多调节机构的直接控制系统的绝对稳定性

朱 思 铭

（数学力学系）

摘　　要

本文继续文〔1〕的工作，讨论多调节机构的直接控制系统的绝对稳定性．§1给出m个调节机构的直接控制系统判别其绝对稳定性的一个准则；§2就m＝2的情形将其判别准则化为不等式条件，从而消去了待定的参数；§3则就一般情形给出了判别系统绝对稳定的一系列不等式条件．

§　1

考虑具有m个调节机构的直接控制系统

$$\dot{x}A = x + B\phi(\sigma), \qquad \sigma = C^T x \tag{1}$$

这里x、σ分别为n、m维向量，A、B、C分别为$n\times n$、$n\times m$、$n\times m$阶常数矩阵，A的特征值均具负实部；ϕ为m维向量函数，其分量$\phi_i(\sigma)=\phi_i(\sigma_i)$且满足条件

$$\phi_i(0)=0, \quad 0\leqslant \sigma_i\phi_i(\sigma_i)\leqslant k_i\sigma_i^2, \quad (i=1, \cdots, m) \tag{2}$$

其中 $k_i>0$ 为常数。

取二次型加积分项的 Ляпунов 函数

$$V = x^T Hx + 2\sum_{i=1}^{m}\beta_i\int_0^{\sigma_i}\phi_i(\sigma_i)d\sigma_i \tag{3}$$

这里H是正定对称矩阵，$\beta_i\geqslant 0$。

定理1 对具m个调节机构的直接控制系统(1)，如存在正定对称矩阵G和参数 $\lambda_i>0$ $(i=1, \cdots, m)$ 使对称矩阵

$$S \triangleq \Lambda M\Lambda + \Lambda N + N^T\Lambda + L \tag{4}$$

是正定的，那么系统(1)是在角〔0，k_i〕$(i=1, \cdots, m)$内绝对稳定的．这里

$$\begin{aligned} &\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_m), && K = diag(k_1, \cdots\ k_m) \\ &R = diag(\beta_1, \cdots, \beta_m), && M = -C^T G^{-1} C, \\ &N = -2(C^T G^{-1}P - K^{-1}) && L = -2(P^T G^{-1}P + Q) \\ &P = HB + A^T C R, && Q = RC^T B + B^T C R \end{aligned} \tag{5}$$

其中M, L, Q为对称矩阵。而H是满足矩阵方程

$$A^T H + HA = -G \tag{6}$$

的正定对称矩阵。

证 对系统(1)求$\dot{V}$，利用(5)的记号和式(6)，有

$$\dot{V} = -x^T Gx + 2x^T P\phi + \phi^T Q\phi$$

于是

$$-\dot{V} = x^T Gx - 2x^T(P + \tfrac{1}{2}C\Lambda)\phi + \phi^T(K^{-1}\Lambda - Q)\phi + \phi^T\Lambda(C^T x - K^{-1}\phi) \tag{7}$$

对正定对称矩阵G有满秩矩阵D，满足

$$G = D^T D, \quad G^{-1} = (D^{-1})^T D^{-1} \tag{8}$$

利用(8)式可将(7)式化为

$$\begin{aligned}-\dot{V} &= [Dx - (D^{-1})^T(P + \frac{1}{2}C\Lambda)\phi]^T[Dx - (D^{-1})^T (P\frac{1}{2}C\Lambda)\phi] \\ &+ \phi^T [K^{-1}\Lambda - Q - (P + \frac{1}{2}C\Lambda)^T G^{-1}(P + \frac{1}{2}C\Lambda)]\phi \\ &+ \phi^T\Lambda(C^T x - K^{-1}\phi)\end{aligned} \tag{9}$$

由条件(2)显然有

$$k_i^{-1}\phi_i^2 \leqslant \sigma_i\phi_i \quad 即 \quad \Sigma\lambda_i(\phi_i\sigma_i - k_i^{-1}\phi_i\phi_i) \geqslant 0$$

可写成

$$\phi^T\Lambda(C^T x - K^{-1}\phi) \geqslant 0$$

计及$\lambda_i > 0$的假设，从(9)式知当$m\times m$阶矩阵

$$K^{-1}\Lambda - Q - (P + \frac{1}{2}C\Lambda)^T G^{-1}(P + \frac{1}{2}C\Lambda)$$

是正定时$\dot{V}$是负定的。上矩阵可利用记号(5)化简为

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}\Lambda C^T G^{-1} C\Lambda - \frac{1}{2}\Lambda(C^T G^{-1} P - K^{-1}) - \frac{1}{2}(C^T G^{-1} P - K^{-1})^T\Lambda - P^T G^{-1} P - Q \\ &= \frac{1}{4}(\Lambda M\Lambda + \Lambda N + N^T\Lambda + L) = \frac{1}{4}S\end{aligned}$$

即求得矩阵S正定时，$\dot{V}$是定负的。

因V函数(3)在条件(2)下是无限大定正函数。这样，便证明了当满足定理条件时对任何满足条件(2)的$\phi(\sigma)$，系统(1)是全局渐近稳定的。即系统(1)在角$[0, k_i]$ $(i = 1, \cdots, m)$内绝对稳定。定理证毕。

引理1 定理1中记号(5)表示的矩阵$L = (l_{ij})$有性质

$$l_{ii} = -4(P_i^T G^{-1} P_i + q_{ii}) \leqslant 0 \tag{10}$$

这里 $Q = (q_{ij})$，P_i为P的第i列向量。

证 根据 LaSalle 不等式[2]对任何n维向量x，y成立

$$(Hx + y)^T G^{-1}(Hx + y) \geqslant -2y^T A^{-1} x$$

这里H、G、A 的记号如(6)，G为正定对称矩阵。

现取 $x=b_i$，$y=\beta_i A^T C_i$，其中b_i，c_i分别为矩阵B，C的第i列向量。于是上式变为

$$P_i^T G^{-1} P_i \geqslant -q_{ii}$$

于是

$$l_{ii}=-4\left(P_i^T G^{-1} P_i+q_{ii}\right)\leqslant 0$$

引理1得证。

引理2 定理1中满足对称矩阵S为正定的$\{\lambda_i\}$，仅在有限区间$\{(\alpha_i^*,\ \beta_i^*)\}$成立。

证 考虑矩阵$S=(S_{ij})$的任一对角线元素

$$S_{kk}=m_{kk}\lambda_k^2+2n_{kk}\lambda_k+l_{kk}$$

因 $m_{kk}=-C_k^T G^{-1} C_k<0$，而$m_{kk}$，$n_{kk}$，$l_{kk}$均为定数。于是当

$$\lambda_k\geqslant\beta_k^*\triangleq\max\left\{0,\ -\frac{2n_{kk}}{m_{kk}}+1,\ -\frac{l_{kk}}{m_{kk}}\right\}$$

时有

$$\lambda_k\left(\lambda_k+\frac{2n_{kk}}{m_{kk}}\right)+\frac{l_{kk}}{m_{kk}}\geqslant\lambda_k+\frac{l_{kk}}{m_{kk}}\geqslant 0$$

即

$$S_{kk}=m_{kk}\left(\lambda_k^2+\frac{2n_{kk}}{m_{kk}}\lambda_k+\frac{l_{kk}}{m_{kk}}\right)\leqslant 0$$

但对角线元素S_{kk}是矩阵S的一阶主子式，S正定时要求$S_{kk}>0$，因此必须$\lambda_k<\beta_k^*$，

同理可证当$S_{kk}>0$时要求

$$\lambda_k>\alpha_k^*\triangleq\min\left\{0,\ -\frac{2n_{kk}}{m_{kk}}-1,\frac{l_{kk}}{m_{kk}}\right\}$$

这样便证明了S正定时λ_k的值不能超出有限区间$(\alpha_k^*,\ \beta_k^*)$，$k=1,\cdots,n$。引理2得证。

由二次多项式的性质，显然有如下的

引理3 对任一实二次多项式$a\lambda^2+2b\lambda+c$，如果λ仅在某有限区间成立

$$a\lambda^2+2b\lambda+c>0$$

则必然 $b^2-ac>0$，$a<0$，且λ的存在区间为

$$-\frac{b}{a}-\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}}<\lambda<-\frac{b}{a}+\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

如果$b>0$则可取$\lambda=-\dfrac{b}{a}>0$使$a\lambda^2+2b+c$达到最大值。

§ 2

现在详细讨论具二调节机构的直接控制系统（1），这时矩阵(4)化为

$$S=\begin{pmatrix} m_{11}\lambda_1^2+2n_{11}\lambda_1+l_{11} & m_{12}\lambda_1\lambda_2+n_{12}\lambda_1+n_{21}\lambda_2+l_{12} \\ m_{21}\lambda_1\lambda_2+n_{21}\lambda_2+n_{12}\lambda_1+l_{21} & m_{22}\lambda_2^2+2n_{22}\lambda_2+l_{22} \end{pmatrix} \tag{11}$$

由于矩阵M,L是对称的，所以矩阵S也是对称的。使对称矩阵S是正定的，其充分必要条件是它的主子式是正的即满足条件

$$m_{11}\lambda_1^2+2n_{11}\lambda_1+l_{11}>0 \tag{12}$$

$$(m_{11}\lambda_1^2+2n_{11}\lambda_1+l_{11})(m_{22}\lambda_2^2+2n_{22}\lambda_2+l_{22})-(m_{12}\lambda_1\lambda_2+n_{12}\lambda_1+n_{21}\lambda_2+l_{12})^2>0 \tag{13}$$

因G^{-1}正定及引理1有

$$m_{11}=-C_1^TG^{-1}C_1<0,\quad l_{11}\leqslant 0$$

存在$\lambda_1>0$满足不等式(12)的条件是

$$n_{11}>0,\quad n_{11}^2-m_{11}l_{11}>0 \tag{14}$$

此时，如果记

$$\alpha_1^*\triangleq-\frac{n_{11}}{m_{11}}-\sqrt{\left(\frac{n_{11}}{m_{11}}\right)^2-\frac{l_{11}}{m_{11}}}$$

$$\beta_1^*\triangleq-\frac{n_{11}}{m_{11}}+\sqrt{\left(\frac{n_{11}}{m_{11}}\right)^2-\frac{l_{11}}{m_{11}}}$$

则λ_1的存在区间为

$$\alpha_1^*<\lambda_1<\beta_1^* \tag{15}$$

对不等式(13)记

$$u_1\triangleq m_{11}\lambda_1^2+2n_{11}\lambda_1+l_{11}$$

式(13)可展开得

$$[u_1m_{22}-(m_{12}\lambda_1+n_{21})^2]\lambda_2^2+2[u_1n_{22}-(m_{12}\lambda_1+n_{21})(n_{12}\lambda_1+l_{12})]\lambda_2+u_1l_{22}-(n_{12}\lambda_1+l_{12})^2>0 \tag{16}$$

因$u_1>0$而$m_{22}=-C_2^TG^{-1}C_2<0$计及引理1 $l_{22}\leqslant 0$有$\widetilde{u}_1\triangleq u_1m_{22}-(m_{12}\lambda_1+n_{21})^2<0$; $\widetilde{u}_3\triangleq u_1l_{22}-(n_{12}\lambda_1+l_{12})^2\leqslant 0$ 于是存在$\lambda_2\geqslant 0$使不等式(16)成立的条件是

$$\widetilde{u}_2\triangleq u_1n_{22}-(m_{12}\lambda_1+n_{21})(n_{12}\lambda_1+l_{12})>0$$

$$\widetilde{u}_2^2-[u_1m_{22}-(m_{12}\lambda_1+n_{21})^2][u_1l_{22}-(n_{12}\lambda_1+l_{12})^2]>0$$

且λ_2的存在区间为 $\alpha_*<\lambda_2<\beta_*$

其中

$$\alpha_*(\lambda_1)\triangleq-\widetilde{u}_2/\widetilde{u}_1+\sqrt{(\widetilde{u}_2/\widetilde{u}_1)^2-\widetilde{u}_3/\widetilde{u}_1} \tag{17}$$

$$\beta_*(\lambda_1)\triangleq-\widetilde{u}_2/\widetilde{u}_1+\sqrt{(\widetilde{u}_2/\widetilde{u}_1)^2-\widetilde{u}_3/\widetilde{u}_1}$$

上述两式可分别化为

$$(m_{11}n_{22}-m_{12}n_{12})\lambda_1^2+(2n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21}-m_{12}l_{12})\lambda_1+l_{11}n_{22}-n_{21}l_{12}>0 \tag{18}$$

$$u_1^2\, n_{22}^2 - 2u_1 n_{22}(m_{12}\lambda_1 + n_{21})\,(n_{12}\lambda_1 + l_{12}) - u_1^2\, m_{22}\, l_{22}$$

$$+ u_1 m_{22}(n_{12}\lambda_1 + l_{12})^2 + u_1 l_{22}(m_{12}\lambda_1 + n_{21})^2$$

$$= u_1 \left[\,(m_{22}\, n_{12}^2 + l_{22}\, m_{12}^2 - 2m_{12}n_{12}n_{22} + m_{11}n_{22}^2 - m_{11}m_{22}l_{22})\,\lambda_1^2\right.$$

$$+ 2(m_{22}n_{12}l_{12} + l_{22}m_{12}n_{21} - n_{22}m_{12}l_{12} - n_{22}n_{21}n_{12} - n_{11}n_{22}^2$$

$$\left. - n_{11}m_{22}l_{22})\,\lambda_1 + m_{22}\, l_{12}^2 + l_{22}\, n_{21}^2 - 2n_{22}n_{21}l_{12} + l_{11}n_{22}^2 - l_{11}m_{22}l_{22}\,\right] > 0$$

因由(12)式知 $u_1 > 0$，故上式变成

$$(m_{22}\, n_{12}^2 + l_{22}m_{12}^2 - 2m_{12}n_{12}n_{22} + m_{11}n_{22}^2 - m_{11}m_{22}l_{22})\,\lambda_1^2$$

$$+ 2\,(m_{22}n_{12}l_{12} + l_{22}m_{12}n_{21} - n_{22}m_{12}l_{12} - n_{22}n_{21}n_{12} - n_{11}\, n_{22}^2$$

$$- n_{11}m_{22}l_{22})\lambda_1 + (m_{22}l_{12}^2 + l_{22}\, n_{21}^2 - 2n_{22}n_{21}l_{12} + l_{11}\, n_{22}^2 - l_{11}m_{22}l_{22}) > 0 \qquad (19)$$

由二次多项式的性质，根据引理2和引理3满足不等式(18)及(19)的λ_1的存在区间可唯一地分别确定为

$$\alpha_2^* < \lambda_1 < \beta_2^*$$

$$\alpha_3^* < \lambda_1 < \beta_2^*$$

其中 α_s^*，β_s^* 可由(18)或(19)的系数显式表示。

于是如果取

$$\alpha^* = \max_{s=1,2,3}(\alpha_s^*) \qquad\qquad \beta^* = \min_{s=1,2,3}(\beta_s^*) \qquad (20)$$

则当 $\alpha^* < \lambda_1 < \beta^*$ 时λ_1同时满足不等式(12)、(18)、(19)。而且对任 $\lambda_1 \epsilon (\alpha^*, \beta^*)$ 及任 $\lambda_2 \epsilon (\alpha_*(\lambda_1),\ \beta_*(\lambda_1))$，($\alpha_*$，$\beta_*$如(17)式所定义)，均能使矩阵(11)是正定的，即系统(1)($m=2$)是绝对稳定的。因此有

定理2 具有二个调节机构的直接控制系统(1)，如果由(20)式确定的 α^*, β^* 有关系式$0 \leqslant \alpha^* < \beta^*$，则系统(1)($m=2$)是在角$[0,\ k_i]$ $(i=1,\ 2)$内绝对稳定的。

§ 3

对m个调节机构的直接控制系统(1)，根据定理1，将判别系统(1)绝对稳定的问题化为如何确定适当的条件，可以选取正参数 $\lambda_i (i=1, \cdots, m)$使$m \times m$阶对称矩阵$S$是正定的。

由矩阵理论知道，对称矩阵S正定的充分必要条件是矩阵S的各阶主子式是正的。由式(4)对矩阵S其k阶主子式可记为

$$\det S_k = |m_{ij}\,\lambda_i\lambda_j + n_{ij}\lambda_i + n_{ji}\lambda_j + l_{ij}|_{i,j=1,\ldots,k} \qquad (21)$$

现讨论在什么条件下，可以选取λ_k，$k=1, \cdots, m$ 使

$$\lambda_k > 0,\ \det S_k > 0 \quad (k = 1, \cdots, m)$$

当 $k=1$时

$$\det S_1 = m_{11}\lambda_1^2 + 2n_{11}\lambda_1 + l_{11}$$

在§2 中已作了分析，当条件(14)成立时，对满足条件(15)的任λ_1均能保证(12)成立，即$\det S_1>0$，我们可选取使$\det S_1$最大的λ_1，由于$\det S_1$是λ_1的二次多项式，显然，使$\mathrm{dte}S_1$取最大值的 λ_1^* 为

$$\lambda_1^* = -\frac{n_{11}}{m_{11}}$$

现在对任意 $k(k=1, \cdots, m)$. 选取了 $\lambda_1 = \lambda_1^*$ 后，继续选取λ_2使$\det S_2>0$ 此时有

$$\det S_2^* = \begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2} + 2n_{11}\lambda_1^* + l_{11} & m_{12}\lambda_1^* + n_{21} \\ m_{21}\lambda_1^* + n_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \lambda_2^2$$

$$+ 2\begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2} + 2n_{11}\lambda_1^* + l_{11} & n_{12}\lambda_1^* + l_{12} \\ m_{21}\lambda_1^* + n_{21} & n_{22} \end{vmatrix} \lambda_2$$

$$+ \begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2} + 2n_{11}\lambda_1^* + l_{11} & n_{12}\lambda_1^* + l_{12} \\ n_{12}\lambda_1^* + l_{21} & l_{22} \end{vmatrix}$$

依据引理 2 、3 ，如果记

$$\det S_2^* \triangleq u_{21}\lambda_2^2 + 2u_{22}\lambda_2 + u_{23}$$

则当满足条件

$$u_{21} < 0,\ u_{22} > 0,\ u_{22}^2 - u_{21}u_{23} > 0$$

时，可取

$$\lambda_2^* = -\frac{u_{22}}{u_{21}}$$

使 $\det S_2^*$ 值最大，且此时

$$\lambda_2^* > 0,\quad \det S_2^* > 0$$

假设已选取 $\lambda_i\ (i=1, \cdots, k-1)$使

$$\lambda_i^* > 0,\quad \det S_i^* > 0 \quad (i = 1, \cdots, k-1)$$

现要确 λ_k 使定 $\det S_k^* > 0$

这时

$$\det S_k^* = \begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2}+2n_{11}\lambda_1^*+l_{11} & \cdots & m_{1k}\lambda_1^*+n_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1}\lambda_1^*+n_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{vmatrix} \lambda_k^2$$

$$+2\begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2}+2n_{11}\lambda_1^*+l_{11} & \cdots & n_{1k}\lambda_1^*+l_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1}\lambda_1^*+n_{k1} & \cdots & n_{kk} \end{vmatrix} \lambda_k$$

$$+\begin{vmatrix} m_{11}\lambda_1^{*2}+2n_{11}\lambda_1^*+l_{11} & \cdots & n_{1k}\lambda_1^*+l_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{1k}\lambda_1^*+l_{k1} & \cdots & l_{kk} \end{vmatrix} \tag{22}$$

如果记

$$\det S_k^* \triangleq u_{k1}\lambda_k^2+2u_{k2}\lambda_k+u_{k3} \tag{23}$$

由引理2和引理3，当满足条件

$$u_{k1}<0,\ u_{k2}>0,\ u_{k_2}^2-u_{k1}u_{k3}>0 \tag{24}$$

时，可取

$$\lambda_k^*=-\frac{u_{k2}}{u_{k1}} \tag{25}$$

使 $\det S_k^*$ 值最大且此时

$$\lambda_k^*>0,\ \det S_k^*>0$$

由归纳法，在条件(24)下可以如式(25)那样选取 λ_k^*，$(k=1,\cdots,m)$ 使

$$\lambda_k^*>0,\ \det S_k^*>0\quad(k=1,\cdots,m)$$

即矩阵S的 $k=1,\cdots,m$ 阶的各阶主子式均大于0，所以矩阵S是正定的。即系统(1)是绝对稳定的。

于是我们有如下定理

定理3 对具m个调节机构的直接控制系统(1)如果由式(22)、(23)定义的 u_{k1}，u_{k2}，u_{k3} 满足条件

$$u_{k1}<0,\ u_{k2}>0,\ u_{k_2}^2-u_{k1}u_{k3}>0\quad(k=1,\cdots,m)$$

其中在式(22)中取

$$\lambda_k^*=-\frac{u_{k2}}{u_{k1}}\qquad(k=1,\cdots,m)$$

那么，系统(1)是在角$[0,k_i]$ $(i=1,\cdots,m)$内绝对稳定的。

参 考 文 献

〔1〕朱思铭，直接控制系统的绝对稳定性准则，中山大学学报(自然科学版)，(1979),3,20—28.

〔2〕Reissig R., Sansone G., Conti R., Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, Edizioni Cremonese, Roma, 1969; Non-linear differential equations of higher order,Noordhoff International Rublishing, Leyden, 1974.

Absolute Stability for Direct Control System of Multiadjustment Mechanism

Zhu Siming

Abstract

This paper is a succession of the works in 〔1〕. In this paper we consider the direct control system of multiadjustment mechanism.

$$\dot{x} = Ax + B\phi(\sigma),\ \sigma = C^T x,\ (\text{A a stable } n\times n \text{ matrix})$$

$$\phi_i(0) = 0,\ 0 \leqslant \sigma_i\,\phi_i(\sigma_i) \leqslant k_i\,\sigma_i^2 \qquad (*)$$

By using the Liapunov function

$$V(x) = x^T Hx + 2\Sigma\beta_i\int_0^{\sigma_i}\phi_i(\sigma_i)d\sigma_i,\ (H = H^T > 0,\ \beta_i \geqslant 0)$$

we prove the sufficient condition of absolute stability of system (*) is three exists a positive definite symmetric matrix G and parameters $\lambda_i > 0 (i = 1,2, \cdots, m)$ such that the symmetric matrix

$$\varLambda M\varLambda + \varLambda N + N\varLambda + L \qquad (**)$$

is positive definite.

Further, we discuss the case of m=2 in detail. We prove that the condition for matrix (**) can be transformed into the condition for inequality and find the existence interval of λ_1, λ_2. Therefere, the criterion of absolute stability of system (*) in the case m=2 is solved.

For the general case, we give a condition for inequality of finding λ_i (i=1,2, $\cdots$, m) which assures the system (*) to be absolute stable.