

多自由度线性阻尼系统的随机振动分析

徐 兆
(数学力学系)

摘 要

本文讨论多自由度线性阻尼系统,应用状态空间法使系统非耦合,得到系统的一般响应和激励为弱平稳随机过程时响应的互谱密度矩阵。

对于多自由度线性阻尼系统的随机振动分析,在比例阻尼情形已经很清楚了,而一般阻尼情形还缺乏深入的研究。本文就一般阻尼情形作较为详细的讨论。应用状态空间法把系统的运动微分方程变换成非耦合方程,从而求得系统的响应,对于激励为弱平稳随机过程时,还导出了响应为弱平稳的条件和响应的互谱密度矩阵的简单表示式。

本文的结果表明,不论是比例阻尼还是一般阻尼都可以化为非耦合情形,只是所选用的模态不同而已,解决问题的方法步骤是类似的。

一、响应的一般表示式

设具有 n 个自由度线性阻尼系统的运动微分方程式为

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

式中 $\{X(t)\}$ 表示 n 维的广义坐标列阵,矩阵 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 为 $n \times n$ 实常数矩阵。

$$|[M]| \neq 0, \quad (2)$$

$\{F(t)\}$ 为 n 维广义随机列阵。

我们先求系统的响应。由条件(2)可知,逆矩阵 $[M]^{-1}$ 存在。现以 $[M]^{-1}$ 左乘方程(1)两边得

$$[E]\{\ddot{X}(t)\} + [C_1]\{\dot{X}(t)\} + [K_1]\{X(t)\} = \{G(t)\} \quad (3)$$

式中

$$[C_1] = [M]^{-1}[C], \quad [K_1] = [M]^{-1}[K], \quad \{G(t)\} = [M]^{-1}\{F(t)\} \quad (4)$$

设方程(3)的特征方程

$$|\lambda^2[E] + \lambda[C_1] + [K_1]| = 0 \quad (5)$$

的 $2n$ 个特征根为 λ_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$)

本文1983年2月收到

引入状态变量, 令 $2n$ 维向量

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix} \quad (6)$$

则
$$\{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{X} \\ \dot{X} \end{Bmatrix}$$

方程(3)可写为

$$[A]\{\dot{Y}\} + [B]\{Y\} = \{P(t)\} \quad (7)$$

式中(**)
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & C_1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ G(t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

方程(7)对应的特征方程为

$$|\mu[A] + [B]| = 0 \quad (10)$$

由文[3]可证明, $\mu_j = \lambda_j$, ($j=1, 2, \dots, 2n$). 令 $\{v^{(j)}\}$ 是对应于特征根 λ_j 的右特征向量,

$$(\lambda_j[A] + [B])\{v^{(j)}\} = \{0\}, \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \quad (11)$$

又令 $\{u^{(j)}\}$ 为对应于 λ_j 的左特征向量(**),

$$\{u^{(j)}\}^T(\lambda_j[A] + [B]) = \{0\}^T, \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \quad (12)$$

显然, 当 $[A]$ 和 $[B]$ 均为对称矩阵时, $\{u^{(j)}\} = \{v^{(j)}\}$ 但这里我们并没有要求矩阵是对称的。

假定所有 λ_j 都是相异的, 则 $2n$ 个 $\{u^{(j)}\}$ 和 $2n$ 个 $\{v^{(j)}\}$ 构成 $2n$ 维向量空间的两组不同基底。

再令 $[u] = [\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(2n)}\}]$; $[v] = [\{v^{(1)}\}, \{v^{(2)}\}, \dots, \{v^{(2n)}\}]$. (13)

则不难验证(3), 可选取 $[u]$ 和 $[v]$ 使得

$$[u]^T[A][v] = [E], \quad [u]^T[B][v] = [\Lambda - \lambda_j] \quad (14)$$

这里 $[\Lambda - \lambda_j]$ 表示对角矩阵:

$$[\Lambda - \lambda_j] = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & 0 & \\ & & \dots & \\ 0 & & & -\lambda_{2n} \end{bmatrix} \quad (15)$$

作变换

$$\{Y\} = [v]\{Z\} \quad (16)$$

并以 $[u]^T$ 左乘方程(7)得

$$[u]^T[A][v]\{Z\} + [u]^T[B][v]\{Z\} = [u]^T\{P(t)\} \quad (17)$$

记 $\{Q(t)\} = [u]^T\{P(t)\} \quad (18)$

并按式(14)可把方程(17)写成

$$[E]\{Z\} + [\Lambda - \lambda_{ij}]\{Z\} = \{Q(t)\} \quad (19)$$

(*) 方括号 $[]$ 内的 E , C_1 , K_1 表示矩阵 $[E]$, $[C_1]$, $[K_1]$.

(**) 本文用'T'表示矩阵的转置。

即

$$\dot{Z}_j(t) - \lambda_j Z_j(t) = Q_j(t), \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \tag{20}$$

这是非耦合方程组。方程(20)的解可写成

$$Z_j(t) = Z_j(0)e^{\lambda_j t} + \int_0^t e^{\lambda_j(t-\eta)} Q_j(\eta) d\eta \tag{21}$$

令 $\zeta = t - \eta$

则式(21)可写成

$$Z_j(t) = Z_j(0)e^{\lambda_j t} + \int_0^t e^{\lambda_j \zeta} Q_j(t-\zeta) d\zeta, \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \tag{22}$$

以变换(6)和(16)代入上式后,就得到一般阻尼系统(1)的响应 $\{X(t)\}$ 的一般表示式。

二、激励为弱平稳随机过程时的响应

现在设方程(1)中 $\{F(t)\}$ 为弱平稳随机矢量,它的互谱密度矩阵记为 $[S_{FF}(\omega)]$ 。

此外设特征方程

$$|\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]| = 0 \tag{23}$$

的 $2n$ 个特征根均有负实部,即

$$Re(\lambda_j) < 0, \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \tag{24}$$

由于 $[M]^{-1}$ 存在,方程(23)和(5)是等价的。不难验证,当 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 均为正定矩阵时,条件(24)是满足的。在这个条件下,初始值的影响随着时间增长而减少。因此,我们仅考虑零初值响应,即

$$Z_i(t) = \int_0^t e^{\lambda_j \zeta} Q_j(t-\zeta) d\zeta, \quad (j=1, 2, \dots, 2n) \tag{25}$$

设 Z_j 与 Z_k ($j, k=1, 2, \dots, 2n$)的互相关函数为

$$\begin{aligned} E[Z_j(t)Z_k^*(t+\tau)] &= \int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{\lambda_j \zeta} e^{\lambda_k^* \zeta_k} E[Q_j(t-\zeta_j)Q_k^*(t+\tau-\zeta_k)] d\zeta_j d\zeta_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{Q_j Q_k}(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)(-\lambda_k^* + i\omega)} [1 - I(\omega, t, \tau)] d\omega \end{aligned} \tag{26}$$

式中 $S_{Q_j Q_k}(\omega)$ 表示 $Q_j(t)$ 与 $Q_k(t)$ 的互谱密度。

$$I(\omega, t, \tau) = e^{(\lambda_j + i\omega)t} + e^{(\lambda_k^* - i\omega)(t+\tau)} - e^{(\lambda_j + i\omega)t + (\lambda_k^* - i\omega)(t+\tau)}$$

由条件(24)可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(\omega, t, \tau) \rightarrow 0$ 。因此,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_j(t)Z_k^*(t+\tau)] &= R_{Z_j Z_k}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{Q_j Q_k}(\omega) \frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)(-\lambda_k^* + i\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \tag{27}$$

上式表明,当系统满足条件(24)且激励为弱平稳随机过程时,经过很长时间以后,响应也是弱平稳随机过程。

由式(27)可知 Z_j 与 Z_k 的互谱密度为

$$S_{z_j z_k}(\omega) = \frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} S_{Q_j Q_k}(\omega) \frac{1}{(-\lambda_k^* + i\omega)}, \quad (j, k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (28)$$

上式可用矩阵表示为

$$\left[S_{zz}(\omega) \right] = \left[\frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} \right] \left[S_{QQ}(\omega) \right] \left[\frac{1}{(-\lambda_j^* + i\omega)} \right] \quad (29)$$

式中 $\left[S_{zz}(\omega) \right]$, $\left[S_{QQ}(\omega) \right]$ 分别为 $\{Z(t)\}$, $\{Q(t)\}$ 的互谱密度矩阵, 另两个为对角矩阵。

通过式(29)可以直接导出响应 $\{X(t)\}$ 的互谱密度矩阵 $\left[S_{zz}(\omega) \right]$ 的简单表示式。

由式(18)可得

$$\left[S_{QQ}(\omega) \right] = [u]^T [S_{PP}(\omega)] [u^*], \quad (30)$$

再由式(9)和(4)得

$$\left[S_{FF}(\omega) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{GG}(\omega) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\text{和} \quad \left[S_{GG}(\omega) \right] = [M]^{-1} \left[S_{FF}(\omega) \right] [M]^{-T} \quad (32)$$

又由式(16)和(6)求得

$$\left[S_{zz}(\omega) \right] = [V]^{-1} \left[S_{YY}(\omega) \right] [V^*]^{-T} \quad (33)$$

$$\text{和} \quad \left[S_{YY}(\omega) \right] = \begin{bmatrix} S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) & S_{\dot{x}x}(\omega) \\ S_{x\dot{x}}(\omega) & S_{xx}(\omega) \end{bmatrix} \quad (34)$$

把式(33)、(34)和式(30)、(31)分别代入式(29)左边和右边得

$$\begin{pmatrix} S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) & S_{\dot{x}x}(\omega) \\ S_{x\dot{x}}(\omega) & S_{xx}(\omega) \end{pmatrix} = [V] \left[\frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} \right] [U]^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{GG}(\omega) \end{pmatrix} [u^*] \left[\frac{1}{(-\lambda_j^* + i\omega)} \right] [V^*]^{-T} \quad (35)$$

现在往证

$$[V] \left[\frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} \right] [u]^T = \begin{bmatrix} -(k_1 - i\omega c_1) H_1^*(\omega) & -i\omega H_1^*(\omega) \\ -i\omega H_1^*(\omega) & H_1^*(\omega) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\text{式中} \quad \left[H_1^*(\omega) \right] = (-\omega^2 [E] - i\omega [c_1] + [k_1])^{-1} \quad (37)$$

事实上, 由式(14)和(8)可知

$$\left[\frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} \right] = [u]^T [B - i\omega A] [V] = [u]^T \begin{bmatrix} -E & -i\omega E \\ -i\omega E & k_1 - i\omega c_1 \end{bmatrix} [V] \quad (38)$$

上式两边求逆矩阵得

$$\left[\frac{1}{(-\lambda_j - i\omega)} \right] = [V]^{-1} \begin{bmatrix} -E & -i\omega E \\ -i\omega E & k_1 - i\omega c_1 \end{bmatrix}^{-1} [u]^{-T} \quad (39)$$

不难验证

$$\begin{bmatrix} -E & -i\omega E \\ -i\omega E & k_1 - i\omega c_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(k_1 - i\omega c_1)H_1^*(\omega) & -i\omega H_1^*(\omega) \\ -i\omega H_1^*(\omega) & H_1^*(\omega) \end{bmatrix} \quad (40)$$

把式(40)代入式(39), 即得式(36)。

现在由式(36)取共轭后再转置得

$$[u^*] \left[\frac{1}{(-\lambda_j^* + i\omega)} \right] [V^*]^T = \begin{bmatrix} -H_1^T(\omega)(k_1 + i\omega c_1)^T & i\omega H_1^T(\omega) \\ i\omega H_1^T(\omega) & H_1^T(\omega) \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中 $[H_1(\omega)] = (-\omega^2[E] + i\omega[C_1] + [k_1])^{-1}$ (42)

把式(36)和式(41)代入式(35)求得

$$\begin{bmatrix} S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) & S_{\ddot{x}\dot{x}}(\omega) \\ S_{\dot{x}\ddot{x}}(\omega) & S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 H_1^*(\omega) S_{GG}(\omega) H_1^T(\omega) & -i\omega H_1^*(\omega) S_{GG}(\omega) H_1^T(\omega) \\ i\omega H_1^*(\omega) S_{GG}(\omega) H_1^T(\omega) & H_1^*(\omega) S_{GG}(\omega) H_1^T(\omega) \end{bmatrix} \quad (43)$$

因此, 响应 $\{X(t)\}$ 的互谱密度矩阵为

$$\begin{aligned} [S_{XX}(\omega)] &= [H_1^*(\omega)][S_{GG}(\omega)][H_1(\omega)]^T \\ &= [H_1^*(\omega)][M]^{-1}[S_{FF}(\omega)][M]^{-1}[H_1(\omega)]^T \end{aligned} \quad (44)$$

[参阅式(32)]。

令 $[H(\omega)] = [H_1(\omega)][M]^{-1}$
 $= (-\omega^2[M] + i\omega[c] + [k])^{-1}$ (15)

[参阅式(42)和(4)]。

则式(44)可写成

$$[S_{XX}(\omega)] = [H^*(\omega)] [S_{FF}(\omega)] [H(\omega)]^T \quad (46)$$

此外, 由式(43)可知

$$\left. \begin{aligned} [S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega)] &= \omega^2 [S_{XX}(\omega)], [S_{\ddot{x}\dot{x}}(\omega)] = i\omega [S_{XX}(\omega)] \\ [S_{\dot{x}\ddot{x}}(\omega)] &= -i\omega [S_{XX}(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

从式(25)出发, 还可导出响应 $\{X(t)\}$ 与激励 $\{F(t)\}$ 的互谱密度矩阵及响应的均值,

$$[S_{XF}(\omega)] = [H^*(\omega)] [S_{FF}(\omega)] \quad (48)$$

$$\{E[X(t)]\} = [H(o)]\{E[F(t)]\} \quad (49)$$

最后要指出的是, 式(46)——(49)是在条件(24)下导出的, 没有给出这个条件, 那是不够完备的。

参 考 文 献

- [1] Lin Y.K., Probabilistic Theory of structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [2] Светлицкий Б.А., Случайные Колебания Механических систем, Москва, 1976.
- [3] 谭忠棠、吴福光, 中山大学学报(自然科学版), 1982,1

Random Vibration Analysis of Linear Damped Systems

Xu Zhao

Abstract

The random vibration of linear damped systems with multiple degree of freedom is discussed in this paper. The state space approach is used to uncouple the systems. The general response of systems to excitation and response spectral density matrix of systems by weakly stationary random excitation is obtained.