·简　　报·

用样条函数方法求一类函数方程的数值解*

禤启沃　董云庭　　　　郑咸义

（中山大学计算机科学系）　（华南工学院数学力学系）

文[1,2,3,]指出，一类双曲方程(组)的某些定解问题，最后归结为求解函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)+g(x),\quad -\infty<x<+\infty,\quad |\alpha_i|<1. \tag{1}$$

这里$f(x)$是未知函数，$g(x)$是已知函数。本文以样条函数为工具，在$g(x)$以一些离散数据给出的情形下，求(1)的数值解并给出误差估计。

我们将讨论下述的函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)+g(x),\quad 0<x<b,\quad 0<\alpha_i<1. \tag{2}$$

若α_i不全正，则要求$g(x)$为偶函数。

下面先研究K次样条函数的插值理论。

设给定$[o,b]$区间上的一个均布分划

$$\pi:\quad 0=x_0<x_1<\cdots\cdots\cdots<x_N=b<x_{N+1},$$

记$h=x_{i+1}-x_i=b/N$，$i=0,1,\cdots,N$。以x_i为样条结点的K次样条函数为

$$S_K(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_{K-1}x^{K-1}+\sum_{j=0}^{N-1}c_j(x-x_j)_+^K/K! \tag{3}$$

在(3)中有$N+K$个待定常数，故插值条件应为$N+K$个。

从双曲方程(组)的定解问题出发，插值问题的提法是

问题Ⅰ　给定插值节点x_i及相应的函数值$g_i(i=1,2,\cdots,N)$和导数值$g_0^{(m)}$ $(m=0,1,\cdots,K-1)$，求$S_K(x)\in S_p(\pi,K)$，使满足

$$S_K(x_i)=g_i,\qquad i=1,2,\cdots,N;$$

$$S_K^{(m)}(x_0)=g_0^{(m)},\quad m=0,1\cdots,K-1.$$

问题Ⅱ　给定插值节点x_i及相应的导数值$g_i^{(K-1)}$ $(i=1,2,\cdots,N)$和$g_0^{(m)}$ $(m=0,1,\cdots,K-1)$，求$S_K(x)\in S_p(\pi,K)$，使满足

* 本文于1981年2月收到

$$S_K^{(K-1)}(x_i)=g_i^{(K-1)},\qquad i=1,2,\cdots,N;$$

$$S_K^{(m)}(x_0)=g_0^{(m)},\qquad m=0,1,\cdots,K-1.$$

显然，在$K=1$时，问题Ⅰ和Ⅱ相同，在$K=2$时，即文〔4〕中二次样条插值问题的通常提法。

引理1　若函数$g(x)$在原点K阶可导，在原点的某个邻域内$K-1$阶可导，且$g(x)=O(x^K)$，则K次样条插值问题Ⅰ和Ⅱ的解$S_K(x)$存在且唯一。

引理2　设$g(x)\in C^{K+2}[0,b]$，则插值误差的估计式为

$$|R_K(x)|\leqslant chx^K/K!^*,\tag{4}$$

其中c是某个确定的常数。

证　对插值问题Ⅱ，设$x_{i-1}<x<x_i$，由$R_K^{(K-1)}(x_{i-1})=R_K^{(K-1)}(x_i)=0$，应用Rolle定理，有$\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使$R_K^{(K)}(\xi_i)=0$，于是

$$|R_K^{(K)}(x)|\leqslant\int_{\xi_i}^{x}|R^{(K+1)}(t)|dt\leqslant\|g^{(K+1)}\|_\infty h,\tag{5}$$

其中$\|g^{(K+1)}\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant b}|g^{(K+1)}(x)|$，又由$R_K^{(m)}(0)=0\quad(m=0,1,\cdots,K-1)$

得
$$R_K(x)=\int_0^x\cdots\cdots\int_0^x R_K^{(K)}(x)dx^K,$$

于是，

$$|R_K(x)|\leqslant\|g^{(K+1)}\|_\infty hx^K/K!.\tag{6}$$

对插值问题Ⅰ，我们仅考虑$K=2$的情况。由文〔4〕的结果

$$\left|R_2''(x)\right|\leqslant ch,$$

这里 $c=\frac{4}{3}\|g'''\|_\infty+\frac{5}{12}\|g^{(4)}\|_\infty b$.

同样可得

$$|R_2(x)|\leqslant ch\,x^2/2.\tag{7}$$

顺便指出，当$0<x<h$时，问题Ⅰ、Ⅱ的解都具有形式

$$S_K(x)=C_0x^K/K!,\tag{8}$$

对插值问题Ⅰ，　$C_0=g(h)\cdot K!/h^K$；　(9)

对插值问题Ⅱ，　$C_0=g^{(K-1)}(h)/h$.　(10)

定理1[2]　对于函数方程(2)，若存在非负整数K，使方程(2)的常系数a_i，α_i适合$q=\sum\limits_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^K|<1$，则当$g(x)=O(x^K)$，$f(x)=O(x^K)$时，方程(2)有唯一的解

* 对问题Ⅰ，K＝0，1；对问题Ⅱ，K是任意非负整数。

$$f(x)=g(x)+\sum_{P=1}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_P=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_P}g(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_P}x)\right\}. \tag{11}$$

定理2 若函数方程

$$\hat{f}(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i\hat{f}(\alpha_i x)+S_K(x),\quad 0\leqslant x\leqslant b,\quad 0<\alpha_i<1 \tag{12}$$

的系数a_i，α_i适合$q=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^K|<1$，则当$\hat{f}(x)=O(x^K)$时，(12)有唯一的解

$$\hat{f}(x)=\sum_{p=1}^{p_0}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_p}\ S_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\}$$

$$+S_K(x)+\frac{C_0x^K}{K!}\cdot\frac{q_1^{p_0+1}}{1-q_1}. \tag{13}$$

这里$S_K(x)$是插值问题Ⅰ或Ⅱ所确定的K次样条函数，P_0是不超过$\ln N/\ln(1/\alpha)$的最大整数，$\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l}\{\alpha_i\}$，$q_1=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^K$，$C_0$由(9)或(10)确定。

证 对确定的$x\in[0,b]$，当$P>P_0$时，有

$$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x\leqslant\alpha^P\cdot b<h. \tag{14}$$

由(8)式，有$S_K(x)=O(x^K)$，据定理1，方程(12)存在唯一的解

$$\hat{f}(x)=S_K(x)+\sum_{P=1}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_p}S_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\}$$

$$=S_K(x)+\sum_{P=1}^{P_0}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_p}S_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\}$$

$$+\sum_{P=P_0+1}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\ a_{i_p}S_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\},$$

上式右端第二个和式中，由于$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x<h$，利用(8)式，有

$$\sum_{P=P_0+1}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_p}S_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\}=\frac{C_0x^K}{K!}\cdot\frac{q_1^{P_0+1}}{1-q_1},$$

即得到(13)式。对应于插值问题Ⅰ和Ⅱ，C_0分别如(9)和(10)所示。证毕。

这样，方程(12)的准确解已表示为有限项和的形式，当$h\to0$时，解式(13)右端的尾项趋向于零。

若将$\hat{f}(x)$作为函数方程(2)的近似解，对于余项$\hat{R}(x)=f(x)-\hat{f}(x)$，我们有

定理3 若$g(x)\in C^{K+2}[0,b]$，则$\hat{R}(x)=O(h)$。 (15)

证　容易验证$\widehat{R}(x)$满足下面的函数方程：

$$\widehat{R}(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i\widehat{R}(\alpha_i x)+R_K(x),\quad 0\leqslant x\leqslant b,\quad 0<\alpha_i<1, \tag{16}$$

这里$R_K(x)=g(x)-S_K(x)$。由引理2知，$R_K(x)$满足定理1的条件，于是

$$\widehat{R}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}a_{i_1}\cdots a_{i_1}R_K(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)\right\},$$

由(7)式，有

$$\left|\widehat{R}(x)\right|\leqslant\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\sum_{i_1=1}^{l}\cdots\sum_{i_p=1}^{l}|a_{i_1}\cdots a_{i_p}|\cdot\frac{ch}{K!}(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_p}x)^K\right\}$$

$$=\frac{chx^K}{K!}\cdot\frac{1}{1-q}.\qquad \text{证毕。}$$

从计算角度考虑，用B样条基函数来构造$S_K(x)$较好，即将$S_K(x)$取成

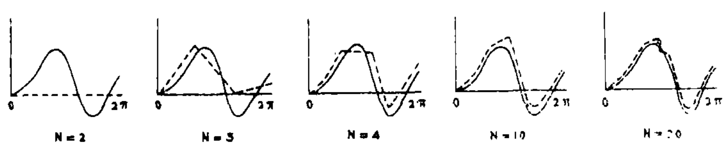
$$K=1\text{时，}\quad S_1(x)=\sum_{j=0}^{N}C_j\Omega_1\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$$

$$K=2\text{时，}\quad S_2(x)=\sum_{j=0}^{N+1}C_j\Omega_2\left(\frac{x-x_j}{h}+\frac{1}{2}\right).$$

例　　求解函数方程

$$f(x)=f(0.5x)+x\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

解　　由(13)式，用一次样条插值，依次取结点数$N=2$，3，4，10，20，在计算机上打印出准确解与近似解的曲线如下图所示。当用二次样条插值时，$N=3$的图形相当于用一次样条插值时$N=20$的图形。



粗实线为准确解，虚线为近似解

参考文献

〔1〕华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，(1979)．

〔2〕吴新谋等，数学物理方程，科学出版社，(1958)．

〔3〕Marek Kuczma, Functional equations in a single vasiable, Warszawa, (1968).

〔4〕李岳生、黄友谦，数值逼近，人民教育出版社，(1979)．