# 連续Potts模型的相变

陈代森　　周义昌　　黄念宁

暨南大学（物理学系）　　中山大学（物理学系）　　暨南大学（物理学系）

## 摘　要

对于连续的Potts模型的相变，应用重正化群方法处理到$\epsilon^2$数.证明在三维空间的情况下，只有当三次项相互作用不存在时，模型的相变才是连续的.

## （一）

Potts模型的相变类型是一个有争议的问题。朗道的平均场理论认为[1]，只要存在三次项相互作用，相变就是一级的。而Alexander[2]从估计有序轴的涨落，认为三次项相互作用的系数较小时，相变是二级的。Amit和Shcherbakov[3]用重正化群方法处理了这一问题到$\epsilon^1$级，对于相变类型与平均场理论相同。R.Oppermann[4]用$\frac{1}{n}$展开方法，也得到相同的结论。可是，描述液晶相变的Q模型和渗透问题的ATP模型的理论计算[5]，与平均场理论差别甚大，因此，相变类型值得进一步讨论[6,7]。

文献[3,6,7]都是用重正化群方法处理到$\epsilon^1$级，结论不尽相同。而用重正化群方法计算到$\epsilon^1$级，只是考虑到单圈图的贡献对树图（即平均场理论）的修正。因此计算到$\epsilon^2$级以考虑双圈以上的图的贡献，显然是有意义的。本工作的结果表明，在直到$\epsilon^2$级，当空间维数为3时，仍然在只有三次项相互作用不存在时，相变才是连续的。

## （二）

三态Potts模型的哈密顿量密度为[3]

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}[(\nabla\phi)^3+m_0^2\phi^2]+\frac{\lambda_{30}}{3!}(\phi_1^3-3\phi_1\phi_2^2)+\frac{\lambda_{40}}{4!}(\phi^2)^2 \tag{1}$$

式中$\phi$为二分量序参量场，$m_0$、$\lambda_{30}$、$\lambda_{40}$分别是裸质量和裸耦合常数。

按重正化的一般理论，已重正化的和裸的1PI顶角的关系为

$$\Gamma_R^{(N)}(k_i,u_3,u_4,\kappa)=Z_\phi^{N/2}(u_3,u_4,\kappa,\Lambda)\Gamma^{(N)}(k_i,u_{30},u_{40},\Lambda) \tag{2}$$

其中$u_{30}, u_{40}$和$u_3, u_4$分别是裸的和已重正化的无量纲耦合常数，$\kappa$为重正化时引入的质量参数，除了将角因子吸收进耦合常数外，

$$u_{30} = \lambda_{30}\kappa^{-(\frac{\epsilon}{2}+1)}$$

$$u_{40} = \lambda_{40}\kappa^{-\epsilon} \tag{3}$$

其中$\epsilon = 4-d$，$d$为空间维数。除去1PI顶角的对称因子之后，重正化条件为

$$\Gamma_R^{(2)}(k)\Big|_{k^2=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma_R^{(2)}(k, u_3, u_4, \kappa)\Big|_{k^2=\kappa^2} = 1 \tag{4}$$

$$\Gamma_R^{(4)}(k_i, u_3, u_4, \kappa)\Big|_{s.p} = u_4\kappa^{\epsilon}$$

$$\Gamma_R^{(3)}(k_i, u_3, u_4, \kappa)\Big|_{\overline{s.p}} = u_3\kappa^{\frac{\epsilon}{2}+1}$$

式中 $s.p$ 和 $\overline{s.p}$ 分别表示如下对称点

$$s.p: k_ik_j = \frac{\kappa^2}{3}(4\delta_{ij}-1)$$

$$\overline{s.p}: k_ik_j = \frac{\kappa^2}{4}(4\delta_{ij}-1) \tag{5}$$

重正化后的1PI顶角遵从如下重正化群方程

$$\left[\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa} + \beta_3(u_3, u_4)\frac{\partial}{\partial u_3} + \beta_4(u_3, u_4)\frac{\partial}{\partial u_4} - \frac{1}{2}N\gamma_\phi(u_3, u_4)\right]\Gamma_R^{(N)}(k_i, u_3, u_4, \kappa) = 0 \tag{6}$$

其中

$$\gamma_\phi = -\left(\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\ln Z_\phi\right)_{\lambda_{30}, \lambda_{40}}.$$

$$\beta_3(u_3, u_4) = \left(\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}u_3\right)_{\lambda_{30}, \lambda_{40}}$$

$$= -\left(\frac{\epsilon}{2}+1\right)\left(\frac{\partial\ln u_{30}}{\partial u_3}\right)^{-1} - \epsilon\left(\frac{\partial\ln u_{40}}{\partial u_3}\right)^{-1} \tag{7}$$

$$\beta_4(u_3, u_4) = \left(\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}u_4\right)_{\lambda_{30}, \lambda_{40}}$$

$$= -\left(\frac{\epsilon}{2}+1\right)\left(\frac{\partial\ln u_{30}}{\partial u_4}\right)^{-1} - \epsilon\left(\frac{\partial\ln u_{40}}{\partial u_4}\right)^{-1}$$

解重正化群方程并应用量纲分析[9]

$$\Gamma_R^{(N)}(\rho k_i, u_3, u_4, \kappa) = \rho^{N+d-\frac{Nd}{2}-\frac{N}{2}\gamma_\phi(u^*)}\Gamma_R^{(N)}(k_i, u_3(\rho), u_4(\rho), \kappa) \tag{8}$$

其中$u^* = (u_3^*, u_4^*)$，它是由

$$\beta_3(u^*)=\beta_4(u^*)=0 \tag{9}$$

决定的不动点，$u_3(\rho)$和$u_4(\rho)$为

$$u_3(\rho)=u_3^*+A\rho^{\omega_1}+B\rho^{\omega_2}$$

$$u_4(\rho)=u_4^*+C\rho^{\omega_1}+D\rho^{\omega_2} \tag{10}$$

上式的$\omega_1$，$\omega_2$为矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\beta_3}{\partial u_3} & \dfrac{\partial\beta_3}{\partial u_4} \\[2ex] \dfrac{\partial\beta_4}{\partial u_3} & \dfrac{\partial\beta_4}{\partial u_4} \end{pmatrix} \tag{11}$$

在$u=u^*$时 的 本征值，$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}$为相应的本征矢。事实上，$u_3(\rho)$，$u_4(\rho)$为下列方程之解

$$\rho\frac{du_3(\rho)}{d\rho}=\beta_3(u_3(\rho),u_4(\rho)) \tag{12}$$

$$\rho\frac{du_4(\rho)}{d\rho}=\beta_4(u_3(\rho),u_4(\rho))$$

且满足初条件

$$u_3(1)=u_3 \tag{13}$$

$$u_4(1)=u_4$$

因而

$$A+B=u_3-u_3^* \tag{14}$$

$$C+D=u_4-u_4^*$$

从(10)式可见，若$\omega_1$及$\omega_2$都大于零，当$\rho$趋于零时，$u_3$和$u_4$分别趋于$u_3^*$和 $u_4^*$，此时不动点是红外稳定，解(8)所得的1PI顶角符合标度律，相变是二级的，即连续的。反之，则顶角函数不符合标度律，相变是一级的，即非连续的。

## （三）

重正化函数$Z_\phi(u_3,u_4,\kappa)$、裸耦合常数$u_{30}$，$u_{40}$是重正化了的耦合常数$u_3$、$u_4$ 及$\epsilon$ 的 函数。把它们按$u_3$，$u_4$展开到三次方级，设

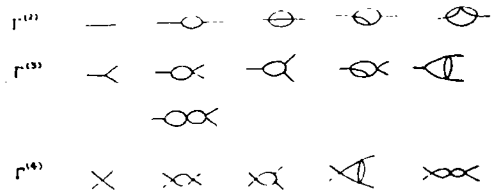
$$Z_\phi=1+a_1u_3^2+a_2u_4^2+a_3u_3u_4+a_4u_3^3+a_5u_4^3+a_6u_3u_4^2+a_7u_3^2u_4$$

$$u_{30}=u_4(1+b_1u_3+b_2u_4+b_3u_3u_4+b_4u_2^2+b_5u_4^2) \tag{15}$$

$$u_{40}=u_4(1+c_1u_3+c_2u_4+c_3u_3u_4+c_4u_3^2+c_5u_4^2)$$

(15)式的各项系数$a_i$，$b_i$及$c_i$都是$\epsilon$的函数。在准到重正化了的耦合常数的三次方级，只需

考虑如下图形的贡献：




计算得：

$$\frac{d}{dk^2}\Gamma^{(2)}(k)\Big|_{k^2=\kappa^2}=1+A_1u_{30}^2+A_2u_{40}^2+A_3u_{30}^2u_{40}+A_4u_{40}^3$$

$$\Gamma^{(3)}(k_i)\Big|_{sp}=\kappa^{1+\frac{\epsilon}{2}}(u_{30}+B_1u_{30}u_{40}+B_2u_{30}u_{40}^2) \tag{16}$$

$$\Gamma^{(4)}(k_i)\Big|_{sp}=\kappa^{\epsilon}(u_{40}+D_1u_{40}^2+D_2u_{40}^3+D_3u_{40}u_{30}^2)$$

上述$A_i$,$B_i$及$D_i$都是$\epsilon$的级数，为使结果准到$\epsilon^2$级，计算近似取到：

$$A_1=\frac{1}{2}(1+\frac{\epsilon}{2}) \qquad A_2=\frac{1}{36\epsilon}(1+\frac{5}{4}\epsilon)$$

$$A_3=-\frac{1}{3\epsilon}(1+\frac{3}{2}\epsilon) \qquad A_4=-\frac{5}{81\epsilon^2}(1+2\epsilon)$$

$$B_1=-\frac{1}{\epsilon}(1+\frac{\epsilon}{2}) \qquad B_2=\frac{1}{3\epsilon^2}(4+\frac{11}{2}\epsilon)$$

$$D_1=-\frac{5}{3\epsilon}(1+\frac{\epsilon}{2}) \qquad D_2=\frac{1}{9\epsilon^2}(25+33\epsilon)$$

$$D_3=\frac{1}{6}(1+\frac{3}{2}\epsilon)$$

由重正化条件定出

$$Z_\phi^{-1}=\frac{d}{dk^2}\Gamma^{(2)}(k)\Big|_{k^2=\kappa^2}$$

$$u_3=\kappa^{-(1+\frac{\epsilon}{2})}Z_\phi^{3/2}\Gamma^{(3)}(k_i)\Big|_{sp} \tag{18}$$

$$u_4=\kappa^{-\epsilon}Z_\phi^2\Gamma^{(4)}(k_i)\Big|_{sp}$$

代入以上的结果得：

$$u_3=u_{30}+B_1u_{30}u_{40}-\frac{3}{2}A_1u_{30}^2+(B_2-\frac{3}{2}A_2)u_{30}u_{40}^2$$

$$u_4=u_{40}+D_1u_{40}^2+(D_2-2A_2)u_{40}^3+(D_3-2A_1)u_{40}u_{30}^2 \tag{19}$$

由此解出

$$u_{30}=u_3\left[1-B_1u_4^2+\frac{3}{2}A_1u_3^2+\left(\frac{3}{2}A_2+B_1D_1+B_1^2-B_2\right)u_4^2\right]$$

$$u_{40}=u_4\left[1-D_1u_4+(2A_1-D_3)u_3^2+(2A_2-D_2+2D_1^2)u_4^2\right] \tag{20}$$

代入(7)式得

$$\beta_3(u_3,u_4)=u_3\left[-\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)+\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)u_4-\frac{11}{12}u_4^2+\frac{3}{2}u_3^2\right]$$

$$\beta_4(u_3,u_4)=u_4\left[-\epsilon+\frac{5}{3}\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)u_4-\frac{5}{3}u_4^2+\frac{2}{3}u_3^2\right] \tag{21}$$

## (四)

令$\beta_3(u_3^*,u_4^*)=\beta_4(u_3^*,u_4^*)=0$，求得四个不动点：

(1) Gauss不动点

$$u_3^*=u_4^*=0 \tag{22}$$

(2) Heisenberg 不动点

$$u_4^*=0 \tag{23}$$

$$u_4^*=\frac{3}{5}\epsilon\left(1+\frac{1}{10}\epsilon\right)$$

(3) 另一个Heisenberg型不动点

$$u_3^*=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{\epsilon}{4}\right) \tag{24}$$

$$u_4^*=0$$

(4) $u_3^*$ 及 $u_4^*$ 都不为零的不动点，由联立方程

$$-\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)+\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)u_4^*-\frac{11}{12}u_4^{*2}+\frac{3}{2}u_3^{*2}=0 \tag{25}$$

$$-\epsilon+\frac{5}{3}\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)u_4^*-\frac{5}{3}u_4^{*2}+\frac{2}{3}u_3^{*2}=0$$

决定。

上述四个不动点之中，Gauss不动点的稳定判别矩阵(11)的本征值$\omega_1=-\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)$及$\omega_2=-\epsilon$都小于零，它是红外不稳定的，(3)、(4)两个不动点也是红外不稳定的，这里不讨论它。

不动点(23)的稳定判别矩阵是

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{\epsilon}{10}+\frac{3}{100}\epsilon^2, & 0 \\ 0\quad, & \epsilon\ (1-\frac{3}{5}\epsilon) \end{pmatrix}$$

它的本征值

$$\omega_1=-1+\frac{\epsilon}{10}+\frac{3}{100}\epsilon^2 \tag{26}$$

$$\omega_2=\epsilon\ \ (1-\frac{3}{5}\epsilon)$$

对于维数$d=3$即$\epsilon=1$的物理情况，$\omega_1<0$，$\omega_2>0$，由(10)式，

$$u_3(\rho)=u_3\rho^{\left(-1+\frac{\epsilon}{10}+\frac{3}{100}\epsilon^2\right)} \tag{27}$$

$$u_4(\mu)=u_4^*+(u_4-u_4^*)\rho^{\epsilon(1-\frac{3}{5}\epsilon)}$$

由此，除非$u_3=0$，否则$\rho\to0$时，$u_3(\rho)$将远离不动点，1PI顶角函数就不符合标度律，相变就不是连续的二级相变。即是说，当Potts模型的相互使用的三次方项系数不为零时，在$d=3$维的空间，它的相变只能是不连续的一级相变。

## 参 考 文 献


〔1〕Л. Д. 朗道，统计物理学(1958年中译本)，人民教育出版社.

〔2〕S. Alexander, *Solid State Commun.*,14(1974),1069.

〔3〕D.Amit,A.Shcherbakov, *Journal of phys.*,C7(1974),L96.

〔4〕R.Oppermann, *Journal of phys.*,*A*8(1975)L43.

〔5〕K.Priest, *Phys. Rev.*, B13(1976),4159,

〔6〕C.Vause, J.Sak, *Phys.Rev.*,B18(1978),1455.

〔7〕E.Pytte, *Phys.Rev.*,B22(1980),4450.

〔8〕A.Aharany,E.Pytte,*Phys. Rev.*,B23(1981),362.

〔9〕D.Amit, Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena, McGaw-Hill Inc. (1978).


# The Phase Transition in the Continuous Potts Model

*Chen Daisen*　　*Zhou Yichang*　　*Huang Nianning*


### Abstract

The renormalization group technique is applied to the phase transition of the continuous Potts model to the accuracy of order $\epsilon^2$. It is shown that at three dimensions the phase transition exhibits continuous, if and only if the cubic term vanishes.