

关于Poisson过程一个定理的简单证明

戴永隆
(数学力学系)

定理 设 P_μ, P_λ 分别是有强度测度 μ 及 λ 的Poisson分布, 则:

$$P_\mu \perp P_\lambda \text{ 当且仅当 } K_d(\mu, \lambda) = +\infty;$$
$$P_\mu \ll P_\lambda \text{ 当且仅当 } \mu \ll \lambda \text{ 而且 } k_d(\mu, \lambda) < \infty.$$

上述定理是Poisson过程一个重要结果。关于定理中所出现的一切记号和用到的事实, 我们在下面分别予以说明, 然后给出简短证明。

1. 设 (X, d) 是可分完备距离空间, 以 \mathbf{A} 记 (X, d) 中全体Borel集类, 以 \mathbf{B} 记 \mathbf{A} 中全体有界集类。显然 \mathbf{B} 是一环, 由它所产生的 σ 代数就是 \mathbf{A} 。

设 μ 是 \mathbf{A} 上的测度, 如对任意 $A \in \mathbf{B}, \mu(A) < \infty$, 则称 μ 是局部有限测度, 全体局部有限测度记作 \mathbf{M} 。

在 \mathbf{M} 上引进 σ 代数 \mathbf{M} , 使得: 对一切 $A \in \mathbf{B}$, 映象 $\mu \setminus \mu(A)$ 都是 \mathbf{M} 至 \mathbf{R} 的可测映象的最小 σ 代数。

如 $\mu \in \mathbf{M}, \mu(A) (A \in \mathbf{B})$ 只取非负整数值, 则称 μ 是计数测度, 全体计数测度记作 $\mathbf{N}, \mathbf{N} \subset \mathbf{M}$, 而且 $\mathbf{N} \in \mathbf{M}$ (见[1])。令 $\mathbf{N} = \mathbf{N} \cap \mathbf{M}$ 。

在 (\mathbf{N}, \mathbf{N}) 上任给一概率测度 P , 则 P 称为随机点分布。 \mathbf{N} 中的元以 ν 记之。

如果 P 是 (\mathbf{N}, \mathbf{N}) 上的分布, 对任意互不相交的 $A_1, \dots, A_m \in \mathbf{B}$, 非负整数 j_1, \dots, j_m 满足

$$P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) = P(\nu; \nu(A_1) = j_1, \dots, \nu(A_m) = j_m)$$
$$= \prod_{i=1}^m P(\nu; \nu(A_i) = j_i) = \prod_{i=1}^m P_{A_i}(j_i)$$

则称 P 是无后效的。如果 P 是 (\mathbf{N}, \mathbf{N}) 上的无后效分布, 且存在 $\mu \in \mathbf{M}$, 以及对任意 $A \in \mathbf{B}$ 有

$$P_A(j) = e^{-\mu(A)} \frac{1}{j!} (\mu(A))^j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

则称 P 是Poisson分布, 记作 P_μ , 而 μ 称为 P_μ 的强度测度。(见[1]第一章)

2. 设 (Ω, \mathbf{F}) 是任意概率空间, E, F 是 \mathbf{F} 上的全有限测度, 任取 \mathbf{F} 上的全有限测度 G , 使 $E \ll G, F \ll G$ (例如取 $G = E + F$), 令

$$K_\rho(E, F) = \int \sqrt{\frac{dE}{dG} \frac{dF}{dG}} dG$$

其中 $\frac{dE}{dG}$ 、 $\frac{dF}{dG}$ 分别是 E 、 F 相对于 G 的 Radon-Nikodym 导数, $K_\rho(E, F)$ 称为 E 、 F 的 Kakutani 内积

又令

$$K_d(E, F) = \left(\int \left(\sqrt{\frac{dE}{dG}} - \sqrt{\frac{dF}{dG}} \right)^2 dG \right)^{\frac{1}{2}}$$

称为 E 、 F 的 Kakutani 距离。

命题(1) $E \perp F$ 当且仅当 $K_\rho(E, F) = 0$ (参看[4], § 1.4)

命题(2) 设 (Ω_k, \mathbf{F}_k) ($k = 1, 2, \dots$) 是一列可测空间, E_k, F_k 是 (Ω_k, \mathbf{F}_k) 上的概率测度, 记

$$(\Omega, \mathbf{F}) = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k, \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{F}_k \right), E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k, F = \prod_{k=1}^{\infty} F_k$$

则恒有

$$K_\rho(E, F) = \prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(E_k, F_k) \quad (\text{参看[3], 定理1})$$

在命题(2)的条件下, 如对一切 k , $E_k \ll F_k$, 则当 $K_\rho(E, F) > 0$ 时, 有 $E \ll F$ 。(参看[4], § 1.4)

3. 现设 $\mu \in M$, 对任意 $A \in \mathbf{B}$, 令

$${}_A\mu(\cdot) = \mu((\cdot) \cap A)$$

则 ${}_A\mu$ 是 (X, \mathbf{A}) 上的全有限测度

当 $\mu, \lambda \in M$, 任取 $r \in M$, 使 $\mu \ll r, \lambda \ll r$, 令

$$K_\rho(\mu, \lambda)(A) = \int_A \sqrt{\frac{d\mu}{dr} \frac{d\lambda}{dr}} dr \quad A \in \mathbf{B}$$

显然 $K_\rho(\mu, \lambda)(A) = K_\rho({}_A\mu, {}_A\lambda)$ 。同样可以定义 $K_d(\mu, \lambda)(\cdot)$ 。且 $K_d(\mu, \lambda)(A) = K_d({}_A\mu, {}_A\lambda)$ ($A \in \mathbf{B}$)

由于 $K_\rho(\mu, \lambda)(\cdot), K_d(\mu, \lambda)(\cdot)$ 是环 \mathbf{B} 上的测度, 因而可以扩张为 (X, \mathbf{A}) 上的测度, 而且有

$$K_\rho(\mu, \lambda)(\cdot) \in M, K_d(\mu, \lambda)(\cdot) \in M$$

特别, 记 $K_\rho(\mu, \lambda) = K_\rho(\mu, \lambda)(X), K_d(\mu, \lambda) = K_d(\mu, \lambda)(X)$ 。但这时可能有

$$K_d(\mu, \lambda) = +\infty$$

命题(3) 设 μ, λ 都是 (X, \mathbf{A}) 上的有限测度,

则

$$K_\rho(P_\mu, P_\lambda) = \exp(-\frac{1}{2} K_d(\mu, \lambda)^2) \quad (\text{见[1], p.89})$$

4. 定理的证明 设 (A_n) 是 X 的一个分割, 即 $A_n \in \mathbf{B}$, 且 (A_n) 是互不相交集列, $\bigcup_n A_n = X$

令

$$\mu_n = {}_{A_n}\mu \quad \lambda_n = {}_{A_n}\lambda$$

则 P_μ 与 P_λ 分别对应 $\prod_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n}$, $\prod_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n}$. 由于 Poisson 过程是无后效的, 因此

$$P_\mu \perp P_\lambda \quad \text{当且仅当} \quad \prod_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n} \perp \prod_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n}$$

$$P_\mu \ll P_\lambda \quad \text{当且仅当} \quad \prod_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n} \ll \prod_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n}$$

应用命题(2)、(3), 得

$$\begin{aligned} K_\rho \left(\prod_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n}, \prod_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n} \right) &= \prod_{n=1}^{\infty} K_\rho(P_{\mu_n}, P_{\lambda_n}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} K_d(\mu_n, \lambda_n)^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_d(\mu_n, \lambda_n)^2\right) \end{aligned}$$

现设 $\gamma \in M$, $\mu \ll \gamma$, $\lambda \ll \gamma$, 且记 $\gamma_n = {}_{A_n} \gamma$, 则

$$\begin{aligned} K_d(\mu_n, \lambda_n)^2 &= \int_{A_n} \left(d \sqrt{\frac{\mu_n}{d\gamma_n}} - \sqrt{\frac{d\lambda_n}{d\gamma_n}} \right)^2 \gamma_n(da) \\ &= \int_{A_n} \left(\sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}} - \sqrt{\frac{d\lambda}{d\gamma}} \right)^2 \gamma(da) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} K_d(\mu_n, \lambda_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \left(\sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}} - \sqrt{\frac{d\lambda}{d\gamma}} \right)^2 \gamma(da) \\ &= K_d(\mu, \lambda) \end{aligned}$$

从而 $K_\rho \left(\prod_{n=1}^{\infty} P_{\mu_n}, \prod_{n=1}^{\infty} P_{\lambda_n} \right) = 0$ 当且仅当 $K_d(\mu, \lambda) = +\infty$. 于是 $P_\mu \perp P_\lambda$ 当且仅当 $K_d(\mu, \lambda) = \infty$ (应用命题(1)、(2)), 而 $P_\mu \ll P_\lambda$ 当且仅当 $\mu \ll \lambda$ 及 $K_d(\mu, \lambda) < +\infty$ (应用命题(2)) 证毕.

Poisson 过程的这一重要结果, 按照上面的叙述及证明, 与 [1] 中定理 1.7.12 和定理 1.12.3 的叙述及证明比较起来就简明得多了. 而证明中引用的结果并不比 [1] 所引用的更复杂些.

参 考 文 献

- [1] Kerstan, J., Matthes, K. and Mecke, J., *Infinitely Divisible Point Processes*, Wiley, New York, (1978).
- [2] Brown, M., Discrimination of Poisson Processes. *Ann. Math. statist.* 42(1971), 773—776.
- [3] Brody, E.J., An elementary proof of the Gauss dichotomy theorem, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 20 (1971), 219—226.
- [4] 夏道行, 无穷维空间上测度与积分论(上册), 上海科学技术出版社, (1965).

A Short Proof of a Theorem of Poisson Processes

Dai yonglong

Abstract

In this paper, we have given a short proof of the following theorem: Let P_μ and P_λ be Poisson distributions which have the intensity measures μ and λ respectively, then $P_\mu \perp P_\lambda$, if and only if $K_d(\mu, \lambda) = +\infty$, and $P_\mu \ll P_\lambda$, if and only if $\mu \ll \lambda$ and $K_d(\mu, \lambda) < +\infty$, Where $K_d(\mu, \lambda)$ is Kakutuni metric between μ and λ .