=e^{-c_2x_1x_2}$$

然而

$$\left(\frac{a(0,x_1)}{a(0,-x_1)}\right)^{x_2}=\frac{a(0,x_1)a(x_1,2x_1)\cdots a((x_2-1)x_1,x_2x_1)}{a(x_1,0)a(2x_1,x_1)\cdots a(x_2x_1,(x_2-1)x_1)}$$

$$\left(\frac{a(0,x_2)}{a(0,-x_2)}\right)^{x_1}=\frac{a(0,x_2)a(x_2,2x_2)\cdots a((x_1-1)x_2,x_1x_2)}{a(x_2,0)a(2x_2,x_2)\cdots a(x_1x_2,(x_1-1)x_2)}$$

如果它有势，必定与路径无关，即

$$\log\left(\frac{a(0,x_1)}{a(0,-x_1)}\right)^{x_2}=\log\left(\frac{a(0,x_2)}{a(0,-x_2)}\right)^{x_1}$$

得 $x_1x_2(c_1-c_2)=0$，即$c_1=c_2$。因此当$d=1$，定理得证。

现设$d>1$，为了简便起见，设$d=2$，下面证明适用于任意d的情形。

$d=2$。设存在$x_0=(x_0^{(1)},x_0^{(2)})$使$x_0\neq(0,0)$，且

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$a(0,x)>0 \Rightarrow x=kx_0$$

此处$kx_0=(kx_0^{(1)},kx_0^{(2)})$其中$k$可以是正负有理数，上式表明$a(0,x)$只在$x_0$的方向上可能有非零值，这时与$d=1$的情形无本质差别，即存在$c=(c^{(1)},c^{(2)})$使

$$a(0,x)=e^{-\vec{c}\cdot\vec{x}}a(0,-x)\qquad x=(x^{(1)},x^{(2)})$$

然而这时$c=(c^{(1)},c^{(2)})$不是唯一的.只要对x_0取定c，使$a(0,x_0)=e^{-\vec{c}\cdot\vec{x}_0}a(0,-x_0)$，则对一切$x\in R^d$均有$a(0,x)=e^{-\vec{c}\cdot\vec{x}}a(0,-x)$.

下面假定至少存在$x,y\in R^{(2)}$，$x\neq ky$，(k为任意有理数)有

$$a(0,x)>0,\quad a(0,y)>0$$

令 $x=(x^{(1)},x^{(2)})$, $y=(y^{(1)},y^{(2)})$ 并令

$$\frac{a(0,x)}{a(0,-x)}=e^{-u_x},\quad \frac{a(0,y)}{a(0,-y)}=e^{-u_y}$$

由下面的方程组确定$c=(c^{(1)},c^{(2)})$

$$c^{(1)}x^{(1)}+c^{(2)}x^{(2)}=u_x$$

$$c^{(2)}y^{(1)}+c^{(2)}y^{(2)}=u_y$$

因为$(x^{(1)},x^{(2)})\neq k(y^{(1)},y^{(2)})$ (k为有理数) 故

$$\begin{vmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} \\ y^{(1)} & y^{(2)} \end{vmatrix}\neq 0$$

由上述方程解出$c^{(1)},c^{(2)}$得

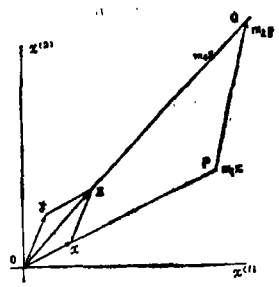
$$c^{(1)}=\frac{u_xy^{(2)}-u_yx^{(2)}}{x^{(1)}y^{(2)}-x^{(2)}y^{(1)}},\qquad c^{(2)}=\frac{u_yx^{(1)}-u_xy^{(1)}}{x^{(1)}y^{(2)}-x^{(2)}y^{(1)}}$$

下面我们来证明，对任意$z(z^{(1)},z^{(2)})\in R^{(2)}$，都有

$$a(0,z)=e^{-\vec{c}\cdot\vec{z}}a(0,-z)$$

由于$x\neq ky$(k跑遍一切有理数)，故z可唯一地表示成

$$z=h_1x+h_2y$$



其中h_1,h_2是有理数，因此总存在整数m_0,m_1,m_2使

$$m_0z=m_1x+m_2y$$

考虑上面图中的闭路**OPQO**，由于$a(x,y)$有势，故

$$\log\left(\frac{a(0,x)}{a(0,-x)}\right)^{m_1}\left(\frac{a(0,y)}{a(0,-y)}\right)^{m_2}$$

$$=\log\left(\frac{a(0,z)}{a(0,-z)}\right)^{m_0}$$

即得

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$a(0,z)=e^{h_1\log\left(\frac{a(0,x)}{a(0,-x)}\right)+h_2\log\left(\frac{a(0,y)}{a(0,-y)}\right)}a(0,-z)$$
$$=e^{-h_1(c^{(1)}x^{(1)}+c^{(2)}x^{(2)})-h_2(c^{(1)}y^{(1)}+c^{(2)}y^{(2)})}a(0,-z)$$
$$=e^{-(c^{(1)}z^{(1)}+c^{(2)}z^{(2)})}a(0,-z)$$
$$=e^{\vec{c}\cdot\vec{z}}a(0,-z)$$

证完。

定理1完全弄明白了满足条件1),2),3)且有势的矩阵$(a(x,y),x,y\in R^d)$的一般形式，特别有

推论 设$\{a(x,y),x,y\in R^d\}$是d维随机游动，则它有势的充要条件是存在$c=(c^{(1)},\cdots,c^{(d)})$使

$$a(y,x)=e^{(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{c}}a(x,y)$$

§2 一 般 情 形

现设E是任意有限或可列集，$\{a_{ij},\ i,j\in E\}$满足条件1)、2)。

又设$\{u_i,\ i\in E\}$$d$是任意实数列，以它作如下的矩阵$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}$，$i,j\in E$：

$$a_{ij}=min(e^{u_i-u_j},1) \tag{2}$$

下面引进一个记号，若有矩阵$A=(a_{i,j})_{i,j\in E}$，$B=(b_{ij})_{i,j\in E}$，将它们的对应元相乘，得新的矩阵：

$$C=(a_{ij}b_{ij})_{i,j\in E}$$

记作$C=A\otimes B$。

定理2 设$(u_i,i\in E)$是任意数列，则矩阵$A=(a_{ij})_{i,j\in E}$有势$(u_i,i\in E)$的充要条件是可以表为

$$A=\mathbf{A}\otimes\mathbf{H} \tag{3}$$

其中$\mathbf{H}$是满足条件1)的任意对称矩阵：$h_{ij}=h_{ji}$，而$\mathbf{A}$由(2)确定。

证明 充分性。设A可表为(3)，于是

$$a_{ij}=h_{ij}\alpha_{ij}=h_{ij}min(e^{u_i-u_j},1)$$

$$a_{ji}=h_{ji}\alpha_{ji}=h_{ji}min(e^{u_j-u_i},1)$$

故当$h_{ij}\neq 0$时有

$$\frac{a_{ji}}{a_{ij}}=\frac{min(e^{u_j-u_i},1)}{min(e^{u_i-u_j},1)}=e^{u_j-u_i}$$

必要性。假定$A=(a_{ij})_{i,j\in E}$有势$(u_i,i\in E)$，于是令

$$h_{ij}=max(a_{ij},a_{ji})$$

则$(h_{ij})_{i,j\in E}$是对称的，满足条件1)，又因$(a_{ij})_{i,j\in E}$有势$(u_i,i\in E)$故当$a_{ij}\neq 0$时

$$\log\frac{a_{ji}}{a_{ij}}=u_j-u_i$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从而

$$h_{ji}min(e^{u_j-u_i},1)$$

$$=max(a_{ij},a_{ji})min(e^{u_j-u_i},1)=a_{ji}$$

证完。

由上述结果可见，有势$\{u_i,\ i\in E\}$的矩阵A总存在无穷多个。

如要A是有势$(u_i,\ i\in E)$的半马尔科夫矩阵，即要求$a_{ii}\geqslant 0(i\in E)$及$\sum\limits_{j\in E}a_{ij}\leqslant 1$，则只要求(3)中的矩阵$\mathbf{H}$满足条件$h_{ii}\geqslant 0$及

$$\sum_{j\in E}h_{ij}\,min\,(e^{u_i-u_j},1)\leqslant 1 \qquad (4)$$

特别，当$h_{ii}\leqslant 0$，$\sum\limits_{j\in E}h_{ij}\leqslant 1$时，(4)必定满足，故有：

推论　一切有势$(u_i,i\in E)$的半马尔科夫矩阵P都有形式

$$P=\mathbf{A}\otimes\mathbf{H}$$

其中$\mathbf{A}$如(2)，$\mathbf{H}$是满足条件(4)的非负对称矩阵。

由有势半马尔科夫矩阵，很容易构造有相同势的马尔科夫矩阵。事实上，设(h_{ij})是满足(4)的非负对称矩阵，令

$$\overline{h_i}=\sum_{j\in E}h_{ij}\,min(e^{u_i-u_j},1)$$

及

$$\overline{h_{ij}}=\begin{cases}h_{ij} & i\neq j\\ h_{ij}+(1-\overline{h_i}) & i=j\end{cases}$$

即$\overline{h_{ij}}=(1-\overline{h_i})\delta_{ij}+h_{ij}$，且令$\overline{\mathbf{H}}=(\overline{h_{ij}})_{i,j\in E}$，则

$$\overline{P}=A\otimes\overline{\mathbf{H}}$$

是有势$\{u_i,\ i\in E\}$的马尔科夫矩阵。

类似地有

推论 2　一切有势$\{u_i,i\in E\}$的Q矩阵都可表为

$$Q=\mathbf{A}\otimes\mathbf{H}$$

其中$\mathbf{A}$由(2)确定，$\mathbf{H}$是对称矩阵，满足：

$$h_{ii}\leqslant 0,\quad h_{ij}\geqslant 0\quad i,j\in E,\quad i\neq j$$

$$\sum_{j\in E}h_{ij}\,min(e^{u_i-u_j},1)\leqslant 0$$

特别，当$\sum\limits_{j\in E}h_{ij}\leqslant 0$时，即$\mathbf{H}$本身是对称$Q$矩阵时，上述条件总成立。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

〔1〕 Spitzer,F., *Principles of Random Walk*, New York, 1964.
〔2〕 錢敏、侯振挺等，可逆马尔科夫过程，湖南科学技术出版社，1979.

On Markov Chains with a Potential

Dai Yonglong

Abstract

Let E is a finite or countable infinite set, and $A=(a_{ij},\ i,\ j\in E)$ is a real-values ma- trix, which satisfies the following conditions:

1) If $i\neq j$ and $i,\ j\in E$, then $a_{ij}\geqslant 0$

2) $a_{ij}>0 \Rightarrow a_{ij}>0 \qquad i,j\in E$

when $a_{ij}>0$, we let

$$\varphi_{ij}=\log\frac{a_{ji}}{a_{ij}}$$

The real number sequence $(u_i,\ i\in E)$ is called the potential of A if it satisfies the following condition

$$u_j-u_i=\varphi_{ij}$$

In this paper, we have given two notes on the matrix with a potential, and then apply them to Markov chain and Q-martrix, thus the general form of Markov chain and Q-matrix with a potential is obtained.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net