多自由度线性系统阻尼受迫振动的统一解法

谭忠棠 吴福光

（数学力学系）

对于多自由度线性系统的阻尼受迫振动问题，过去曾提出过两种解法：一种是引入状态变量的状态空间法[1,2]；另一种是建立新的正交关系的广义正交法[3]。对这两种方法的优缺点，胡海昌在文〔4〕中已加以评介，并提出了一种新的解法，我们把它称为预解式法。此法简单，便于推广，并保持了前两种解法的优点，避免了它们的缺点。

本文指出上述三种解法具有相同的实质，可以用统一的方式推导出来。

一、基本方程

考虑一个具有n个自由度的线性阻尼系统的受迫振动问题，其运动微分方程为

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{Q(t)\}, \tag{1.1}$$

式中$\{q\}$表示n维的广义坐标列阵，矩阵$[M]$、$[C]$、$[K]$均为$n\times n$的实对称常数矩阵，$\{Q(t)\}$为干扰力列阵。

自由振动方程为

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}. \tag{1.2}$$

令

$$\{q\}=\{x\}e^{\lambda t}, \tag{1.3}$$

将(1.3)代入(1.2)可得到

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{x\}=\{0\}. \tag{1.4}$$

特征方程为

$$|\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]|=0. \tag{1.5}$$

在复数域中，方程(1.5)具有$2n$个特征根$\lambda_i(i=1,2,\cdots\cdots 2n)$．对应有$2n$个特征矢量$\{x^{(i)}\}$，它们满足

$$\left(\lambda_i^2[M]+\lambda_i[C]+[K]\right)\{x^{(i)}\}=\{0\}, \qquad (i=1,2,\cdots 2n). \tag{1.6}$$

我们利用这$2n$个不独立的复特征矢量$\{x^{(i)}\}$作为模态矢量去解受迫振动问题。

二、状态空间特征矢量的正交关系和规范条件

引入状态变量，令$2n$维矢量

$$\{z\}=\begin{Bmatrix}\dot{q}\\ q\end{Bmatrix}, \tag{2.1}$$

则

$$\{\dot{z}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{q}\\ \dot{q}\end{Bmatrix}, \tag{2.2}$$

方程(1.2)可写为

$$\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\{\dot{z}\}+\begin{bmatrix}-M & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\{z\}=\{0\}, \tag{2.3}$$

记

$$[A]=\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}, \qquad [B]\begin{bmatrix}-M & 0\\ 0 & K\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

则(2.3)可写为

$$[A]\{\dot{z}\}+[B]\{z\}=\{0\}, \tag{2.5}$$

显然，$[A]$、$[B]$都是$2n\times 2n$实对称矩阵。

令

$$\{z\}=\{y\}e^{\mu t}, \tag{2.6}$$

代入(2.5)可得到

$$\mu[A]\{y\}+[B]\{y\}=\{0\}. \tag{2.7}$$

相应的特征方程为

$$|\mu[A]+[B]|=0, \tag{2.8}$$

当$[M]$为非奇异时，展开后知，上式和特征方程(1.5)全同，所以$\mu_i=\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,2n)$，因此，对应于λ_i的$2n$维特征矢量$\{y^{(i)}\}$满足

$$(\lambda_i[A]+[B]\{y^{(i)}\}=\{0\}, \qquad (i=1,2,\cdots,2n). \tag{2.9}$$

假定所有λ_i都是相异的，并假设已从(1.4)中消除了刚体模态，因而没有等于零的特征值。当矩阵$[M]$和$[K]$非奇异时，则$[B]$可求逆，从而(2.7)可化为普通特征值问题。按线性代数的结果知，(2.7)的相异的特征值对应的特征矢量是线性独立的，因此$2n$个特征矢量$\{y^{(i)}\}$构成了$2n$维矢量空间的一个基底。

因有

$$(\lambda_i[A]+[B])\{y^{(i)}\}=\{0\}, \qquad (i=1,2,\cdots,2n).$$

上式两端左乘$\{y^{(j)}\}'$得[*]

$$\lambda_i\{y^{(j)}\}'[A]\{y^{(i)}\}+\{y^{(j)}\}'[B]\{y^{(i)}\}=0, \tag{2.10}$$

类似地可得到

$$\lambda_j\{y^{(i)}\}'[A]\{y^{(j)}\}+\{y^{(i)}\}'[B]\{y^{(j)}\}=0. \tag{2.11}$$

两式相减并注意到$[A]$、$[B]$为对称矩阵，则有

$$(\lambda_i-\lambda_j)\{y^{(i)}\}'[A]\{y^{(j)}\}=0.$$

[*]本文用撇号‘，’表示矩阵的转置

由于$\lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$，所以

$$\{y^{(i)}\}'[A]\{y^{(j)}\}=0, \tag{2.12}$$

将(2.12)代入(2.11)有

$$\{y^{(i)}\}'[B]\{y^{(j)}\}=0. \tag{2.13}$$

式(2.12)和(2.13)就是不同特征值的特征矢量对矩阵$[A]$、$[B]$的正交关系。

当$i=j$时，

$$\{y^{(i)}\}'[A]\{y^{(i)}\}=\{y^{(i)}\}'\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\{y^{(i)}\}, \tag{2.14}$$

但因

$$\{y^{(i)}\}e^{\lambda_i t}=\{z^{(i)}\}=\begin{Bmatrix}\dot{q}^{(i)}\\ q^{(i)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}e^{\lambda_i t}\\ x^{(i)}e^{\lambda_i t}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}\\ x^{(i)}\end{Bmatrix}e^{\lambda_i t},$$

所以

$$\{y^{(i)}\}=\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}\\ x^{(i)}\end{Bmatrix}, \tag{2.15}$$

代入(2.14)进一步演化为

$$\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}\\ x^{(i)}\end{Bmatrix}'\begin{bmatrix}0 & M\\ M & C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}\\ x^{(i)}\end{Bmatrix}$$
$$=2\lambda_i\{x^{(i)}\}'[M]\{x^{(i)}\}+\{x^{(i)}\}'[C]\{x^{(i)}\}. \tag{2.16}$$

令

$$\{y^{(i)}\}'[A]\{y^{(i)}\}=2\lambda_i\{x^{(i)}\}'[M]\{x^{(i)}\}+\{x^{(i)}\}'[C]\{x^{(i)}\}=2\lambda_i, \tag{2.17}$$

由于特征矢量有一个常数倍数可以任意选定，我们就取(2.17)作为特征矢量的规范条件。此时，对于矩阵$[B]$有

$$\{y^{(i)\prime}\}[B]\{y^{(i)}\}=-2\lambda_i^2 \tag{2.18}$$

三、系统对谐干扰力的响应

设系统受到的干扰力为

$$\{Q(t)\}=\{Q_0\}e^{\lambda t},$$

式中$\{Q_0\}$为n维列阵。在状态空间中考虑受迫振动问题

$$[A]\{\dot{z}\}+[B]\{z\}=\begin{Bmatrix}0\\ Q(t)\end{Bmatrix}, \tag{3.1}$$

令受迫振动解为

$$\{z\}=\{y\}e^{\lambda t}, \tag{3.2}$$

代入(3.1)可得到

$$(\lambda[A]+[B])\{y\}=\begin{Bmatrix}0\\ Q_0\end{Bmatrix}, \tag{3.3}$$

现将$\{y\}$按特征矢量$\{y^{(i)}\}$展开

$$\{y\}=\sum_{i=1}^{2n}c_i\{y^{(i)}\}, \tag{3.4}$$

代入(3.3)得

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i(\lambda[A]+[B])\{y^{(i)}\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{Bmatrix}, \tag{3.5}$$

上式两端左乘$\{y^{(j)}\}'$得

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i\{y^{(j)}\}'(\lambda[A]+[B])\{y^{(i)}\}=\{y^{(j)}\}'\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{Bmatrix}, \tag{3.6}$$

利用正交条件和规范条件，上式成为

$$c_j\cdot 2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)=\{y^{(j)}\}'\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{Bmatrix},$$

注意到(2.15)，可求得

$$c_j=\frac{\{x^{(j)}\}'\{Q_0\}}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}, \tag{3.7}$$

将(3.7)代回(3.4)，得到响应的振幅为

$$\{y\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}'\{Q_0\}}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}\{y^{(j)}\},$$

相应的n维振幅为

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{x^{(j)}\}'}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}\{Q_0\}, \tag{3.8}$$

简谐力作用时，令上式中的$\lambda=i\omega$，得到复响应为

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{x^{(j)}\}'}{2\lambda_j(i\omega-\lambda_j)}\{Q_0\}, \tag{3.9}$$

此公式与文[4]所导出的(5.4)式一致。

四、预解式和谐影响系数按特征矢量的展开式

如果我们在n维空间来考察受迫振动，并设$\{Q(t)\}=\{Q_0\}e^{\lambda t}$，则有

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{Q_0\}e^{\lambda t}, \tag{4.1}$$

令

$$\{q\}=\{x\}e^{\lambda t}, \tag{4.2}$$

可得到

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{x\}=\{Q_0\}, \tag{4.3}$$

$$\{x\}=(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])^{-1}\{Q_0\}, \tag{4.4}$$

将(4.4)和(3.8)相比较，并注意到$\{Q_0\}$的任意性可得

$$[R(\lambda)]=\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{x^{(j)}\}'}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}, \tag{4.5}$$

这就是文[4]中得到的预解式$[R(\lambda)]$对$2n$个特征矢量$\{x^{(j)}\}$的展开式。

上述推导中我们只用到矩阵$[M]$、$[C]$、$[K]$为实对称，$[M]$和$[K]$非奇异，以及特征值互异的条件。

当干扰力振幅$\{Q_0\}$只有第k个分量等于1，而其余分量为零时，则

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{x^{(j)}\}'}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}\{Q_0\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}x_k^{(j)}\{x^{(j)}\}$$

其中，第l个坐标的响应为

$$\sum_{j=1}^{2n}\frac{x_k^{(j)}x_l^{(j)}}{2\lambda_j(\lambda-\lambda_j)},$$

上式中令$\lambda=i\omega$，便得到在第k个坐标上作用有圆频率为ω的单位谐干扰力时，在第l个坐标引起的复响应，亦即复的谐影响系数为

$$\beta_{lk}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{x_k^{(j)}x_l^{(j)}}{2\lambda_j(i\omega-\lambda_j)},\tag{4.6}$$

这里看出，谐影响系数β_{kl}具有对称性。

特别地，当无阻尼时，$[C]=0$，如果$[M]$、$[K]$均为正定的，则广义特征值方程

$$(\lambda^2[M]+[K])\{x\}=\{0\}$$

的特征值λ的平方全小于零，即

$$\lambda^2<0,$$

此时$2n$个特征值为

$$\lambda_s=i\omega_s,\ \lambda_{n+s}=-i\omega_s,\quad(s=1,2,\cdots,n).$$

显然，λ_s和λ_{n+s}对应于同一个实特征矢量，即

$$\{x^{(s)}\}=\{x^{(n+s)}\},\quad(s=1,2,\cdots,n).$$

于是，谐影响系数(4.7)成为

$$\beta_{lk}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{x_k^{(s)}x_l^{(s)}}{2i\omega_s(i\omega-i\omega_s)}+\frac{x_k^{(n+s)}x_l^{(n+s)}}{-2i\omega_s(i\omega+i\omega_s)}\right)=\sum_{s=1}^{n}\frac{x_k^{(s)}x_l^{(s)}}{\omega_s^2-\omega^2}$$

此式与文[5]的公式(5.15)相同。

五、系统矩阵为非对称的情形

我们把方程(1.1)中的矩阵$[M]$、$[C]$、$[K]$称为系统矩阵。今考察系统矩阵为非对称，因而$[A]$、$[B]$非对称的情形[*]。

令$\{y^{(i)}\}$是对应于特征值λ_i的右特征矢量：

$$(\lambda_i[A]+[B])\{y^{(i)}\}=\{0\},\qquad(i=1,2,\cdots,2n).\tag{5.1}$$

又令$\{u^{(i)}\}$为对应于λ_i的左特征矢量：

$$\{u^{(i)}\}'(\lambda_i[A]+[B])=\{0\}',\quad(i=1,2,\cdots,2n).\tag{5.2}$$

对(5.2)求转置有

$$(\lambda_i[A]'+[B]'\{u^{(i)}\}=\{0\},\quad(i=1,2,\cdots,2n).\tag{5.3}$$

[*] 对于确定的力学系统，[M]、[K]都是对称的或者可以化为对称的。矩阵[C]可能非对称（例如有阻尼的陀螺系统就是这种情形）。这里姑且讨论[M]、[K]、[C]全为非对称的情形

根据第三段的理由，当$[M]$和$[K]$非奇异，并假设所有特征根相异时，存在$2n$个线性独立的$\{y^{(i)}\}$和$2n$个线性独立的$\{u^{(i)}\}$，它们构成$2n$维矢量空间两组不同的基底。

由(5.1)和(5.2)可得

$$\{u^{(i)}\}'(\lambda_i[A]+[B])\{y^{(j)}\}=0, \tag{5.4}$$

$$\{u^{(i)}\}'(\lambda_i[A]+[B])\{y^{(j)}\}=0, \tag{5.5}$$

两式相减得

$$(\lambda_j-\lambda_i)\{u^{(i)}\}'[A]\{y^{(j)}\}=0. \tag{5.6}$$

由于假设$i\neq j$时$\lambda_i\neq\lambda_j$，则有

$$\{u^{(i)}\}'[A]\{y^{(j)}\}=0. \tag{5.7}$$

由此也有

$$\{u^{(i)}\}'[B]\{y^{(j)}\}=0. \tag{5.8}$$

式(5.7)和(5.8)就是左、右特征矢量的双正交关系。

当$i=j$时，可令

$$\{u^{(i)}\}'[A]\{y^{(i)}\}=1. \tag{5.9}$$

从而

$$\{u^{(i)}\}'[B]\{y^{(i)}\}=-\lambda_i. \tag{5.10}$$

式(5.9)或(5.10)可作为对$\{u^{(i)}\}$和$\{y^{(i)}\}$的规范条件（值得注意的是，条件(5.9)或(5.10)只能确定左、右特征矢量常数倍数的乘积）。

类似于(2.17)，我们也可以将(5.9)演化为n维空间的表示式。事实上，由于

$$\{y^{(i)}\}=\begin{Bmatrix}\lambda_i x^{(i)}\\ x^{(i)}\end{Bmatrix}, \tag{5.11}$$

$$\{u^{(i)}\}=\begin{Bmatrix}\lambda_i v^{(i)}\\ v^{(i)}\end{Bmatrix}. \tag{5.12}$$

这里的$\{u^{(i)}\}$是(5.3)所确定的状态空间的振幅矢量，$\{v^{(i)}\}$则是它在n维空间的振幅矢量。因此有

$$\begin{aligned}\{u^{(i)}\}'[A]\{y^{(i)}\}&=\begin{Bmatrix}\lambda_i v^{(i)}\\ v^{(i)}\end{Bmatrix}'\begin{bmatrix}0&M\\M&C\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_i v^{(i)}\\ v^{(i)}\end{Bmatrix}\\&=2\lambda_i\{v^{(i)}\}'[M]\{x^{(i)}\}+\{v^{(i)}\}'[C]\{x^{(i)}\}=1.\end{aligned} \tag{5.13}$$

这就是所需求的式子。

考虑干扰力$\{Q(t)\}=\{Q_0\}e^{\lambda t}$的情形。我们有方程(3.1)，现去确定展开式(3.4)的系数。以$\{u^{(j)}\}'$左乘(3.5)两端得

$$\sum_{i=1}^{2n}c_i\{u^{(j)}\}'(\lambda[A]+[B])\{y^{(i)}\}=\{u^{(j)}\}'\begin{Bmatrix}0\\Q_0\end{Bmatrix}, \tag{5.14}$$

利用双正交关系和规范条件得

$$\begin{aligned}c_i(\lambda-\lambda_j)&=\{u^{(j)}\}'\begin{Bmatrix}0\\Q_0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\lambda_j v^{(j)}\\ v^{(j)}\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}0\\Q_0\end{Bmatrix}\\&=\{v^{(j)}\}'\{Q_0\},\end{aligned} \tag{5.15}$$

从而求得

$$c_j=\frac{\{v^{(j)}\}'\{Q_0\}}{\lambda-\lambda_j},\tag{5.16}$$

代入(3.4)得

$$\{y\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{v^{(j)}\}'\{Q_0\}}{\lambda-\lambda_j}\{y^{(j)}\},\tag{5.17}$$

所以

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{v^{(j)}\}'\{Q_0\}\{x^{(j)}\}}{\lambda-\lambda_j},\tag{5.18}$$

最后可得受迫振动的解为

$$\{q\}=\{x\}e^{\lambda t}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{v^{(j)}\}'\{Q_0\}\{x^{(j)}\}}{\lambda-\lambda_j}e^{\lambda t},\tag{5.19}$$

但如果将$\{q\}=\{x\}e^{\lambda t}$直接代入运动方程(4.1)，得到

$$(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])\{x\}=\{Q_0\}.$$

求得

$$\{x\}=(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K])^{-1}\{Q_0\},\tag{5.20}$$

注意到(5.18)可写为

$$\{x\}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{v^{(j)}\}'}{\lambda-\lambda_j}\{Q_0\}.\tag{5.21}$$

比较(5.20)和(5.21)，由于$\{Q_0\}$的任意性可得

$$\left[R(\lambda)\right]\equiv\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)^{-1}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{v^{(j)}\}'}{\lambda-\lambda_j},\tag{5.22}$$

Fanzy和Bishop在1976年得到的$[R(\lambda)]$为[8]：

$$\begin{aligned}\left[R(\lambda)\right]&=\\&=\left[\{x^{(1)}\}\{x^{(2)}\}\cdots\{x^{(2n)}\}\right]_{n\times 2n}\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda-\lambda_1}&&&\\&\frac{1}{\lambda-\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{\lambda-\lambda_{2n}}\end{pmatrix}_{2n\times 2n}\begin{pmatrix}\{v^{(1)}\}'\\\{v^{(2)}\}'\\\vdots\\\{v^{(2n)}\}'\end{pmatrix}_{2n\times n}\\&=\left[\frac{\{x^{(1)}\}}{\lambda-\lambda_1}\ \frac{\{x^{(2)}\}}{\lambda-\lambda_2}\cdots\cdots\frac{\{x^{(2n)}\}}{\lambda-\lambda_{2n}}\right]_{n\times 2n}\begin{pmatrix}\{v^{(1)}\}'\\\{v^{(2)}\}'\\\vdots\\\{v^{(2n)}\}'\end{pmatrix}_{2n\times n}\\&=\sum_{j=1}^{2n}\frac{\{x^{(j)}\}\{v^{(j)}\}'}{\lambda-\lambda_j}.\end{aligned}$$

这结果就是(5.22)所表达的。

参 考 文 献

〔1〕Foss K. A., Coordinates which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, *J. Appl. Mech.*, 25(1958).

〔2〕Woodcock D. L., On the Interpratation of the Vector Plots of Forced Vibration of a Linear System with Viscous Damping, *Aero. Quart*, 14 (1963), 45.

〔3〕Fanzy I. and Bishop R. E. D., On the Dynamics of Linear Nonconservation Systems, *Proc. Roy. Soc.*, *A* 352 (1976), 25.

〔4〕胡海昌，多自由度线性阻尼系统的振动问题，固体力学学报，1 (1980).

〔5〕巴巴科夫，振动理论，上册，薛中擎译，人民教育出版社，(1962).

United Solution of Forced Vibration of Linear Damped Systems

Tan Zhongtang *Wu Fuguang*

Abstract

The vibration of linear damped systems with multiple degree of freedom is discussed in this paper. An united method of solution is put forward based on the three existing methods of the state space solution, the generalized orthogonalitg solution, and the resolvent solution. According to the united method, some main conclusions that have been received by the aforementioned method are obtained.