·综　述·

随机测度与点过程的收敛性

梁之舜　戴永隆

（数学力学系）

摘　要

本文简要地叙述随机测度与点过程理论有关收敛性方面比较重要的结果．讨论了距离空间上测度的各种收敛性问题，随机测度与点过程，无穷可分随机测度与无穷可分点过程，平稳点过程以及收敛于 Poisson 过程等等收敛性问题．

§1 距离空间上测度的弱收敛、局部弱收敛与淡收敛

1．有关记号，本文恒以：

$(X、d)$表示距离空间；§2以后(X,d)表示可分完备距离空间．

$\mathbf{F}_B$ 记$(X、d)$上全体有界连续实函数类．

$\mathbf{F}$ 记$(X，d)$上全体有界连续且有有界支撑的实函数类．

$\mathbf{F}_K$记$(X、d)$上全体有界连续且有紧支撑的连续函数类．

显然有$\mathbf{F}_B\supset\mathbf{F}\supset\mathbf{F}_K$．

以$\mathbf{A}$记(X,d)上全体Borel 集类（由全体开集产生）．

$\mathbf{B}$记$\mathbf{A}$中全体有界集类，显然$\mathbf{B}$是一环，但当d不是有界距离时，$\mathbf{B}$不是一σ环．

$\mathbf{B}_K$记$\mathbf{A}$中全体有紧闭包的集类，即$\mathbf{B}_K$表示$\mathbf{A}$中全体相对紧集．$\mathbf{B}_K$ 也是一环，但当X不是紧距离空间时，$\mathbf{B}_K$不是σ环．

显然有　$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}\supset\mathbf{B}_K$．

定义1　设μ是$(X,\mathbf{A})$上的测度，称μ是局部有限的，如果对任意$A\in\mathbf{B}$，$\mu(A)<\infty$．称μ是紧有限的，如果对任意$A\in\mathbf{B}_K$，$\mu(A)<\infty$．

记$(X,\mathbf{A})$上全体全有限测度为M_B，全体局部有限测度为M，全体紧有限测度为M_K．

显然　$M_K\supset M\supset M_B$．

对函数f及测度μ，记$\int fd\mu\triangleq\mu f$ 当右边积分有意义．

定义2 设$(\mu_n)\subset M_B$，称μ_n弱收敛于$\mu\in M_B$，并记作$\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}\mu$，如果对任意$f\in\mathbf{F}_B$，有

$$\lim_n\mu_nf=\mu f,$$

设$(\mu_n)\subset M$，称μ_n局部弱收敛于$\mu\in M$，如果对任意$f\in\mathbf{F}$有

$\lim\limits_{n}\mu_n f=\mu f$，记作$\mu_n \stackrel{l}{\Longrightarrow}\mu$，

设$(\mu_n)\subset M_K$，称μ_n谈(Vague)收敛于$\mu\in M_K$记作$\mu_n\stackrel{v}{\Longrightarrow}\mu$，如果对任意$f\in \mathbf{F}_K$，有

$\lim\limits_{n}\mu_n f=\mu f$。

2．例　设X是l_2空间。即X是如下的实数列组成的空间：

$(x_1、x_2,\cdots)$，$\sqrt{\sum\limits_i x_i^2}<\infty$　并取$d(x,y)=\sqrt{\sum\limits_i (x_i-y_i)^2}$。

若令$e_1=(1,0,\cdots)$，$\cdots$，$e_n=(0,\cdots 1,\cdots)$，并令$\mu_n=\delta_{e_n}$(e_n的δ函数)，则μ_n是有限测度。且显然有$\mu_n\stackrel{v}{\Longrightarrow}0$，但$\mu_n\stackrel{l}{\Longrightarrow}0$，$\mu_n\stackrel{w}{\Longrightarrow}0$ 都不成立。又设$e'_n=ne_n$ $(n=1,2,\cdots)$及$\mu_n=\delta_{e'_n}$则有 $\mu_n\stackrel{v}{\Longrightarrow}0$，　$\mu_n\stackrel{l}{\Longrightarrow}0$，但$\mu_n\stackrel{w}{\Longrightarrow}0$却不成立。

这个例子说明，三种收敛性都各不相同。但永远有$\stackrel{w}{\Longrightarrow}$推出$\stackrel{l}{\Longrightarrow}$推出$\stackrel{v}{\Longrightarrow}$。

3．等价命题

下面是局部弱收敛的等价命题。在可分完备距离空间的情况下可见〔2〕定理3.2.2，作者将它推到一般距离空间。

定理1　设$(\mu_n)\subset M$，$\mu\in M$，则下述命题等价：

1) $\mu_n\stackrel{l}{\Longrightarrow}\mu$；

2) $\mu_n(A)\to\mu(A)$，凡有界μ连续集A；

3) $\lim\sup\limits_{n}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$凡有界闭集$F$，且$\lim\inf\limits_{n}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$ 凡有界开集G。

我们知道，关于弱收敛对应的定理是(见〔1〕定理2.1)

定理1′　设$(\mu_n)\subset M_B$，$\mu\in M_B$，则下述命题等价：

1) $\mu_n\stackrel{w}{\Longrightarrow}\mu$；

2) $\mu_n(A)\to\mu(A)$　凡μ连续集A；

3) $\lim\sup\limits_{n}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$　凡闭集F，且$\lim\limits_{n}\mu_n(X)=\mu(X)$；

4) $\lim\inf\limits_{n}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$　凡开集G，且$\lim\limits_{n}\mu_n(X)=\mu(X)$。

4．弱相对紧性与局部弱相对紧性

定义　M_B的子集Y称为弱相对紧的，如果对任意序列$(\mu_n)\subset Y$，总可以抽取它的子序列$\{\mu_{n_k}\}$使：$\mu_{n_k}\stackrel{w}{\Rightarrow}$某个$\mu\in M_B$。

M的子集Y称为局部弱相对紧的，如果对任意序列$(\mu_n)\subset Y$，总可以抽取它的子序列(μ_{n_k}) 使 $\mu_{n_k}\stackrel{l}{\Rightarrow}$某个$\mu\in M$。

下面的定理在可分完备空间的情形下见〔2〕定理3.2.5.

定理2 1) 设$Y\subset M$，如果对任意有界闭子集B，有

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty, \tag{1}$$

而且对任给$\varepsilon>0$，存在紧集$K_{B,\varepsilon}\subset B$，使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B-K_{B,\varepsilon})<\varepsilon \tag{2}$$

则Y是局部弱相对紧的。

2) 当(X,d)是可分完备距离空间时，命题1) 之逆成立，即，若Y是局部弱相对紧的，则(1)、(2)成立。

对应于弱收敛，下面是著名的Прохоров定理(见〔1〕,定理6.1及6.2)。

定理2′ 1)设$Y\subset M_B$，如果

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(X)<\infty, \tag{3}$$

而且对任意$\varepsilon>0$，存在紧集K_ε，使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(K_\varepsilon{}^c)<\varepsilon \tag{4}$$

则Y是弱相对紧的。

2) 当(X,d)是可分完备距离空间时，逆命题成立，即，若Y是弱相对紧的，则(3)、(4)成立。

5．弱收敛与局部弱收敛的关系

下述定理在文献上未见到(在淡收敛的情形见下面定理3″)。

定理3 设(X,d)是可分完备距离空间，如果$(\mu_n)\subset M_B$，$\mu\in M_B$，则$\mu_n\overset{w}{\Rightarrow}\mu$当且仅当$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$及$\mu_n(X)\to\mu(X)$或者当且仅当$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$及

$$\inf_{B\in\mathbf{B}}\lim_n\sup\mu_n(B^c)=0.$$

6．弱、局部弱与淡收敛的关系

定理4 在一般距离空间中，有：

1) 设$(\mu_n)\subset M_B,\mu\in M_B$，则$\mu_n\overset{w}{\Rightarrow}\mu$与$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}$一致的充要条件是：$(X,d)$是有界距离空间(即$\mathbf{A}=\mathbf{B}$)。

2) 设$(\mu_n)\subset M,\mu\in M$,则$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$与$\mu_n\overset{v}{\Rightarrow}\mu$一致的充要条件是：$(X,d)$的任意有界Borel集是相对紧的，(即$\mathbf{B}=\mathbf{B}_K$)。

3) 设$\mu_n\subset M$，则$\mu_n\overset{w}{\Rightarrow}\mu,\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$与$\mu_n\overset{v}{\Rightarrow}\mu$三者一致的充要条件是：$(X,d)$是紧距离空间(即$\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{B}_K$)。

7．淡收敛(Vague Convergence)

虽然我们在一般距离空间上给出了淡收敛的定义，然而实际上是得不到什么结果的．讨论淡收敛都假定X是局部紧、第二可数，Hausdorff空间．然而这时存在一个拓

扑不变的距离d，使得(X,d)是可分完备距离空间。本节就假定(X,d)是这样的空间。

这时定理1—3取如下形式(见〔3〕，A 7.2，A 7.5，A 7.6)。

定理1″ 设$(\mu_n)\subset M_K$，则下述命题等价：

1) $\mu_n\overset{v}{\Rightarrow}\mu$；

2) $\mu_n(A)\to\mu(A)$对一切有紧闭包的μ连续集；

3) $\lim\sup\limits_n \mu_n(F)\leqslant\mu(F)$ 对一切闭集$F\in\mathbf{B}_K$；且$\lim\inf\limits_n\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$ 对一切开集$G\in\mathbf{B}_K$。

定理2″ M_K的子集Y在淡收敛意义下是相对紧的，当且仅当

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty\quad 凡B\in\mathbf{B}_K。$$

定理3″ 设$(\mu_n)\subset M_B$，$\mu\in M_B$，则$\mu_n\overset{w}{\Rightarrow}\mu$ 当且仅当$\mu_n\overset{v}{\Rightarrow}\mu$及$\mu_n(X)\to\mu(X)$或者，当且仅当$\mu_n\overset{v}{\Rightarrow}\mu$及$\inf\limits_{B\in\mathbf{B}_K}\lim\sup\limits_n \mu_n B^c=0$。

§2 随机测度与点过程的收敛性

1．下面恒设(X,d)是可分完备距离空间．在M上定义σ代数$\mathbf{m}$．$\mathbf{m}$是使得对一切$A\in\mathbf{B}$，$\mu(A)$是M至$[0,\infty)$的映象为$\mathbf{B}[0,\infty)$可测的最小σ代数．$(M,\mathbf{m})$称为局部有限测度空间。

(注：当(X,d)还是局部紧时，有时还得在M_K上引进σ代数$\mathbf{m}_K$．$\mathbf{m}_K$是使得对一切$A\in\mathbf{B}_K$，$\mu(A)$为M至$[0,\infty)$的映象是$\mathbf{B}_{[0,\infty)}$可测的最小σ代数。$(M_K,\mathbf{m}_K)$称为紧有限测度空间。)

以N记M的如下子集，$\mu\in N$，即$\mu\in M$且对任意$A\in\mathbf{B}$，$\mu(A)$只取非负整数值.

引理 $N\in\mathbf{m}$。

这个结果可在许多文章中找到(例如见〔1〕，1.1,3)有了这个引理，我们令

$$\mathbf{N}=N\cap\mathbf{m}。$$

$(N,\mathbf{N})$称为计数测度空间。

定理5 在M上可以引进一有界距离，使得：(M,ρ_M)是可分完备距离空间；(M,ρ_M)所产生的拓扑与M上的局部弱收敛所产生的拓扑一致；(M,ρ_M)上的Borel集与$\mathbf{m}$一致；N在(M,ρ_M)中是闭集。ρ_M在N上的限制记作ρ_N。

这个结果见〔2〕，3.2.1,3.2.3,3.2.4．

(注：当(M,d)还是局部紧时，则在M_K上可以引进一有界距离使：(M_K,ρ_{M_K})是可分完备离距空间；(M_K,ρ_{M_K})上的收敛与淡收敛一致，见〔3〕A7.7)。

2．现设(Ω,F,P)是基本概率空间，由(Ω,F,P)至$(M,\mathbf{m})$上的任一可测映象，称为随机测度。如果ξ是随机测度，满足条件 $P(\omega;\ \xi\in N)=1$，则称ξ是随机点过程。

因为(M,ρ_M)是有界的可分完备距离空间。由定理4.1)，$\overset{w}{\Rightarrow}$与$\overset{l}{\Rightarrow}$收敛一致，因此只讨论弱收敛就够了。当(X,d)是局部紧空间时，我们还要讨论淡收敛的问题。

定义 设ξ，ξ_1，ξ_2，…是随机测度，以$P\xi^{-1}$,$P\xi_1^{-1}$,…记它们在$(M,\mathbf{m})$上的分布，如果

$P\xi_n^{-1} \xrightarrow{w} P\xi^{-1}$则称$\xi_n$弱收敛于$\xi$，记作$\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi$。

设ξ是随机测度，记$\xi f = \int f(x)\xi(\omega,dx)$，$f \in \mathbf{F}$，又记

$$\mathbf{B}_\xi = \{ B \in \mathbf{B} \quad \xi(\omega,B) = 0 \}$$

下述定理见〔3〕，定理4.1。

定理6 设ξ，ξ_1，$\xi_2 \cdots$是随机测度，则下述命题等价：

1) $\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi$；

2) $\xi_n f \overset{d}{\Rightarrow} \xi f \qquad \forall f \in \mathbf{F}$

3) $(\xi_n(A_1)\cdots, \xi_n(Ak)) \overset{d}{\Rightarrow} (\xi(A_1),\cdots,\xi(A_k))$
$\forall A_1,\cdots,A_k \in \mathbf{B}_\xi$。

其中$\overset{d}{\rightarrow}$表示在(Ω,F,P)内随机变量（或随机矢量）依分布收敛。

在点过程的情形，上述定理可写成（见〔2〕定理3.1.7）：

定理6′ 设ξ、ξ_1，ξ_2，$\cdots$是随机点过程，则$\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi$当且仅当，对任意非负整数$h_1\cdots$，$h_k$成立：

$$\lim_n P(\xi_n(A_1) = h_1,\cdots,\xi(A_k) = h_k) \quad \forall A_1,\cdots A_k \in \mathbf{B}_\xi.$$
$$= P(\xi(A_1) = h_1,\cdots,\xi(A_k) = h_k).$$

下面考虑局部紧空间的淡收敛问题。

设ξ是随机测度，如果满足$\xi(\omega,X) < \infty$，$(a,e\ P)$，则称ξ是a、e有界。下述定理见〔3〕定理4.9。

定理7 设(X,d)是局部紧可分完备距离空间。ξ，ξ_1，$\xi_2\cdots$是a、e有界随机测度，则下述命题等价：

1) $\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi$；

2) $\xi_n \overset{v}{\Rightarrow} \xi$及$\xi_n(X) \overset{d}{\Rightarrow} \xi(X)$；

3) $\xi_n \overset{v}{\Rightarrow} \xi$及$\inf\limits_{B \in \mathbf{B}_k} \limsup\limits_{n \to \infty} P(\xi_n(B^c) > \varepsilon) = 0$，$\forall \varepsilon > 0$。

3．今设P是$(M,\mathbf{m})$上的分布，考虑$\mathbf{A} \times \mathbf{m}$上的测度（$\mathbf{A} \times \mathbf{m}$可看成$(X \times M, \rho_{X \times M})$上的Borel集）

$$\mathbf{C}_P(A \times Y) = \int_Y \nu(A)P(d\nu) \qquad A \in \mathbf{B}, Y \in \mathbf{m}$$

称$\mathbf{C}_P$为P的Campbell测度。特别令$Y = M$，记

$$I_P(A) = \int \nu(A)P(d\nu), \qquad A \in \mathbf{B},$$

I_P称为P的矩测度。

如果ξ是随机测度（或点过程），$\mathbf{C}_{P\xi^{-1}}$及$I_{P\xi^{-1}}$分别称为ξ的 Campbell 测度和矩测

度。并简记为$\mathbf{C}_\xi$及I_ξ。

下述结果在点过程的情形可见〔2〕10、1.5及10.1.6。

定理8 设ξ，ξ_1，$\xi_2\cdots$是随机测度，$I_\xi \in M$，$I_{\xi_n} \in M$，$n=1,2\cdots$则$\mathbf{C}_{\xi_n} \overset{l}{\Rightarrow} \mathbf{C}_\xi$当且仅当$\xi_n \overset{w}{\Rightarrow} \xi$，$I_{\xi_n} \overset{l}{\Rightarrow} I_\xi$。

§3 无穷可分随机测度与无穷可分点过程的收敛性

1．随机测度ξ称为无穷可分的，如果对任意正整数n，它可以表为形式：

$$\xi \overset{d}{=} \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

其中ξ_1，$\cdots$，ξ_n是相互独立且同分布的随机测度。而$\overset{d}{=}$表示依分布相等。

设ξ是任意随机测度，定义它的拉氏变换为：

$$\Psi_\xi(f) = \int e^{-\nu f}(P\xi^{-1})(d\nu) \qquad f \in \mathbf{F}_B.$$

下述命题见〔3〕定理6.1。

定理9 设ξ是随机测度，则它是无穷可分的，当且仅当它的拉氏变换可以写成：

$$-\log\Psi_\xi(f) = \alpha f + \int (1 - e^{-\nu f})\lambda(d\nu) \qquad f \in \mathbf{F}_B$$

其中$\alpha \in M$，而λ是$\mathbf{m}-\{0\}$上的测度，满足条件

$$\int (1 - e^{-\nu(A)})\lambda(d\nu) < +\infty \qquad A \in \mathbf{B}$$

在无穷可分点过程的情形，$\alpha=0$，λ是$N-\{0\}$上的测度.α，λ称为ξ的典则测度(Canonical measure)若ξ是无穷可分分布，有典则测度α，λ记作$\xi=I(\alpha,\lambda)$。如ξ是无穷可分点过程，典则测度是λ，记作$\xi=I(0,\lambda)$。

2．距离空间(N^*,ρ_{N^*})

在无穷可分点过程的典则表示中，λ是$\mathbf{N}-\{0\}$上的测度。这个测度未必是有限的。为了研究它的收敛性，有必要引进 $\mathbf{N}-\{0\}$上距离。

设$\nu \in \mathbf{N}$，令

$$\gamma(\nu) = \sup(h;\ h \geqslant 0, \qquad \nu(S_h(t)) = 0)$$

其中t是(X,ρ_X)中任意固定点。$S_h(\mathrm{t})$表示以t为心，h为半径的闭球。由于$\nu \in \mathbf{N}$，$\gamma(\nu)=\infty$当且仅当$\nu=0$(恒为零的测度)。

记　$N^* = N - \{0\}$。令

$$\rho_{N^*}(\mu,\nu) = \rho_N(\mu,\nu) + |\gamma(\nu) - \gamma(\mu)|$$

则ρ_{N^*}是$\mathbf{N}^* = \mathbf{N}-\{0\}$上的距离。$(\mathbf{N}^*,\rho_{N^*})$是可分完备距离空间。

引理 $\mathbf{N}^*$的子集Y在距离ρ_{N^*}的意义下有界，当且仅当存在$A \in \mathbf{B}$，使

$$Y \subseteq \{\nu;\ \nu \in \mathbf{N},\ \nu(A) > 0\}$$

这个引理刻划了距离空间$(\mathbf{N}^*,\rho_{N^*})$中的全部有界集。

由于$(\mathbf{N}^*,\rho_{N^*})$可分完备。以它为相空间(即代替$(X,\rho_X)$)的全体局部有限测度记作

$\mathbf{E}_\infty$。即：$E\epsilon\mathbf{E}_\infty$，表示$E$是$(\mathbf{N}^*,\rho_{N^*})$上全体Borel集上的测度，且由上面的引理知，$E$对一切形如$\{\nu;\ \nu\epsilon\mathbf{N},\nu(A)>0\}$的集适合条件：

$$E(\nu;\ \nu(A)>0,\nu\epsilon\mathbf{N})<\infty.$$

下面的结果容易由定理9得出(见〔3〕,3.3.6)。

定理10 无穷可分点过程与$\mathbf{E}_\infty$是一一对应的。即ξ是无穷可分的，当且仅当它唯一地可以表成形式：$\xi=I(0,\lambda)$，$\lambda\epsilon\varepsilon_\infty$。

3．无穷小三角序列

设$\{\xi_{nj},\ 1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2,\cdots\}$是随机测度序列。固定$n$，$\{\xi_{nj},\ 1\leqslant j\leqslant m_n\}$相互独立。而且对任意$\varepsilon>0,B\epsilon\mathbf{B}$满足条件：

$$\lim_n \sup_j P(\xi_{nj}(B)>\varepsilon)=0,$$

则称$\{\xi_{nj},\ 1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2,\cdots\}$是无穷小三角序列。

在点过程的情形，要求ξ_{nj}都是点过程，而且满足

$$\lim_n \sup_j P(\xi_{nj}(B)>0)=0,\qquad B\epsilon\mathbf{B}.$$

下述定理表明，无穷小三角序列如果收敛，则一定收敛于无穷可分分布。

定理11 设$\{\xi_{nj},\ 1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2,\cdots\}$是无穷小三角序列，则下述命题等价：

1) $\sum_j \xi_{nj}\stackrel{w}{\Rightarrow}$某个随机测度$\xi$；

2) $\sum_j (1-log\phi_{\xi_n,j}(f))\rightarrow\alpha f+\int(1-e^{-\nu f})\lambda(d\nu)$, $\quad f\epsilon\mathbf{F}_B$.

在点过程的情形，上述定理可以更进一步写成(见〔2〕定理3.4.2)：

定理12 设$\{\xi_{nj},1\leqslant j\leqslant m_n, n=1,2,\cdots\}$是点过程无穷小三角序列，则下述命题等价：

1) $\sum_j \xi_{nj}\stackrel{w}{\Rightarrow}$某个点过程$\xi$；

2) $\sum_j \xi_{nj}\stackrel{w}{\Rightarrow}$某个无穷可分点过程$I(0,\lambda)$；

3) $\sum_j I(0,P\xi_{nj}^{-1})\Rightarrow I(0,\lambda)$；

4) $\sum_j P\xi_{nj}^{-1}((\cdot)-\{0\})\stackrel{\prime}{\Rightarrow}\lambda$.

§4 收敛于Poisson分布

1．设$\mu\epsilon M$。随机点过程ξ称为Poisson过程，如果对任意非负整数$k_1,\cdots k_n$，以及互不相交的A_1，$A_2,\cdots,A_n\epsilon\mathbf{B}$，成立：

$$P(\xi(A_1)=k_1,\cdots,\xi(A_n)=k_n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j}e^{-\mu(A_j)}(\mu(A_j))^{k_j}.$$

对于Poisson过程ξ，易得

$$I_\xi(A)=\mu(A),\qquad A\in\mathbf{B}.$$

Poisson 过程是无穷可分点过程。为了求出它的典则测度，考虑 $(X,\mathbf{A})\to(N,\mathbf{N})$ 的映象：

$$a\searrow\delta_a,\qquad (a\in X).$$

这个映象是$(X,\mathbf{A})\searrow(N,\mathbf{N})$内的一一映象。记作$f(a)=\delta_a$。现设$\mu\in M$，令$Q\mu=\mu f^{-1}$。则$Q\mu$是$(N,\mathbf{N})$上的测度。

下述定理刻划了Poisson过程的典则测度(见〔2〕,2.2.15)。

定理13　设ξ是无穷可分点过程，典则测度为λ。则它是 Poisson 过程当且仅当$\lambda(\nu:\ \nu(X)\neq 1)=0$。这时，如以$\mu$表示$\xi$的强度测度，则 $\lambda=Q\mu$。

2. 下述定理指出收敛于Poisson 过程的条件(〔2〕,定理3,4,4)。

定理14　设$\{\xi_{nj},1\leqslant j\leqslant m_n,n=1,2,\cdots\}$是点过程无穷小三角序列，$\xi$是 Poisson 过程，典则测度为$\lambda$，且$\lambda=Q_\mu,\mu\in M$。则

$$\sum_{1\leq j\leq m_n}\xi_{nj}\overset{w}{\Rightarrow}\xi$$

当且仅当：对任意有界μ连续集A成立：

$$\sum_{1\leq j\leq m_n}P(\xi_{nj}(A)>1)\to 0,\ \sum_{1\leq j\leq m_n}P(\xi_{nj}(A)=1)\to P(A),(n\to\infty).$$

(注：在应用上，这个结果的条件还须减弱，由于有界μ连续集组成一环$\mathbf{B}_\mu$。上述条件可减弱为在一个半环上成立，只要这个半环产生环$\mathbf{B}_\mu$，见〔2〕定理3.4.4)

如果将弱收敛与Campbell测度联系起来，则是下面的结果(见〔2〕,定理10.1.12)。

定理15　假设：$\{\xi_{nj},1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2,\cdots\}$是点过程无穷小三角序列。$I_{\xi_{nj}}\in M$。

又设存在$\mu\in M$，　$\sum_{1\leq j\leq m_n}\xi_{nj}\overset{l}{\Rightarrow}\mu$。则下述条件等价：

1) $\sum_{1\leq j\leq m_n}\xi_{nj}\overset{w}{\Rightarrow}\xi$，$\xi$是 Poisson 过程，$I_\xi=\mu$。

2) 对任意$A\in\mathbf{B}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq m_n}\mathbf{C}_{\xi_{nj}}(A\times\{\nu:\ \nu(A)>1\})=0.$$

§5　平稳点过程的收敛性

1. 平稳点过程是在相空间$X=R^m$内考虑的，$\mathbf{R}^m$表示R^m内全部Borel集。$\mathbf{B}^m$记有界Brol集类。对任意$t\in R^m$。令$T_ta=a-t(a\in R^m)$在变换T_t之下，对任意$\mu\in M$，就变为

$$T_t\mu(A)=\mu(A+t),\qquad A+t=\{a:a-t\in A\}$$

设ξ是随机测度，如果对任意$Y\in\mathbf{m}$有

$$P(\xi\in Y)=P(T_t\xi\in Y)$$

则称ξ是平稳随机测度。相应地可以定义平稳点过程。

设$Y\in\mathbf{m}$，若对任意$t\in R^m$，$\mu\in Y$，推出$T_t\mu\in Y$，则称Y是不变集。全体不变集组成$\mathbf{m}$的一个子σ代数$\overline{\mathbf{m}}$。

如果ξ是平稳随机测度，若对任意$Y\in\overline{\mathbf{m}}$，或者有$P(\xi\in Y)=0$，或者$P(\xi\in Y)=1$。则称$\xi$是遍历的。

设h是$(M,\mathbf{m})$上的非负可测函数。令

$$\overline{h_n}(\mu)=\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(T_t\mu)L(dt)\,,\qquad \mu\in M.$$

其中L是通常的Lebesgue测度。

根据Birhoff定理，如果ξ是平稳随机测度，则下述极限

$$\overline{h}(\xi(\omega))=\lim_{n\to\infty}\overline{h_n}(\xi)$$

几乎处处存在(相对P)，而且有

$$\int\overline{h}(\xi)P(d\omega)=\int h(\xi)P(d\omega).$$

定理16(遍历定理) 设ξ是平稳随机测度，则下述命题等价：

1) ξ是遍历的；

2) 对任意$\mathbf{m}$可测非负函数h，有

$$\overline{h}=\int h(\xi)P(d\omega),\qquad a.e.P;$$

3) 对任意$Y_1\in\mathbf{m}$，$Y_2\in\mathbf{m}$ $t\in R^m$，成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(\xi\in y_1\cap T_t y_2)=P(\xi\in Y_1)P(\xi\in Y_2);$$

4) 如果存在平稳随机测度ξ_1，ξ_2使：

$$P\xi^{-1}=\alpha P\xi_1^{-1}+(1-\alpha)P_2\xi_2^{-1},\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

则$\alpha=0$或1。

这个定理，在点过程的情形见〔2〕,6.2.5,6.2.6。

2．Palm测度。

现在考虑平稳点过程，设ξ是平稳点过程，它的Campbell测度是$\mathbf{C}_\xi$。在可测映象

$$(a,\nu)\searrow(a,T_t\nu)\qquad a\in R^m,\qquad \nu\in M$$

之下，$\mathbf{C}_\xi$变为$\mathbf{A}\times\mathbf{m}$上的测度，记作$T\mathbf{C}_\xi$。现令 $N^0=\{\nu:\nu\in N,\nu(0,\cdots,0)>0\}$。又记$\mathbf{N}^0=N^0\cap\mathbf{N}$。

当ξ是平稳点过程时，可以证明$T\mathbf{C}_\xi$可表成：$T\mathbf{C}_\xi=L\times Q_\xi$。其中$Q_\xi$是$\mathbf{N}^0$上的$\sigma$有限测度。这个$\sigma$有限测度称为$\xi$的Palm测度。

由定义可见，若记$[0,1)^m$为R^m上的单位立方体，则$Q_\xi(Y)=T\mathbf{C}_\xi([0,1)^m\times Y)$，$Y\in\mathbf{N}^0$。

对于平稳点过程，它的矩测度与 Lebesgue 测度只相差一个常数。即$I_\xi=i_\xi L$。其中i_ξ称为平稳点过程的强度。

3．研究Palm测度的收敛性问题，下述引理是必须的。

引理 设Q，Q_1，…是$\mathbf{N}^0$上的有限测度，则$Q_n\overset{w}{\Rightarrow}Q$，当且仅当 $L\times Q_n\overset{l}{\Rightarrow}L\times Q$。

应用这一结果及定理 8 便可推得：

定理17　设$\xi,\xi_1,\cdots$是平稳点过程，且$I_{\xi_n}\in M$，$I_\xi\in M$(即i_{ξ_n}，$i_\xi<\infty$)，则下述命题等价：

1) $C_{\xi_n}\overset{l}{\Rightarrow}C_\xi$；

2) $Q_{\xi_n}\overset{w}{\Rightarrow}Q_\xi$；

3) $\xi_n\overset{w}{\Rightarrow}\xi$　且 $i_{\xi_n}\to i_\xi$。

4．对于平稳无穷小三角序列，则有(见〔2〕,10.3.9)。

定理18　设$\{\xi_{nj}\ \ 1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2,\cdots\}$是平稳点过程的无穷小三角序列，$i_{\xi_{nj}}<\infty(1\leqslant j\leqslant m_n,\ n=1,2\cdots)$。$\xi$是平稳无穷可分点过程，$i_\xi<\infty$，则

$$\sum_{1<j<m_n}Q\xi_{nj}\overset{w}{\Rightarrow}Q\xi$$

当且仅当　$\sum_{1<j<m_n}\xi_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}\xi,\ \sum_{1<j<m_n}i_{\xi_{nj}}\to i_\xi$。

5．关于收敛到Poisson过程，则有如下的(见〔2〕,10.3.13,10.3.14)。

定理19　设$\{\xi_{nj},1\leqslant j\leqslant m_n,n=1,2,\cdots\}$是平稳点过程的无穷小分布序列，均有有限强度$i_{\xi_{nj}}$，而且如果存在常数$l\geqslant0$，使得$\sum_{1<j<m_n}i\zeta_{nj}\longrightarrow l$　则　$\sum_{1<j<m_n}\xi_{nj}\overset{w}{\Rightarrow}\xi$

当且仅当对一切　$k>0$，成立

$$\sum_{1<j<m_n}Q\xi_{nj}(\nu:\nu(S_K(0,\cdots,0)>0)\to0,\quad(n\to\infty),$$

其中：ξ是有强度l的Poisson过程，而$S_k(0,\cdots,0)$是以$(0,\cdots,0)$为心，k为半径的开球。

最后，应当指出，平稳点过程(甚至平稳随机测度)的理论推广到满足第二可数公理的任意局部紧Abel拓扑群上去讨论是完全可以的。这在应用上也是重要的。

参考文献

〔1〕Bilingsley, P., Convergonce of Probability Measures, New York, (1968).

〔2〕Matthes, K., Kerstan. J and Mecke,J., *Infinitely Divisible Point processes*. New york,(1978).
(本书德文版，1974年出版，英文版有了比较大的修改，并且将1978年前有关文献都收入了书末有关文献，此处不再引用.)

〔3〕Kallenberg,O., Random Measure, New York, (1976).