Rossby 波的不稳定性

周清甫
（数学力学系）

摘　要

本文利用 Benjamin 边波带干扰的概念，考察了 Rossby 波的不稳定性，给出了不稳定性判据.

如果考虑大气层或海洋的大范围运动，不计粘性影响，但计及由于地球旋转引起的柯氏力水平分量，在β平面假定下流层的运动方程为[1]

$$\frac{D}{Dt}(\nabla^2-\alpha^2)\phi+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\alpha^2=f_0^2/gh,\qquad \beta=df/dy,\qquad f=f_0+\beta(y-y_0)$$

D/Dt 是物质导数．h—流层厚度

坐标系的规定是：x轴从西向东，y轴取南北向，经无量纲化(仍用t,x,y表示无量纲量)，方程(1)为：

$$\frac{D}{Dt}(\nabla^2-1)\phi+\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

它有一个波动解：

$$\phi_0=a\cos\theta. \tag{3}$$

其中

$$\theta=kx+ly-\sigma t.$$

(k,l,σ)满足频散关系

$$(k^2+l^2+1)\sigma+k=0 \tag{4}$$

本文目的是证明基本波(3)在下述干扰ϕ_1、ϕ_2作用下，若条件(9)满足，则运动不稳定；若(9)不满足，则运动稳定．ϕ_1,ϕ_2为：

$$\begin{cases}\phi_1=a_1\cos\theta_1\\ \phi_2=a_2\cos\theta_2\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\theta_1=k_1(1+m)x+l_1(1+n)y-\sigma_1(1+\sigma')t-\gamma_1\\ \theta_2=k_2(1-m)x+l_2(1-n)y-\sigma_2(1-\sigma')t-\gamma_2\end{cases} \tag{6}$$

并且(k_1,l_1,σ_1)，(k_2,l_2,σ_2)满足(4)

$$(k_1^2+l_1^2+1)\sigma_1+k_1=0$$

$$(k_2^2+l_2^2+1)\sigma_2+k_2=0 \tag{7}$$

以及共振干扰条件：

$$\left.\begin{aligned} &k_1+k_2-k=0\\ &l_1+l_2-l=0\\ &\sigma_1+\sigma_2-\sigma=0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

文献〔2〕指出，满足条件(7)、(8)的(k_1,l_1,σ_1)和(k_2,l_2,σ_2)总是存在的。判别条件(9)式为

$$k_1^2+l_1^2<k^2+l^2<k_2^2+l_2^2 \tag{9}$$

这种不稳定性概念是Benjamin[3]在研究水波不稳定性时提出来的，称为边带波干扰不稳定性。

由(6)、(8)可知

$$\left.\begin{aligned} &\theta-\theta_1=\theta_2+\gamma+o(m)\\ &\theta-\theta_2=\theta_1+\gamma+o(m) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$，由此可预估到在二阶干扰下，ϕ_0、ϕ_1可以激发ϕ_2，而ϕ_0、ϕ_2也可以激发ϕ_1。这就有可能产生相互激发作用，使基本波ϕ_0不稳定。

为了使ϕ_1、ϕ_2是一个有意义的干扰波，还应要求$(k_1(1+m),\ l_1(1+n),\ \sigma_1(1+\sigma'))$、$(k_2(1-m),\ l_2(1-n),\ \sigma_2(1-\sigma'))$满足近似的频散关系，即要求它们代入(7)后其线性部分为零，而二阶项让其在非线性调制中与其他量取得平衡，这可通过a_1，a_2，γ随时间缓慢变化来实现，“边波带”概念认为(m,n,σ')是小量：

$$(m,n,\sigma')=0(ka) \tag{11}$$

由此给出线性部分为0的式子：

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(k_1^2+l_1^2+1)\sigma'+k_1(1+2\sigma_1k_1)m+2\sigma_1l_1^2n=0\\ &\sigma_2(k_2^2+l_2^2+1)\sigma'+k_2(1+2\sigma_2k_2)m+2\sigma_2l_2^2n=0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

(12)给出了约束(m,n,σ')的两个线性方程，所以其中只有一个量可以任意选择（在一阶范围内），由(12)知：选定其中之一量，例如m是$0(ka)$阶，则n、σ'也是$0(ka)$阶。这就使(11)式的提法成立，由(12)还可得到以后要用的式子：

$$\left\{k_1^2(1+m)^2+l_1^2(1+n)^2+1\right\}\sigma_1(1+\sigma')+k_1(1+m)$$
$$=2\sigma_1\sigma'(k_1^2m+l_1^2n)+\sigma_1(k_1^2m^2+l_1^2n^2)=0(k^2a^2)$$
$$\left\{k_2^2(1-m)^2+l_2^2(1-n)^2+1\right\}\sigma_2(1-\sigma')+k_2(1-m)$$
$$=2\sigma_2\sigma'(k_2^2m-l_2^2n)+\sigma_2(k_2^2m^2+l_2^2n^2)=0(k^2a^2) \tag{13}$$

现在开始证明稳定性问题。取ϕ为：

$$\phi=\phi_0+\phi_1+\phi_2+P_1aa_1\sin(\theta+\theta_1)+P_2aa_2\sin(\theta+\theta_2) \tag{14}$$

ϕ中的ϕ_1、ϕ_2是干扰项，ϕ_0为主波，而$P_1aa_1\sin(\theta+\theta_1)$、$P_2aa_2\sin(\theta+\theta_2)$是在两阶调制中引起的非共振干扰项，$P_1$、$P_2$在解题中决定。将$\phi$简写为$\phi=\phi_0+\phi$，代入(14)，注意到$\phi_0$满足方程(2)，就可得：

$$(\nabla^2\phi-\phi)_t+\phi_x=a(k^2+l^2)(l\phi_x-k\phi_y)\sin\theta$$
$$-a(k\nabla^2\phi_y-l\nabla^2\phi_x)\sin\theta+\phi_x\nabla^2\phi_y-\phi_y\nabla^2\phi_x \tag{15}$$

代$\phi=a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2+P_1aa_1\sin(\theta+\theta_1)+P_2aa_2\sin(\theta+\theta_2)$到(15)中，运用(8)、(10)，并把$a_1$、$a_2$、$\gamma_1$、$\gamma_2$视为时间$t$的缓慢变化函数，忽略三阶项：

方程(15)的左边项为

$$-(\tau_1^2+1)\dot{a}_1\cos\theta-(\tau_2^2+1)\dot{a}_2\cos\theta_2-\sigma_2'(\tau_1^2+1)a_1\sin\theta_1$$
$$-\sigma_2'(\tau_2^2+1)a_2\sin\theta_2-(\tau_1^2+1)a_1\sigma_1'\sin\theta_1-(\tau_2^2+1)a_2\sigma_2'\sin\theta_2$$
$$-a_1(\tau_1^2+1)\dot{\gamma}_1\sin\theta_1-a_2(\tau_2^2+1)\dot{\gamma}_2\sin\theta_2-a_1k_1'\sin\theta_1$$
$$-a_2k_2'\sin\theta_2+P_1aa_1\left\{(\tau_3^2+1)\sigma_3+k_3\right\}\cos(\theta+\theta_1)$$
$$+P_2aa_2\left\{(\tau_4^2+1)\sigma_4+k_4\right\}\cos(\theta+\theta_2)+0(a^2a_1,a^2a_2,a_1a_2) \tag{16}$$

(15)的右边为：

$$\frac{1}{2}aa_2M\ (\tau_2^2-\tau^2)\cos(\theta_1+r)+\frac{1}{2}aa_1M(\tau^2-\tau_1^2)\cos(\theta_2+\gamma)$$
$$+\frac{1}{2}aa_1M(\tau_1^2-\tau^2)\cos(\theta+\theta_1)+\frac{1}{2}aa_2M(\tau^2-\tau_2^2)\cos(\theta+\theta_2). \tag{17}$$

比较$\cos(\theta+\theta_1)$、$\cos(\theta+\theta_2)$的项，则P_1、P_2即可确定：

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\frac{1}{2}M\ (\tau_1^2-\tau^2)\left\{(\tau_3^2+1)\sigma_3+k_3\right\}^{-1}\\P_2&=\frac{1}{2}M(\tau^2-\tau_2^2)\ \left\{(\tau_4^2+1)\sigma_4+k_4\right\}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

上述几个式子中引入的新记号是

$$M=kl_1(1+n)-lk_1(1+m)=-lk_2(1-m)+kl_2(1-n)$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau^2=k^2+l^2,\tau_1^2=k_1^2(1+m)^2+l_1^2(1+n)^2\\&\tau_2^2=k_2^2(1-m)^2+l_2^2(1-n)^2\\&\tau_3^2=[k+k_1(1+m)]^2+[l+l_1(1+n)]^2\\&\tau_4^2=[k+k_2(1-m)]^2+[l+l_2(1-n)]^2\\&k_3=k+k_1(1+m),\ \ \sigma_3=\sigma+\sigma_1(1+\sigma')\\&k_4=k+k_2(1-m),\ \ \sigma_4=\sigma+\sigma_2(1-\sigma')\\&\gamma=\gamma_1+\gamma_2,\ \ (\dot{\ })\equiv\frac{d}{dt}(\ ).\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$k_1' = k_1(1+m),\quad k_2' = k_2(1-m),\quad \sigma_1' = \sigma_1(1+\sigma'),\quad \sigma_2' = \sigma_2(1-\sigma')$$

由〔3〕的§4可以推知，不失一般性，可认为：$(\tau_3^2+1)\sigma_3+k_3\neq 0$，$(\tau_4^2+1)\sigma_4+k_4\neq 0$，这使(18)式有效。

展开$\cos(\theta_1+\gamma)$、$\cos(\theta_2+\gamma)$并比较(16)、(17)两式中$\sin\theta$、$\cos\theta$的系数，得两组方程：

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}aa_2M(\tau_2^2-\tau^2)\cos\gamma &= -(\tau_1^2+1)\dot{a}_1 \\ \frac{1}{2}aa_1M(\tau^2-\tau_1^2)\cos\gamma &= -(\tau_2^2+1)\dot{a}_2 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}aa_2M(\tau_2^2-\tau^2)\sin\gamma &= -(\tau_1^2+1)a_1\sigma_1' - a_1(\tau_1^2+1)\dot{\gamma}_1 - a_1k_1' \\ -\frac{1}{2}aa_1M(\tau^2-\tau_1^2)\sin\gamma &= -(\tau_2^2+1)a_2\sigma_2' - a_2(\tau_2^2+1)\dot{\gamma}_2 - a_2k_2' \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

这是两组调幅和调相的方程，引入符号：

$$\begin{aligned} &\nu_1 = 1+\tau_1^2,\quad \nu_2 = 1+\tau_2^2 \\ &\mu_1 = \tau_1^2-\tau^2,\quad \mu_2 = \tau^2-\tau_2^2 \end{aligned} \tag{22}$$

将(21)两式相加，得

$$\dot{\gamma} = -\frac{aM}{2}\sin\gamma\left(\frac{a_2\mu_2}{a_1\nu_1}+\frac{a_1\mu_1}{a_2\nu_2}\right)-(\sigma_1'+\sigma_2')-\left(\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}\right) \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{\mu_2}{\nu_1}\right)aa_2\cos\gamma \\ \dot{a}_2 &= \left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{\mu_1}{\nu_2}\right)aa_1\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

由(24)可得到第一个积分式：

$$\frac{\nu_1}{\mu_2}a_1^2-\frac{\nu_2}{\mu_1}a_2^2 = \text{const}. \tag{25}$$

(m,n,δ')是小量，所以若判别条件(9)不满足的话，则从(22)式可知μ_1、μ_2的符号相反而ν_1、ν_2始终为正数。此时(26)式变为

$$\frac{\nu_1}{|\mu_2|}a_1^2+\frac{\nu_2}{|\mu_1|}a_2^2 = \text{const}. \tag{26}$$

这即是说a_1、a_2不能被激发增长，运动是稳定的。这证明了问题的后半部分。现在证明当(9)满足时，运动不稳定。(9)式意味着μ_1、μ_2同号。不失一般性设$\mu_1<0$，$\mu_2<0$。

现在找第二个通积分。用(24)式可得：

$$\frac{d}{dt}(a_1a_2) = \frac{1}{2}aM\cos\gamma\left\{\frac{\mu_2}{\nu_1}a_2^2+\frac{\mu_1}{\nu_2}a_1^2\right\}$$

将(23)式乘以$a_1a_2\cos\gamma$，并利用$d\left(\frac{\nu_1}{\mu_2}a_1^2\right)/dt = Maa_1a_2\cos\gamma$可得第二个积分式：

$$a_1a_2\sin\gamma+\frac{1}{Ma}\left(\frac{\nu_1}{\mu_2}\ a_1^2\right)\left\{\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}+\overline{\sigma}\right\}=0$$

记
$$\alpha_1=\frac{1}{aM}\left[\left(\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}\right)+\overline{\sigma}\right]\left(\frac{\nu_1\nu_2}{\mu_1\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

$$A_1^2=\frac{\nu_1}{|\mu_2|}\ a_1^2,\quad A_2^2=\frac{\nu_2}{|\mu_1|}\ a_2^2,\quad \overline{\sigma}=\sigma_1'+\sigma_2'$$

则两个通积分可写为（注意$|\mu_1|=-\mu_1$）

$$\left.\begin{aligned}&A_1A_2\sin\gamma-\alpha_1A_1^2=\rho\\&A_1^2-A_2^2=-2\alpha_1\rho(1-\nu)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

其中ρ、ν是待定常数，由初始条件确定。将(25)两边平方，利用(29)式，则得：

$$\left(\frac{d}{dt}\ A_1^2\right)^2=\frac{B^2}{\alpha_1^2}\left\{(1-\alpha_1^2)A_1^4-2\alpha_1\rho\nu A_1^2-\rho^2\right\} \tag{29}$$

其中
$$B=\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}+\overline{\sigma}$$

此式与〔3〕中(44)式相同（只须将α改为$-\alpha_1$），由〔3〕的讨论可知，当

$$-1<\alpha_1<1 \tag{30}$$

时有解：

$$A_1^2(t)=C+D\cosh\left\{\left|\frac{B}{\alpha_1}\right|(1-\alpha_1^2)^{1/2}(t+\tau)\right\} \tag{31}$$

$$=C+D\cosh\left\{\left(\frac{\mu_1\mu_2}{\nu_1\nu_2}\right)^{1/2}|aM|(1-\alpha_1^2)^{1/2}(t+\tau)\right\}.$$

即振幅成正指数增长，运动不稳定。

留下的问题是：必须证明当m适当选择时，(30)式是满足的。由(19)和(22)可知

$$\alpha_1=\frac{1}{aM}\left(\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}+\overline{\sigma}\right)\left(\frac{\nu_1\nu_2}{\mu_1\mu_2}\right)^{1/2}$$

由(13)式可知：

$$\frac{k_1'}{\nu_1}+\frac{k_2'}{\nu_2}+\overline{\sigma}=\frac{1}{\nu_1}\left\{2\sigma_1\sigma'(k_1^2m+l_1^2n)+\sigma_1(k_1^2m^2+l_1^2n^2)\right\}$$
$$+\frac{1}{\nu_2}\left\{2\sigma_2\sigma'(k_2^2m+l_2^2n)+\sigma_2(k_2^2m^2+l_2^2n^2)\right\}=0(k^2a^2) \tag{32}$$

又因(9)的不等式总是成立的，所以

$$\mu_1\sim\mu_2=0(1) \tag{33}$$

而
$$M=0(1) \tag{34}$$

由(32)—(34)可知

$$\alpha_1 = 0(ka) \tag{35}$$

即α_1满足条件(30)

参 考 文 献

〔1〕 Longuet-Higgins *Proc. Ray. Soc.*, A 279(1965).

〔2〕 Longuet-Higgins *Proc. Roy. Soc.*, A 299(1967).

〔3〕 Benjamin. *J. Fluid Mech.*, 27(1967).

On Instability of Rossby Waves

Zhou Qingfu

Abstract

Using the Benjamin's concept of side-band perturbations, we consider the instability of Rossby waves. A instability criterion has been given.