参数样条磨光与插值*

陈大正

（计算机科学系）

一、参数样条磨光与插值公式的构造

对于区间$[a,b]$的一个等距分划

π: $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$, $x_i=x_0+ih$, $h=(b-a)/N$, 及对应的一组型值y_i, $i=0,1,\cdots,N$。相应的k次基本样条磨光公式为[1]：

$$(1)\qquad S_k(x)=\sum_{j=0}^{N}y_j\Omega_k\left(\frac{x-x_j}{h}\right).$$

本文考虑一类带参数的样条磨光公式

$$(2)\qquad S_k(x)=\sum_{j}y_j\Phi_k(x-j),$$

其中

$$(3)\qquad \Phi_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}a_iu_i\Omega_k(x),$$

a_i为参数，u_i为平均算子，即有

$$u_i f(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(x+\frac{i}{2}\right)+f\left(x-\frac{i}{2}\right)\right].$$

下面寻找a_i与$S_k(x)$的代数精确度的关系。

记$k=2m+m_0$，$m=0,1,\cdots$，$m_0=0$或1，$x_i=i-\frac{k-1}{2}$为$\Omega_k(x)$的内结点，

$p_k(x)=\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$为$\Omega_k(x)$的结点多项式，即

$$(4)\qquad p_k(x)=x^{m_0}\sum_{i=0}^{m}b_{2i}x^{2(m-i)}.$$

其中b_{2i}为确定常数，且$b_0=1$。

那末$\Omega_k(x-j)$的结点多项式可表为

$$(5)\qquad p_k(x-j)=\sum_{r=0}^{k}C_{r,j}x^{k-r},$$

---

* 本文1981年12月收到

若记 $v=2q+q_0$，$q=0,1,\cdots,m$，$q_0=0$或1，则可以得到

$$(6)\qquad C_{v,j}=(-1)^v j^{q_0}\sum_{j=0}^{q}\binom{k-2i}{k-v}j^{2(q-j)}b_{2i}.$$

又由Marsden恒等式[2]可知

$$(7)\qquad x^v=(-1)^v\sum_j C_{v,j}\Big/\binom{k}{v}\cdot\Omega_k(x-j),$$

将(6)代入(7)可得

$$(8)\qquad x^v=\sum_j\left(j^{q_0}\sum_{i=0}^{q}\binom{k-2i}{k-v}\Big/\binom{k}{v}b_{2i}j^{2(q-i)}\right)\Omega_k(x-j).$$

设$S_k(x)$对x^v的逼近是精确的，即有

$$x^v=\sum_j j^v\Phi_k(x-j),$$

则由上面分析不难得到

$$(9)\qquad x^v=\sum_j j^{q_0}\Big(\sum_{l=0}^{k-1}a_l\sum_{i=0}^{q}\binom{v}{2i}\Big(\frac{l}{2}\Big)^{2i}j^{2(q-i)}\Big)\Omega_k(x-j).$$

由于$\Omega_k(x-j)$，$j=0,\pm1,\cdots$,线性无关，故由（8）及（9）可得

$$(10)\qquad \sum_{i=0}^{q}\sum_{l=0}^{k-1}\Big(\frac{l}{2}\Big)^{2i}\cdot a_l\binom{v}{2i}j^{2(q-i)}=\sum_{i=0}^{q}\binom{k-2i}{k-v}\Big/\binom{k}{v}\cdot b_{2i}j^{2(q-i)}.$$

对比(10)式两边$j^{2(q-i)}$系数并注意$\binom{k-2i}{k-v}\Big/\binom{k}{v}\cdot\binom{v}{2i}=1\Big/\binom{k}{2i}$可得

$$(11)\qquad \sum_{l=0}^{k-1}\Big(\frac{l}{2}\Big)^{2i}a_l=b_{2i}\Big/\binom{k}{2i},\quad i=0,1,\cdots,q,$$

即

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & (\frac{1}{2})^2 & 1^2 & \cdots & (\frac{k-1}{2})^2\\ 0 & (\frac{1}{2})^4 & 1^4 & \cdots & (\frac{k-1}{2})^4\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & (\frac{1}{2})^{2q} & 1^{2q} & \cdots & (\frac{k-1}{2})^{2q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ b_2/\binom{k}{2}\\ \\ \vdots\\ b_{2q}/\binom{k}{2q}\end{pmatrix}.$$

由上分析可知，若要求$S_k(x)$对x^v的逼近是精确的，则参数a_l要满足方程组(11)，且从(11)可以看到当$v=2q$或$v=2q+1$时，对应的方程组完全相同，而当v增加2，所对应的方程组是原来方程组再增加一个方程。因此，若a_l满足(11)式则$S_k(x)$的代数精确度为v。综上所述，有下面定理：

定理 设$S_k(x)$及$\Phi_k(x)$分别由(2)、(3)式所定义，则$S_k(x)$的代数精确度为$v=2q+q_0$的充要条件是$\Phi_k(x)$的系数a_l要满足方程组(11)。

因为(11)系数矩阵的秩为$q+1$，所以若把a_0，a_1，$\cdots$，a_q作为未知数，a_{q+1}，$\cdots$，a_{k-1}作为参数，解方程组(11)，就得到带有$k-q-1$个参数，基函数的跨度为$2k$，代数精确度

为v的磨光公式。适当选择参数，就可得到各种代数精确度的磨光公式以至插值公式。

推论 1　取$v=k$，则可得到带有$m+m_0-1$个参数的高精度磨光公式。

对于$k=3$、4、5，算得$\Phi_k(x)$如下：

$$\Phi_3(x)=\left[\left(\frac{7}{3}+3a_2\right)u_0-\left(\frac{4}{3}+4a_2\right)u_1+a_2u_2\right]\Omega_3(x);$$

$$\Phi_4(x)=\left[\left(\frac{16}{3}-10a_3\right)u_0-\left(\frac{47}{9}-15a_3\right)u_1+\left(\frac{8}{9}-6a_3\right)u_2+a_3u_3\right]\Omega_4(x);$$

$$\Phi_5(x)=\left[\left(\frac{201}{30}+10a_3-45a_4\right)u_0-\left(\frac{208}{30}-15a_3-64a_4\right)u_1\right.$$
$$\left.+\left(\frac{37}{30}-6a_3-20a_4\right)u_2+a_3u_3+a_4u_4\right]\Omega_5(x).$$

推论 2　取$v=k$并令$a_{m+1}=\cdots=a_{k-1}=0$，则得到不带参数、基函数跨度为$k+1+m$的高精度磨光公式。

对$k=3$、4、5，算得$\Phi_k(x)$如下：

$$\Phi_3(x)=\left(\frac{7}{3}u_0-\frac{4}{3}u_1\right)\Omega_3(x);$$

$$\Phi_4(x)=\left(\frac{16}{3}u_0-\frac{47}{9}u_1+\frac{8}{9}u_2\right)\Omega_4(x);$$

$$\Phi_5(x)=\left(\frac{201}{30}u_0-\frac{208}{30}u_1+\frac{37}{30}u_2\right)\Omega_5(x).$$

推论 3　取$v=k$并把$\Phi_k(x)$改为$\Phi_k(x)=\sum\limits_{i=0}^{2m}a_iu_i\Omega_k(x)$，令$a_{2i+1}=0, i=0,\cdots,m-1$，相应的(11)改为

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \cdots & m^2 \\ 0 & 1^4 & 2^4 & \cdots & m^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1^{2m} & 2^{2m} & \cdots & m^{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{2m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ b_2\Big/\binom{k}{2} \\ \\ \vdots \\ b_{2m}\Big/\binom{k}{2m} \end{pmatrix},$$

则$S_k(x)$为具有通常结点的高精度磨光公式。

对$k=3$、4、5，算得$\Phi_k(x)$如下：

$$\Phi_3(x)=\left(\frac{4}{3}u_0-\frac{1}{3}u_2\right)\Omega_3(x);$$

$$\Phi_4(x)=\left(\frac{47}{576}u_0-\frac{107}{144}u_2+\frac{319}{192}u_4\right)\Omega_4(x);$$

$$\Phi_5(x)=\left(\frac{73}{40}u_0-\frac{14}{15}u_2+\frac{13}{120}u_4\right)\Omega_5(x).$$

推论 4　令$v=k$，并令$\Phi_k(v)=0$，$v=m+1$，…，$k-1$，和(11)式并在一起可得k个未知数k个方程的方程组，可以证明，这个方程组唯一可解，从而全部参数被确定，

我们得到了显式高精度插值公式。

对于$k=3$、4、5，算得插值基函数如下：

$$\Phi_3(x)=(\frac{10}{3}u_0-\frac{8}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2)\Omega_3(x);$$

$$\Phi_4(x)=(\frac{56}{9}u_0-\frac{59}{9}u_1+\frac{64}{45}u_2-\frac{4}{45}u_3)\Omega_4(x);$$

$$\Phi_5(x)=(\frac{37679}{3120}u_0-\frac{2938}{195}u_1+\frac{717}{156}u_2-\frac{122}{195}u_3+\frac{61}{3120}u_4)\Omega_5(x).$$

二、带参数三次磨光曲线

下面以$k=3$为例，具体分析三次参数磨光与插值公式的性质，并指出参数对曲线逼近性和保凸性的影响。

由上分析，在$[a,b]$及分划π上带有参数a_2的三次磨光公式为：

$$S_3(x)=\sum_{j=0}^{N}y_j[(\frac{7}{3}+3a_2)u_0-(\frac{4}{3}+4a_2)u_1+a_2u_2]\Omega_3(\frac{x-x_j}{h}). \tag{13}$$

通过计算可得下面结果：

$$S_3(x_i)=y_i+\frac{3a_2-1}{72}\Delta^4y_{i-2}=y_i+O(h^4),$$

$$S_3'(x_i)=\frac{1}{2h}(\Delta y_i+\Delta y_{i-1})-\frac{1}{12h}(\Delta^3y_{i-1}+\Delta^3y_{i-2})=y_i'+O(h^4),$$

$$S_3''(x_i)=\frac{1}{h^2}\Delta^2y_{i-1}-\frac{3a_2+2}{6h^2}\Delta^4y_{i-2}=y_i''+O(h^2),$$

$$S_3'''(x_i)=\frac{1}{2h^2}(\Delta^3y_{i-1}+\Delta^3y_{i-2})+\frac{a_2}{4h^3}(\Delta^5y_{i-2}+\Delta^5y_{i-3})=y_i'''+O(h^2),$$

$$\begin{aligned}S_3(x_{i+\frac{1}{2}})&=\frac{1}{2}(y_{i+1}+y_i)-\frac{1}{16}(\Delta^2y_i+\Delta^2y_{i-1})+\frac{a_2}{96}(\Delta^4y_{i-1}+\Delta^4y_{i-2})\\&=y_{i+\frac{1}{2}}+O(h^4),\end{aligned} \tag{14}$$

$$S_3'(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{1}{h}\Delta y_i-\frac{1}{24h}\Delta^3y_{i-1}+\frac{a_2}{16h}\Delta^5y_{i-2}=y'_{i+\frac{1}{2}}+O(h^4),$$

$$S_3''(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{1}{2h^2}(\Delta^2y_i+\Delta^2y_{i-1})+\frac{a_2}{4h^2}(\Delta^4y_{i-1}+\Delta^4y_{i-2})=y''_{i+\frac{1}{2}}+O(h^2),$$

$$S_3'''(x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{1}{h^3}\Delta^3y_{i-1}-\frac{1}{6h^3}(3a_2+2)\Delta^5y_{i-2}=y'''_{i+\frac{1}{2}}+O(h^2).$$

（注　$S_3'''(x_i)$、$S_3'''(x_{i+\frac{1}{2}})$定义为左右极限的平均值）

应用台罗展式还可得到下面误差估计

(15)　$\|f^{(\alpha)}(x)-S_3^{(\alpha)}(x)\|_\infty=0(h^{4-\alpha})$，$\alpha=0,1,2,3$，其中$x\epsilon[a+2h,\ b-2h]$。

现将$a_2=-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，0，$\frac{1}{3}$，其对应的磨光公式主要性质列于下表：

a_2	$S_3(x_i)$	$S_3''(x_i)$	$S_3''(x_{i+\frac{1}{2}})$
$-\frac{2}{3}$	$y_i-\frac{1}{24}\Delta^4 y_{i-2}$	$\Delta^2 y_{i-1}/h^2$	$[\frac{1}{2}(\Delta^2 y_i+\Delta^2 y_{i-1})-\frac{1}{6}(\Delta^4 y_{i-1}+\Delta^4 y_{i-2})]/h^2$
$-\frac{1}{3}$	$y_i-\frac{1}{36}\Delta^4 y_{i-2}$	$(\Delta^2 y_{i-1}-\frac{1}{6}\Delta^4 y_{i-2})/h^2$	$[\frac{1}{2}(\Delta^2 y_i+\Delta^2 y_{i-1})-\frac{1}{12}(\Delta^4 y_{i-1}+\Delta^4 y_{i-2})]/h^2$
0	$y_i-\frac{1}{72}\Delta^4 y_{i-2}$	$(\Delta^2 y_{i-1}-\frac{1}{3}\Delta^4 y_{i-2})/h^2$	$\frac{1}{2}(\Delta^2 y_i+\Delta^2 y_{i-1})/h^2$
$\frac{1}{3}$	y_i	$(\Delta^2 y_{i-1}-\frac{1}{2}\Delta^4 y_{i-2})/h^2$	$[\frac{1}{2}(\Delta^2 y_i+\Delta^2 y_{i-1})+\frac{1}{12}(\Delta^4 y_{i-1}+\Delta^4 y_{i-2})]/h^2$

从上表可知，当a_2从$-\frac{2}{3}$变成$\frac{1}{3}$时，其逼近性越来越好，直到最后出现插值，而保凸性则反之变差，应用上一般可取$-\frac{2}{3}\leqslant a_2\leqslant\frac{1}{3}$。

参考文献

〔1〕李岳生、齐东旭，样条函数方法，科学出版社，1979.

〔2〕Marsden M., An identity for spline functions with application to variation diminishing spline approximation, *J, Approx. Theory* 3(1976), 7—49.

〔3〕Schoenberg I.,*J. Quarterly of Appl. Math.*, 4(1946), 45—99, 112—141.

Parametric Spline Smoothing and Interpolation

Chen Dazheng

Abstract

This paper presents a type of spline smoothing formulas that were preseribed any algebraic precision using the Marsden identity and B-spline functions. The various smoothing formulas and the interpolation formulas with higher precision are given. Finally the constructions of cubic smoothing interpolation formulas are discussed.