各向异性Q模型的临界行为

周义昌　　黄念宁
(中山大学物理学系)　(暨南大学物理学系)

摘　要

应用d维空间重正化群方法，讨论以p级对称无迹张量为序参量的Q模型的临界行为。在ϵ^1级给出临界指数ν和交叉指数ϕg。

(一)

按照二级相变普适性假设，系统的临界行为不仅与哈密顿量的对称性及空间维数有关，而且与描述相变的序参量的内部对称性有关。Fisher等人[1]证明，各向异性n矢量模型，由于存在临界交叉指数，其临界行为有异于各向同性n矢量模型。Priest[2]研究了p级对称无迹张量$Q_{ij}(x)$为序参量所描述的系统，由于张量Q_{ij}的内部对称不同于n矢量，系统的临界行为具有新的特点。序参量$Q_{ij}(x)$描述的系统称为Q模型，$p=3$时它就是液晶的向列相——各向同性相($N—I$)相变，由于Q模型的实际意义，近年来颇受人们的注意[3,4]。

本文使用重正化群方法研究各向异性Q模型，下面将指出，由于Q模型的对角元素与非对角元素地位不同，作实空间重正化变换后，对角元素的二次项系数的递推关系与非对角元素的不同，因而Q模型本质上是各向异性的。本文结果证明，序参量Q_{ij}内部的各向异性，将导致临界点附近的交叉行为。

(二)

文献〔1〕所用的Q模型的哈密顿量为

$$H=\int d^dx\left[\frac{1}{4}rQ_{ij}Q_{ij}+\nabla Q_{ij}\cdot\nabla Q_{ij}-tQ_{ij}Q_{ik}Q_{ki}+u(Q_{ij}Q_{ij})^2+vQ_{ij}Q_{jk}Q_{kl}Q_{li}\right].\tag{1}$$

不同元素Q_{ij}具有相同的r，表示在Q_{ij}空间是各向同性的。无相互作用的自由传播子为[2]

$$\langle Q_{ij}(q)Q_{kl}(q)\rangle_0=(r+q^2)^{-1}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-\frac{2}{p}\delta_{ij}\delta_{kl}\right).\tag{2}$$

对角元素的自由传播子与非对角元素的自由传播子不同，重正化变换后对角元素的二次项系数比非对角元素的二次项系数多$\left(-\frac{8}{p}u+2v\right)\int_q^{>}G(q)$项，因而是各向异性的。文献〔2〕丢掉这一项，保持各向同性。

我们认为，应该讨论各向异性Q模型的哈密顿量

$$H=\int d^dx\left[\tfrac{1}{2}r_{ij}Q_{ij}Q_{ij}+\tfrac{1}{2}\nabla Q_{ij}\cdot\nabla Q_{ij}-tQ_{ij}Q_{jh}Q_{hi}+u(Q_{ij}\cdot Q_{ij})^2\right.$$
$$\left.+vQ_{ij}Q_{jh}Q_{hl}Q_{li}\right]。\tag{3}$$

上式Q_{ij}是$p\times p$无迹对称矩阵的元素，有$n=\frac{1}{2}(p+2)(p-1)$个独立元素，其中有$(p-1)$个独立的对角元素，其余为独立的非对角元素。为表示对角元素与非对角元素的作用不同，类似文献〔1〕，设

$$r_{ij}=\begin{cases}r, & i\neq j\\ r+g, & i=j\end{cases}\tag{4}$$

当$g=0$时，（4）式变为各向同性的H。为讨论各异性的作用，先考虑$t=v=0$的情形。

作实空间的重正化变换，准到ϵ^1级的递推关系(recursion relation)为：

$$r'_{ij}=b^2\left\{r_{ij}+4u\left[2\sum_{hl}\left(\delta_{hh}\delta_{ll}+\delta_{hl}-\frac{2}{p}\delta_{hl}\right)\int_q^{>}G(q,r_{hl})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+4\sum_{hl}\left(\delta_{ih}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jh}-\frac{2}{p}\delta_{ij}\delta_{hl}\right)\int_q^{>}G(q,r_{ij})\right]\right\}\quad,\tag{5a}$$

$$u'=b^{\epsilon}\left[u-32K_d\ln b\cdot\tfrac{1}{4}(p^2+p+14)u^2\right]\ .\tag{5b}$$

其中

$$\int_q^{>}G(q\ r_{il})\equiv\int_{(\frac{\Lambda}{b}<q<\Lambda)}\frac{d^dq/(2\pi)^d}{r_{hl}+q^2}\ .\tag{6}$$

$$K_d^{-1}=2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)。\tag{7}$$

（5a）分别对$i=j$及$i\neq j$写出：

$$r'+g'=b^2\left\{(r+g)+4u\left[4\left(p+1-\frac{1}{2p}\right)\int_q^{>}G(q,r+g)+2(p^2-p)\int_q^{>}G(q,r)\right]\right\},\tag{8a}$$

$$r'=b^2\left\{r+4u\left[2(2p-2)\int_q^{>}G(q,r+g)+2(p^2-p+4)\int_q^{>}G(q,r)\right]\right\}.\tag{8b}$$

（5b）准到ϵ^1级的非平庸不动点为

$$u^*=\frac{\epsilon}{16(n+8)K_d}\ .\tag{9}$$

其中

$$n=\tfrac{1}{2}(p+2)(p-1).\tag{10}$$

为独立的矩阵元素个数。再从方程（8a）与（8b），得到参数r及g在不动点附近的变换规律（不需要求出r^*及g^*）：

$$\Delta r' = b^{\lambda_1}\Delta r, \tag{11a}$$

$$\Delta g' = b^{\lambda_2}\Delta g. \tag{11b}$$

其中的指数

$$\lambda_1 = 2 - \frac{(p^2+p+2)}{2(n+8)}\epsilon, \tag{12}$$

$$\lambda_2 = 2 - \frac{(8-\frac{2}{p})}{4(n+8)}\epsilon. \tag{13}$$

指数$\lambda_1>0$，代表温度参数的不稳定性，它的倒数就是通常的临界指数ν，（12）式与文献[2]的结果相同；λ_2是本文的新结果，代表各向异性引起的交叉，交叉指数

$$\phi g \equiv \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{(n+\frac{1}{p})\epsilon}{4(n+8)} \tag{14}$$

$\phi g>0$，使得各向同性系统的不动点不稳定，趋向于新的不动点，以至改变临界温度[6]。

参考文献

〔1〕M. E. Fisher and P. Pfeuty, *Phys. Rev.*, **B6**(1972), 1889.

〔2〕K. G. Priest and T. C. Lukensky, *Phys. Rev.*, **B13**(1976), 4159.

〔3〕E. Pytte, *Phys. Rev.*, **B22**(1980), 4450.

〔4〕A. Aharanry, E. Pytte, *Phys. Rev.*, **B23**(1981), 362.

〔5〕D. Amit, Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena, McGraw-Hill Inc., (1978).

The Critical Behavior of the Anisotropic Q Model

Zhou Yichang　　Huang Nianning

Abstract

The Critical behavior of the anisotropic Q model having p-dimensional tensor, which is symmetric and traceless, is discussed using the renormalization group techniques for dimension $d=4-\epsilon$. To first order in ϵ^1, the critical exponent ν and the crossover exponent ϕg are given.