

# 关于复多元正态分布

滕成业      杨维权  
(计算机科学系)      (数学力学系)

## §1 引言

多元统计分析, 中统计量的分布问题早已受到重视。但 Anderson<sup>(8)</sup>、Giri<sup>(9)</sup>、Rao<sup>(11)</sup> 和张尧庭<sup>(1,2)</sup> 等的一些多元统计的书主要介绍实的统计量分布, 关于复多元正态分布问题是在1956年开始研究的, 到1963年之后才引起重视。

1956年Wooding<sup>(14)</sup> 首先考虑复多元正态变量的密度函数, 设一个 $p$ 元复随机向量

$$Z = X + iY,$$

它的均值为 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ 及协方差阵为复Hermitian阵

$$P = E\{(Z - \mu)(Z - \mu)^*\} = 2(Q_1 + iQ_2) = 2Q, \quad (1.1)$$

相应 $2p$ 元实随机矢量  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  是 $2p$ 元正态变量, 它具有均值 $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$  和协方差阵

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

其中 $Q_1$ 是对称阵,  $Q_2$ 是反对称阵, 在 $\Sigma$ 满秩时可导出 $2p$ 元实正态变量  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  的概率密度函数, 即相应 $p$ 元复正态变量 $Z = X + iY$ 的概率密度函数具如下形式:

$$(2\pi)^{-p} |Q|^{-1} \exp\{-\frac{1}{2}(Z - \mu)^* Q^{-1} (Z - \mu)\}. \quad (1.3)$$

相隔七年之久, Goodman<sup>(7)</sup> 在1963年导出了中心复Wishart分布的概率密度函数, 其形式如下:

$$2^{-pm} \{\Gamma_p(m)\}^{-1} |Q|^{-m} |A|^{m-p} \exp\{-\frac{1}{2} \text{tr} Q^{-1} A\}. \quad (1.4)$$

其中 $\Gamma_p(m) = (\pi)^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(m) \cdots \Gamma(m-p+1)$ 。接着有许多统计学家研究了非中心复Wishart分布、复多元Beta及F等分布, 此外还导出某些随机矩阵的特征根的分布。至1976年Krishnaiah<sup>(10)</sup> 评论了二十年来复多元分布方面的工作, 指出这些复多元分布的大部分问题可以类似于实的情况加以解决; 只有某些问题如求一些随机矩阵特征根函数的分布所用的技巧与实的情况不同<sup>(10)</sup>。一般文献上讨论的复多元正态变量都是指非奇异情况具有概率密度函数(1.3)的变量, 而实多元正态变量(包括奇异情况)一般有三个

本文得到暨南大学梁文骥和邓煊材两位副教授的指导

等价定义,此外在奇异情况还可给出它在低维空间的概率密度函数.本文对复多元正态变量也相应给出这些定义及在奇异情况也给出它的概率密度函数.这样,往后讨论复正态变量性质及有关分布时更为方便.此外我们还利用有关结果对复  $T_c^2$  统计量的分布及极大似然谱估计精确分布的导出作了简化.

## §2 复多元正态变量的定义及性质

在Giri<sup>[6]</sup>中给出复多元正态变量的定义如下:

[定义1] 一个  $p$ -元复随机矢量  $Z = (Z_1, \dots, Z_p)'$ , 其中  $Z_j = X_j + iY_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , 当它的实部和虚部组成  $2p$ -元实正态变量时, 则称  $Z$  是  $p$ -元复正态随机矢量.

设  $Z$  是  $p$ -元复正态随机矢量, 其均值为

$$\mu = E(Z)$$

及协方差阵为

$$P = E[(Z - \mu)(Z - \mu)^*] = 2Q,$$

一般文献上讨论的复多元正态变量满足下述约束条件:

$$E[(Z - \mu)(Z - \mu)'] = 0, \tag{2.1}$$

这条件(2.1)与Wooding<sup>[14]</sup>所提出的约束条件(1.2)是等价的. 其证明如下:  
由于

$$\begin{aligned} E[(Z - \mu)(Z - \mu)'] &= E[(X + iY - \mu_1 - i\mu_2)(X + iY - \mu_1 - i\mu_2)'] \\ &= E\{[(X - \mu_1) + i(Y - \mu_2)][(X - \mu_1)' + i(Y - \mu_2)']\} \\ &= E[(X - \mu_1)(X - \mu_1)'] - E[(Y - \mu_2)(Y - \mu_2)'] \\ &\quad + i\{E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)'] + E[(Y - \mu_2)(X - \mu_1)']\} \\ &= D(X) - D(Y) + i[Cov(X, Y) + Cov(Y, X)], \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

若条件(2.1)成立, 则

$$D(X) - D(Y) = 0,$$

及  $Cov(X, Y) + Cov(Y, X) = 0,$

即  $D(X) = D(Y) = Q$

及  $Cov(Y, X) = -Cov(X, Y) = Q_2, \tag{2.1.2}$

且因为  $D(X) = [D(X)]$

及  $Cov(Y, X) = [Cov(X, Y)]',$

所以  $Q_1$  是对称,  $Q_2$  是反对称, 这样  $2p$ -元实正态变量  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  的协方差阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix},$$

即条件(1.2)成立. 特别是  $Z$ -一元时按条件(2.1)推知

$$Cov(Y, X) = -Cov(X, Y) = [Cov(X, Y)]'$$

即  $Cov(X, Y) = -Q_2 = 0,$

由 $X, Y$ 联合正态, 则 $X, Y$ 相互独立. 一元复正态变量的实部与虚部相互独立是复正态变量的一个基本属性.

反之, 若条件(1.2)成立, 立即知道(2.1.2)成立, 代入(2.1.1)式就证实

$$E[(Z - \mu)(Z - \mu)'] = 0$$

本文所说复多元正态变量是指满足条件(2.1)的变量. 在 $Q$ 满秩时它具有密度函数(1.3), 其形式与实的情况完全一样, 所以仿照实多元正态变量情况, 使用记号 $Z = X + iY \sim CN_p(\mu, Q)$ 表示具有均值为 $\mu$ 及协方差阵为 $P = 2Q$ 的 $p$ -元复正态随机变量.

现在我们来详细讨论复多元正态变量的定义及性质.

**[定理1]** 设一个 $p$ 元复正态变量 $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ , 那么对任意 $p$ 元复矢量 $L$ 有下述三个结论成立

(i)  $L^*Z$ 的实部 $R_e(L^*Z) \sim N_1(R_e(L^*\mu), L^*QL)$ ;

(ii)  $L^*Z$ 的虚部 $I_m(L^*Z) \sim N_1(I_m(L^*\mu), L^*QL)$ ;

(iii)  $R_e(L^*Z)$ 与 $I_m(L^*Z)$ 相互独立.

即 $L^*Z$ 是一元复正态变量. 反之, 若 $L^*Z$ 的实部 $R_e(L^*Z) \sim N_1(R_e(L^*\mu), L^*QL)$ , 则 $Z$ 是 $p$ -元复正态变量<sup>(11)</sup>.

**证明** 设 $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ , 其中 $E(Z) = \mu_1 + i\mu_2, D(Z) = P = 2(Q_1 + iQ_2) = 2Q$ ,

即有 
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{2p} \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \right).$$

对任意 $p$ 元复矢量 $L = L_1 + iL_2$ , 有

$$L^* = L_1' - iL_2'$$

及 
$$L^*Z = L_1' Z + L_2' Y + i(-L_2' X + L_1' Y).$$

这样, 
$$R_e(L^*Z) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

$$I_m(L^*Z) = \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

此外, 因为 $Q_1$ 是实对称阵,  $Q_2$ 是反对称阵, 所以对任意 $p$ 元实矢量 $L_1, L_2$ 有

$$L_2' Q_1 L_1 = L_1' Q_1 L_2 \quad (2.1.5)$$

及 
$$L_1' Q_2 L_1 = -L_1' Q_2 L_1 = 0 \quad (2.1.6)$$

由此推出 
$$\begin{aligned} L^*QL &= \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

这样按Rao[11] 8、a、2 (i)有

$$(i) \text{Re}(L^*Z) \sim N_1(\text{Re}(L^*\mu), L^*QL)$$

及 (ii)  $I_m(L^*Z) \sim N_1(I_m(L^*\mu), L^*QL)$ .

又因为

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(\text{Re}(L^*Z), I_m(L^*Z)) \\ &= -L'_1 Q_1 L_1 - L'_1 Q_2 L_1 - L'_2 Q_2 L_2 + L'_2 Q_1 L_1 \end{aligned}$$

按(2.1.5)及(2.1.6)可知

$$\text{Cov}(\text{Re}(L^*Z), I_m(L^*Z)) = 0$$

即(iii)  $\text{Re}(L^*Z)$ 与 $I_m(L^*Z)$ 相互独立.

反之, 若 $Z$ 对任意 $P$ 元复矢量 $L = L_1 + iL_2$ 有

$$\text{Re}(L^*Z) \sim N_1(\text{Re}(L^*\mu), L^*QL)$$

其中 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ 是 $P$ 元复矢量,  $Q = Q_1 + iQ_2$ 是非负Hermitian阵, 即 $Q_1$ 是对称的及 $Q_2$ 是反对称的. 按(2.1.3)及(2.1.7)我们有

$$\begin{aligned} \text{Re}(L^*Z) &= \left( \frac{L_1}{L_2} \right)' \left( \frac{X}{Y} \right) \sim N_1(\text{Re}(L^*\mu), L^*QL) \\ &= N_1 \left( \left( \frac{L_1}{L_2} \right)' \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \left( \frac{L_1}{L_2} \right)' \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \left( \frac{L_1}{L_2} \right) \right), \end{aligned}$$

其中 $Z = X + iY$ ,  $X, Y$ 是 $P$ 元实随机矢量, 那么按实多元正态的定义知道

$$\left( \frac{X}{Y} \right) \sim N_{2p} \left( \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix} \right)$$

其中 $Q = Q_1 + iQ_2$ ,  $Q_1$ 是非负对称阵,  $Q_2$ 是反对称阵, 即  $Z = X + iY \sim CN_p(\mu, Q)$ .

由上述定理. 可知 $P$ -元复正态变量可用上述条件(i), (ii), (iii)或(i)或(ii)来定义.

〔定义2〕 设 $Z$ 是 $P$ -元复随机矢量, 若对任意固定的 $P$ 元复矢量 $L$ , 有 $L^*Z$ 是一元复正态变量或 $\text{Re}(L^*Z)$ 是一元实正态变量, 则称 $Z$ 是 $P$ 元复正态变量. 即 $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ .

利用定义〔2〕容易证实下述性质:

〔定理2〕 设 $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ 则 $q$ -元复随机矢量

$$W = CZ \sim CN_q(CQC^*)$$

其中 $C$ 是任意固定的 $(q \times p)$ 阶的复矩阵.

证明 对任意 $q$ 元复矢量 $L$ 有

$$L^*W = L^*(CZ) = (C^*L)^*Z$$

按定理〔1〕,  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ 及 $C^*L$ 是 $p$ -元复矢量, 所以  $\text{Re}(L^*W) = \text{Re}((C^*L)^*Z) \sim N_1(\text{Re}[(C^*L)^*\mu], (C^*L)^*QC^*L)$

即  $\text{Re}(L^*W) \sim N_1(\text{Re}[L^*(C\mu)], L^*(CQC^*)L)$

按定义[2]知

$$\bar{W} \sim CN_q(C\mu, CQC^*).$$

〔定理3〕 设  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ , 则  $Z$  的特征函数为

$$E \left[ e^{iRe(T^*Z)} \right] = \exp \left\{ iRe(T^*\mu) - \frac{1}{2} T^*QT \right\} \quad (2.2)$$

其中  $T$  是  $p$  元复矢量 (证明同实的情况相仿, 从略)。

这样, 我们又可给出下述定义。

〔定义3〕 设  $Z$  是  $p$ -元复随机矢量, 若它的特征函数为

$$E \left[ e^{iRe(T^*Z)} \right] = \exp \left\{ iRe(T^*\mu) - \frac{1}{2} T^*QT \right\},$$

则称  $Z$  是  $p$ -元复正态变量, 即  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ 。

〔定理4〕 设  $Z = \mu + BG$  及  $BB^* = Q$  (2.3)

其中  $\mu$  是  $p$ -元复矢量,  $B$  是  $(p \times m)$  阶复矩阵, 且  $rank(B) = m$  及  $G$  是  $m$  元标准复正态变量, 即  $G \sim CN_m(O, I)$ , 则  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ 。反之, 若  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$  及  $rank(Q) = m (\leq p)$ , 则存在  $(p \times m)$  阶矩阵  $B$  及  $G \sim CN_m(O, I)$ , 使

$$Z = \mu + BG \quad \text{及} \quad BB^* = Q.$$

证明 对任意  $p$  元复矢量  $T$  及  $m$  元复矢量  $T_1$ , 考虑到  $G \sim CN_m(O, I)$  的特征函数为

$$E \left[ \exp \left\{ iRe(T_1^*G) \right\} \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} T_1^*T_1 \right\},$$

所以

$$\begin{aligned} E \left[ \exp \left\{ iRe(T^*Z) \right\} \right] &= E \left[ \exp \left\{ iRe(T^*(\mu + BG)) \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ iRe(T^*\mu) \right\} E \left[ \exp \left\{ iRe(T^*BG) \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ iRe(T^*\mu) \right\} E \left[ \exp \left\{ iRe((B^*T)^*G) \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ iRe(T^*\mu) - \frac{1}{2} (B^*T)^*(B^*T) \right\} \\ &= \exp \left\{ iRe(T^*\mu) - \frac{1}{2} T^*BB^*T \right\} \\ &= \exp \left\{ iRe(T^*\mu) - \frac{1}{2} T^*QT \right\} \end{aligned}$$

由此可知  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ 。

反之, 若  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ ,  $rank(Q) = m (\leq p)$ 。因为  $Q$  是非负 Hermitian 阵, 所以按

谱分解定理有  $Q = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_{(i)} v_{(i)}^*$ , 其中  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 是  $Q$  的非负特征根, 相应

特征矢量是  $v_{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ 。显然

有  $v_{(i)}^* v_{(j)} = \delta_{ij}$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ . 现令

$$A = (v_{(1)}, \dots, v_{(m)}), \quad A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad A^{-\frac{1}{2}} = \text{diag}(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_m^{-\frac{1}{2}}),$$

及  $B = AA^{-\frac{1}{2}}, \quad B^{-1} = A^{-\frac{1}{2}}A^*$ ,

那么  $Q = AA^* = BB^*$  及  $B^{-1}B = I_m$ .

再作变换  $G = B^{-1}(Z - \mu)$ , 因为  $(Z - \mu) \sim CN_p(0, Q)$

所以  $G \sim CN_m(0, B^{-1}QB^{-1*})$ .

即  $G \sim CN_m(0, I_m)$ .

它是  $m$  元的标准复正态变量, 所以

$$Z = \mu + BG$$

及  $Q = BB^*$

其中  $B$  是  $(p \times m)$  阶复矩阵, 且  $\text{rank}(B) = m$

这样, 我们又可给出第三个等价定义如下:

〔定义4〕 设  $Z$  是一个  $p$  元复随机矢量, 若它可表示成如下形式:

$$Z = \mu + BG, \quad BB^* = Q,$$

其中  $B$  是  $(p \times m)$  阶复矩阵,  $\text{rank}(B) = m$ ,  $\mu$  是  $p$  元复矢量及  $G = G_1 + iG_2$  是  $m$  元复随机矢量,

且  $\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$  的  $2m$  个分量是相互独立的实标准正态变量, 即  $G$  为标准的  $m$  元复正态变量.

则  $Z$  是  $p$  元的复正态变量, 且  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ .

现在我们来讨论复多元正态的密度函数. 为了叙述简单些, 我们不仅对非奇异情况给出它的密度函数而且对奇异情况也将同样导出它在低维空间的密度函数.

〔定理5〕 设  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ , 若  $Q$  是 Hermitian 正定, 则  $Z$  的概率密度函数为

$$f(Z) = (2\pi)^{-p} |Q|^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^* Q^{-1} (Z - \mu) \right\}$$

或  $f(Z) = \pi^{-p} |P|^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^* P^{-1} (Z - \mu) \right\} \quad (2.4)$

其中  $P = 2Q$ .

这就是 Wooding<sup>(14)</sup> 及 Goodman<sup>(7)</sup> 给出的结果. 下面给出奇异情况复  $P$  元正态变量在低维空间的密度函数, 它的导出过程完全平行于实的情况, 这里论证从略了.

〔定理6〕 设  $Z \sim CN_p(\mu, Q)$ , 但是  $Q$  是 Hermitian 非负阵,  $\text{rank}(Q) = k (< p)$ ,

则  $Z$  在低维空间  $\mu + M(Q)$  上有概率密度函数

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^k \left( \prod_{j=1}^k \lambda_j \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^* Q^{-} (Z - \mu) \right\} \quad (2.5)$$

其中  $Z$  是在超平面  $A_0^* (Z - \mu) = 0$  上取值,  $A_0$  是  $(p \times p - k)$  阶复矩阵, 它使得  $A_0^* Q = 0$  及

$A_0^* A_0 = I_{p-k}$ ,  $Q^{-}$  是  $Q$  的广义逆及  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, k$  是  $Q$  的非零特征根,

### §3 中心复Wishart分布及其应用

设  $Z_j \sim CN_p(\mu, Q), j=1, 2, \dots, n, n > p$  是相互独立的, 矩阵  $A = \sum_1^n Z_j Z_j^*$  是所谓复 Wishart 矩阵. 在  $\mu \neq 0$  时它是非中心的, 在  $\mu = 0$  时它是中心的. 中心复 Wishart 矩阵的概率密度函数是由 Goodman<sup>(7)</sup> 导出, 其结果如下:

〔定理7〕 设  $Z_j \sim CN_p(0, Q), j=1, 2, \dots, m > p$ , 是相互独立的, 且  $Q$  是 Hermitian 正定, 那么,  $A = \sum_{j=1}^m Z_j Z_j^*$  的概率密度函数为

$$f(A) = 2^{-pm} \{ \Gamma_p(m) \}^{-1} |Q|^{-m} |A|^{m-p} \exp \{ -\frac{1}{2} \text{tr} Q^{-1} A \} \quad (3.1)$$

其中  $\Gamma_p(m) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \left\{ \prod_{j=1}^p \Gamma(m-j+1) \right\}$

最近 Shaman<sup>(12)</sup> 讨论逆复 Wishart 分布及它的主子阵的边沿分布. 下面简单地介绍有关结果, 然后利用它们来简化 Giri<sup>(9)</sup> 复  $T_c^2$  统计量分布及 Capon and Goodman<sup>(4)</sup> 极大似然谱估计精确分布的导出.

〔定理8〕 设  $A$  是  $(p \times p)$  阶复 Wishart 矩阵, 它具有密度函数(3.1), 则  $B = A^{-1}$  具有概率密度函数

$$\frac{|R|^m \exp \{ -\frac{1}{2} \text{tr} B^{-1} R \}}{2^{pm} \Gamma_p(m) |B|^{m+p}} \quad (3.2)$$

其中  $R = Q^{-1}$  及  $\Gamma_p(m) = \pi^{\frac{1}{2}(p-1)p} \left\{ \prod_{j=1}^p \Gamma(m-j+1) \right\}$

这个定理的证明, 只要利用定理7的结果及复值  $(p \times p)$  阶 Hermitian 正定阵  $A$ , 变换  $B = A^{-1}$  的雅谷比  $J(B; A) = |B|^{-2p}$  (参见文献[9]或[12]), 即得(3.2)式.

往后用记号  $A \sim CW_p(m, Q)$  表示  $A$  遵循复中心 Wishart 分布, 在  $Q$  非奇异时具有密度函数(3.1). 用记号  $B \sim CW_p^{-1}(m, R)$  表示  $B$  遵循逆复 Wishart 分布, 在  $R$  非奇异时具有密度函数(3.2).

Shaman<sup>(12)</sup> 还给出  $B$  主子阵的边沿分布, 其结果如下:

〔定理9〕 设  $B \sim CW_p^{-1}(m, R)$  及

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

其中  $B_{11}, R_{11}$  是  $q \times q$  阶,  $B_{22}, R_{22}$  是  $(p-q) \times (p-q)$  阶及  $B_{12}, R_{12}$  是  $q \times (p-q)$  阶. 那么

$$B_{11} \sim CW_q^{-1}(m-p+q, R_{11}),$$

特别在  $q=1$  时,  $B_{11} = b_{11}, R_{11} = r_{11}$  有

$$b_{11} \sim CW_q^{-1}(m-p+1, r_{11}).$$

即  $\frac{b_{11}}{r_{11}}$  遵循具自由度  $2(m-p+1)$  的逆  $\chi^2$  分布, 也就是说

$$\frac{q^{11}}{a^{11}} \sim \chi^2(2(m-p+1)),$$

其中  $a^{11}$  是  $A^{-1} = (a^{ij})$  的第  $(1,1)$  元素,  $q^{11}$  是  $Q^{-1} = (q^{ij})$  的第  $(1,1)$  元素 (这里  $B = A^{-1}$ ,  $a^{11}$  即  $b_{11}$ ;  $R = Q^{-1}$ ,  $q^{11}$  即  $r_{11}$ ).

〔定理10〕 设  $Z_j \sim CN_p(O, Q)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , 相互独立, 且

$$A = \sum_{j=1}^m Z_j Z_j^* = (a_{ij})_{p \times p}$$

$$A^{-1} = (a^{ij})^{-1} = (a^{ij})_{p \times p}$$

则对任意复数  $p$ -元常数矢量  $L$  有

$$\frac{L^* Q^{-1} L}{L^* A^{-1} L} \sim \chi^2(2(m-p+1)).$$

证明 取酉阵  $H$ , 使它的第一行为  $\frac{L^*}{\|L\|}$

置变换  $\tilde{Z}_j = H Z_j \sim CN_p(O, \tilde{Q})$ ,

其中  $\tilde{Q} = H Q H^*$  及  $\tilde{Q}^{-1} = H Q^{-1} H^*$ .

自然有  $\tilde{q}^{11} = \frac{L^*}{\|L\|} Q^{-1} \frac{L}{\|L\|} = \frac{L^* Q^{-1} L}{L^* L}$ .

且  $\tilde{A} = \sum_{j=1}^m \tilde{Z}_j \tilde{Z}_j^* = H A H^* \sim CW_p(m, \tilde{Q})$

及  $\tilde{A}^{-1} = H A^{-1} H^* \sim CW_p^{-1}(m, \tilde{Q}^{-1})$ .

同样有  $\tilde{a}^{11} = \frac{L^* A^{-1} L}{L^* L}$ .

这样按定理9有

$$\frac{\tilde{q}^{11}}{\tilde{a}^{11}} = \frac{L^* Q^{-1} L}{L^* A^{-1} L} \sim \chi^2(2(m-p+1))$$

〔定理11〕  $T_c^2$ -分布, 设  $A \sim CW_p(m, Q)$  及  $d \sim CN_p(\delta, C^{-1}Q)$ , 且相互独立, 那么,

$$T_c^2 = cd^* A^{-1} d \sim \frac{\chi^2(2p, c\tau^2)}{\chi^2(2(m-p+1), \tau^2)}$$

其中  $Q$  非奇异及非中心参数  $c\tau^2 = cd^* Q^{-1} d$ .

证明 因为  $T_c^2 = cd^* A^{-1} d = cd^* Q^{-1} d / \frac{d^* Q^{-1} d}{d^* A^{-1} d}$ .

按定理10在  $d$  的条件下  $\frac{d^* Q^{-1} d}{d^* A^{-1} d}$  之分布是  $\chi^2(2(m-p+1))$ , 它不依赖于  $d, d \neq 0(a, s)$ .

则

$$\frac{d^*Q^{-1}d}{d^*A^{-1}d} \sim x^2(2(m-p+1))$$

且与 $d$ 独立, 所以它也与 $d^*Q^{-1}d$ 独立, 又按Giri[6]的定理2.2.有 $cd^*Q^{-1}d \sim x^2(2p, c\tau^2)$ , 其中 $c\tau^2$ 是非中心参数,  $\tau^2 = \delta^*Q^{-1}\delta$ . 因此

$$T_c^2 \sim \frac{x^2(2p, c\tau^2)}{x^2(2(m-p+1))}.$$

Giri[6]的定理3.1只是上述定理的一个特殊情况.

现在, 我们谈一下复多元分布理论在时序分析邻域上的应用. Capon and Goodman [4]讨论了经典的Bartlett谱估计及Capon的最大似然谱估计的精确分布. 前者仿照Rao [11]8b, 2(i)的证明可知它的精确分布是 $x^2$ 分布, 而后者按定理10可直接推知它的精确分布也是 $x^2$ 分布, 也就是说,  $k$ -元复正态变量

$$\xi = (Z_1, \dots, Z_k)' \sim CN_k(O, Q)$$

其中 $P = 2Q = (\rho_{i-j})_{i,j=1,2,\dots,k}$ , 现设 $\xi_n$   $n = 1, 2, \dots, m$ , 是总体 $\xi$ 的独立子样, 那么经典的Bartlett谱估计为

$$P_B \propto E^* \hat{P} E$$

及Capon的极大似然谱估计为

$$P_C \propto \frac{1}{E^* \hat{P}^{-1} E}$$

其中  $\hat{P} = \sum_{n=1}^m \xi_n \xi_n^* \sim CW_k(n, Q)$ ;

$$E = (1, e^{-i\lambda}, \dots, e^{-i\lambda(k-1)})'$$

及 $\lambda$ 是波数, 因为任意一个复Wishart矩阵 $A \sim CW_k(m, Q)$ , 对任意 $K$ 元复矢量 $L$ 有

$$L^* A L \sim \sigma_L^2 x^2(2m),$$

其中  $\sigma_L^2 = L^* Q L$ . 所以

$$\frac{E^* \hat{P} E}{E^* Q E} \sim x^2(2m)$$

又按定理10有

$$\frac{E^* Q^{-1} E}{E^* \hat{P}^{-1} E} \sim x^2(2(m-k+1)).$$

## 参 考 文 献

- [1] 张尧庭, 精确分布推导的一个基本方法, 数学研究与评论, (1981), 1, 143—149.
- [2] 张尧庭、倪国熙, 关于多元分析中统计量的分布, 应用数学与计算数学, (1979), 4, 60—68.
- [3] Anderson T.W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, (1958), Wiley, New York.
- [4] Capon J. and Goodman N.R., Probability Distribution for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum, *Proc. I.E.E.E.*, 58(1969), 1785—1786.
- [5] Giri N., *Multivariate Statistical Inference*, (1977), New York, San Francisco, London.
- [6] Giri N., On the Complex Analogues of T- and R-texts. *Ann. Math. Statist.*, 36(1965), 664—670.
- [7] Goodman N.R., Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussian Distribution (an introduction), *Ann. Math. Statist.*, 34(1963), 152—177.
- [8] Haman E.J., *Multiple Time Series*, (1970), Wiley, New York.
- [9] Khatri C.G., Classical Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussian Distribution, *Ann. Math. Statist.*, 36(1965), 98—114.
- [10] Krishnaiah P.R., Some Recent Developments on Complex Multivariate Distributions, *J. Multivariate Anal.*, 6(1976), 1—30.
- [11] Rao C.R., *Linear Statistical Inference and Its Applications*, (1964), Wiley, New York.
- [12] Shaman Paul, The Inverted Complex Wishart Distribution and Its Application to Spectral Estimation, *J. Multivariate Anal.*, 10(1980), 51—60.
- [13] Wahba G., Some Tests of Independence for Stationary Multivariate Time Series, *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 33(1971), 153—166.
- [14] Wooding R.A., The Multivariate Distribution of Complex Normal Variables, *Biometrika*, 43 (1956), 212—215.

## On the Complex Multivariate Normal Distribution

Teng Chengye      Yang Weiquan

## Abstract

The density function of the complex multivariate normal random vector was derived by Wooding (1956). Krishnaiah (1976) gave a review of the literatures on complex multivariate distributions. But, the special case with nonsingular covariance matrix is considered in all those literatures. In this paper, We've discussed the definition of a  $p$ -variable complex normal random vector. In addition, the inverted complex Wishart distribution is discussed, as well as reduce the derivations of distributions of  $T_c$  statistic and MLE spectral estimation.