一种线性规划问题的样条函数算法

关履泰
（计算机科学系）

摘　要

本文建立凸集上的样条函数与线性规划的联系，给出一种对带约束

$$\Omega_1=\{x\epsilon R^n \mid b_3\leqslant Ax\leqslant b_1,\ A'x=b_2\}$$

的线性规划有效的样条函数算法.

线性规划问题可叙述为求$\sigma\epsilon R^n$使

$$f(\sigma)=\min_{x\epsilon\Omega} f(x)$$

$f(x)$是R^n中的线性函数，Ω是线性限制：

$x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)$与$Ax=b \quad (x\epsilon R^n,\ A=\|a_{ij}\|_{m\times n},\ b=\|b_i\|_{m\times n},\ m<n)$.

一般可解线性规划问题的约束条件都可化为：

$$\Omega_1=\{x\epsilon R^n \mid b_3\leqslant Ax\leqslant b_1,\ A'x=b_2\}$$

本文建立凸集样条与线性规划的联系，提出一种简单的线性规划算法，不依赖初值选取，每次迭代只要解一个线性方程组. 算法对Ω_1约束有效.

一、线性规划与凸集样条函数的关系

问题 I　设X是Hilbert 空间，W是其中一个凸集，h是定义在X上的线性连续泛函，g是定义在X的子集上的凸泛函

$$f_1(x)=h(x)-d \qquad d\text{是实数}$$

记　$G=\{x\epsilon W \mid g(x)\leqslant 0\}$

求$\sigma\epsilon G$使

$$f_1(\sigma)=\min_{x\epsilon G} f_1(x)$$

定理1　如果存在元素$a\epsilon X$使$h(x)\geqslant h(a),\forall x\epsilon G$，$\tau$是在凸集$C$上关于$t$的样条函数

$$t: X\to R;\quad t(y)=h(y),y\epsilon C;\quad C=G-a$$

则问题 I 的解σ存在且等于$\tau+a$，反之若存在问题 I 的解σ，则在C上关于t的样条τ存在且$\sigma=\tau+a$

本文于1982年12月收到.

证 易证C是凸集

对$y\epsilon C$，必存在$x\epsilon G$使$y=x-a$

所以 $l(y)=h(y)=h(x-a)=h(x)-h(a)\geqslant 0$，对任意$y\epsilon C$，$x\epsilon G$成立。

$$l(\tau)=|l(\tau)|=\|l(\tau)\|=\min_{x\epsilon G}h(x)-h(a)$$

因为 $\min\limits_{x\epsilon G}f_1(x)=\min\limits_{x\epsilon G}h(x)-d$， $l(\tau)=h(\tau)$

所以 $h(\tau+a)-d=f_1(\tau+a)=\min\limits_{x\epsilon G}f_1(x)$ $\tau+a\epsilon G$，它就是问题Ⅰ的解σ

反之，仿上可得

$$l(\sigma-a)=\|l(\sigma-a)\|=\min_{y\epsilon C}\|l(y)\|$$

即$\sigma-a$就是在C上关于l的样条τ，得证。

取$X=R^n$， $W=\{x\epsilon R^n|B_2x=C_2\}$

$$G=\{x\epsilon W|B_1x-C_1\leqslant 0\},\quad f_1(x)=f(x)$$

这时问题Ⅰ即一般线性规划问题。定理1给出线性规划问题解与凸集样条的关系。

二、两种凸约束的线性函数极小问题

我们讨论

问题Ⅱ $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i-d$ 在约束

$$\Omega=\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\epsilon R^n|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i+c_j\right)^2\leqslant s\}$$ 下的极小问题。即求

$y=(y_1,\cdots,y_n)^T\epsilon R^n$ 使

$$g(y)=\min_{x\epsilon\Omega}g(x)$$

记方程组

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j=a_i\qquad i=1,\cdots,n$$

的解为z_j， $j=1,\cdots,n$

定理2 问题Ⅱ的解可由方程组

$$(2.1)\qquad \sum_{i=1}^{n}b_{ij}y_i=-c_j-z_j\sqrt{s\Big/\sum_{k=1}^{n}z_k^2}$$

得到

证 对$F(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i-d+\rho\left[\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}x_i+c_j\right)^2+z_0^2-s\right]$求导数，得问题Ⅱ的解$y=(y_1,\cdots,y_n)^T$满足的方程。

由 $\left.\dfrac{\partial F(y+\varepsilon\eta)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$， 令$\eta=y-\delta$，$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)^T$

满足　$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\delta_i + c_j = 0$，$j=1,\dots,m$，这样$\delta\in\Omega$，得　$\rho>0$

代入得　$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n} z_j^2}$

再代入移项得证。

问题Ⅲ　如果把约束条件改成

$$\Omega' = \{ x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n \mid \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i + c_j\right)^2 \leqslant s \}$$

求　$y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in R^n$　使

$$g(y) = \min_{x\in\Omega'} g(x)$$

我们有：

定理3　如果问题Ⅲ的解存在，那么

$$y_i = \frac{\alpha_i}{\rho} + \beta_i \qquad i=1,\cdots,n$$

其中α_i是方程组

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}b_{kj}\right) z_i = -\frac{a_k}{2} \qquad k=1,\cdots,n$$

之解，β_i是方程组

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}b_{kj}\right) z_i = -\left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}c_j\right) \qquad k=1,\cdots,n$$

之解，

$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j\alpha_j) \Big/ 2\left[\sum_{j=1}^{m} c_j\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i + c_j\right) - s\right]}$$

证　类似定理2的证明，得问题Ⅲ的解要满足

(3.1)　$\rho z_0 = 0$

(3.2)　$z_0^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i + c_j\right)^2 - s = 0$

(3.3)　$a_k + 2\rho\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i + c_j\right) b_{kj} = 0 \qquad k=1,\cdots,n$

由(3.1)、(3.3)得$z_0=0$，由(3.2)、(3.3)得

(3.4)　$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i + c_j\right)^2 = s$

(3.5)　$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i + c_j\right)^2 b_{kj} = -\frac{a_k}{\rho} \qquad k=1,\cdots,n$

令$z_i=\rho y_i$，由(3.5)得

$$(3.6)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}b_{kj}\right)z_i+\left(\sum_{j=1}^{m} b_{kj}c_j\right)\rho=-\frac{a_k}{2}\qquad k=1,\cdots,n$$

由根与系数关系知，(3.6)的解

$$z_i=\alpha_i+\rho\beta_i\qquad i=1,\cdots,n$$

所以 $y_i=\dfrac{\alpha_i}{\rho}+\beta_i\qquad i=1,\cdots,n$

代入(3.4)得

$$(3.7)\qquad \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i+\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i+c_j\right)\rho\right]^2=s\rho^2$$

因为 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_{kj}\alpha_k\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i+c_j\right)=0\qquad k=1,\cdots,n$

所以 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i+c_j\right)=0$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i+c_j\right)^2=\sum_{j=1}^{m}c_j\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i+c_j\right)$$

另由 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i\right)=-\frac{a_k}{2}\qquad k=1,\cdots,n$

又可知 $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k\alpha_k}{2}\right)$

代入(3.7)得证。

问题Ⅳ 我们讨论 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i-d$ 在约束

$$\Lambda=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n\,\middle|\,\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i+c_j\right)^2\leqslant s,\ \sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i+c_j=0,\ j=m+1,\cdots,n\right\}$$

下的极小问题，即求 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in R^n$ 使

$$g(y)=\min_{x\in\Lambda} g(x)$$

设方程组 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j+a_i=0\qquad i=1,\cdots,n$ 的解为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。

定理4 如果$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$全为零，那么问题Ⅳ的解$y=(y_1,\cdots,y_n)^T$可由

$$(4.1)\qquad \begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ij}y_i=-c_j & j=m+1,\cdots,n\\ \displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} b_{ij}\mu_j=-a_i & i=1,\cdots,n\end{cases}$$

定出。如果$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$不全为零，则由

$$
(4.2)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}y_i = -c_j & j=m+1,\cdots,n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}y_i = -c_j+\lambda_j\sqrt{s\Big/\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k^2} & j=1,\cdots,m \end{cases}
$$

定出。若问题Ⅳ解唯一，则$\lambda_1\cdots,\lambda_m$必不全为零.

证　类似定理2证法。若$\lambda_j=0$，$j=1,\cdots,m$，则$\rho=0$，若$\lambda_j(j=1,\ldots,m)$不全为零，则由$\left.\frac{\partial F(y+\varepsilon\eta)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$取$\eta=y-\delta,\delta\in\Lambda$　得$\rho>0$。

问题Ⅴ　如果把约束条件改成

$$
\Lambda'=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i+c_j\right)^2\leqslant s,\ \sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i+c_j=0,\ j=m+1,\ldots,q\right\}
$$

求　$y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in R^n$使

$$
g(y)=\min_{x\in\Lambda'}g(x)
$$

我们有

定理5　如果问题Ⅴ的解存在，那么

$$
y_i=\frac{\alpha_i}{\rho}+\beta_i \qquad i=1,\cdots,n
$$

其中α_i是

$$
(5.1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}z_i=0 & j=m+1,\cdots,q \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}b_{kj}\right)z_i+\sum\limits_{j=m+1}^{q}\frac{b_{kj}}{2}\lambda_j=-\frac{a_k}{2} & k=1,\cdots,n \end{cases}
$$

之解z_i，而β_i满足

$$
(5.2)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i=-c_j & j=m+1,\cdots,q \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}b_{kj}\right)\beta_i+\sum\limits_{j=m+1}^{q}\frac{b_{kj}}{2}\lambda_j=-\left(\sum\limits_{j=1}^{m}b_{kj}c_j\right) & k=1,\cdots,n \end{cases}
$$

ρ是相应二次方程的正根。

证　类似定理4的推导得问题Ⅴ的解要满足的方程组，仿定理3证法注意$\rho>0$得证。

根据希氏空间插值样条的理论[4]可得：

定理6　若

$$
(6.1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}x_j=0 & j=1,\cdots,h \end{cases}
$$

只有零解(h分别对应n,m,n,q)，则上述问题的解存在唯一。

证　易见$N(t)=\{x=(x,\cdots,x_n)^T\epsilon R^n|\sum_{i=1}^n a_ix_i=0\}$

$$N(a)=\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\epsilon R^n|\sum_{i=1}^n b_{ij}x_i=0,\quad j=1,\cdots,h\}$$

$N(a)+N(t)$在R^n中稠密。$N(t)\cap N(a)=\{0\}$即(6.1)。

三、一种线性规划问题的算法

问题Ⅵ　对线性规划问题：求$\sigma\epsilon R^n$使

$$f(\sigma)=\min_{x\epsilon\Omega_0}f(x)$$

$$\Omega_0=\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\epsilon R^n|\ C_3\leqslant B_1x\leqslant C_1,\ B_2x=C_2\}$$

$$B_1=\|b_{ij}\|_{m\times n},\qquad B_2=\|b_{ij}\|_{m+1,1}^{p\quad n}$$

$$C_i=(c_{i1},\cdots,c_{im})^T,\ i=1,3;\ c_{1j}>C_{3j},j=1,\cdots,m;\ C_2=(c_{2,m+1},\cdots,c_{2p})^T$$

$$f(x)=\sum_{i=1}^n a_ix_i-d$$

可有下面的算法：

1　作$\Omega_1\left\{=x\epsilon R^n|\sum_{j=1}^m\left[\sum_{i=1}^n\frac{2b_{ji}x_i-(c_{1j}+c_{3j})}{c_{1j}-c_{3j}}\right]^2\leqslant1,\ \sum_{i=1}^n b_{ji}x_i=c_{2j},\ j=m+1,\cdots,p\right\}$

用上述方法求出$\sigma_1=(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{1n})^T$使

$$f(\sigma_1)=\min_{x\epsilon\Omega_1}f(x)$$

记

$$p_{1i}=\sum_{k=1}^n b_{ik}\sigma_{1k},\qquad i=1,\cdots,m;\qquad p_{1j}=c_{2j}\quad j=m+1,\cdots,p$$

2　设$a_{1i}=\min(|p_{1i}-c_{3i}|,|p_{1i}-c_{1i}|)>0,i\epsilon I_1\subset\{1,\cdots,p\}$

$$a_{1j}=\min(|p_{1j}-c_{3j}|,|p_{1j}-c_{1j}|)=0,\quad j\epsilon I_1'=\{1,\cdots,p\}\setminus I_1$$

作$\Omega_2=\left\{x\epsilon R^n|\sum_{j\epsilon I_1}\left[\left(\sum_{i=1}^n b_{ji}x_i-p_{1j}\right)\Big/a_{1j}\right]^2\leqslant1;\ \sum_{i=1}^n b_{ji}x_i=p_{1j},j\epsilon I_1',\right\}$

用上述办法求出$\sigma_2=(\sigma_{21},\cdots,\sigma_{2n})$使$f(\sigma_2)=\min_{x\epsilon\Omega_2}f(x)$

记

$$p_{2i}=\sum_{k=1}^n b_{ik}\sigma_{2k},\ i=1,\cdots,m;\ p_{2j}=c_{2j},\quad j=m+1,\cdots,p$$

3　假定第ν次迭代已经作出，设

$$a_{\nu i}=\min(|p_{\nu i}-c_{1i}|,|p_{\nu i}-c_{3i}|)>0,\ i\epsilon I_\nu\subset\{1,\cdots,p\}$$

$$a_{\nu j}=\min(|p_{\nu j}-c_{1j}|,|p_{\nu j}-c_{3j}|)=0,\ j\epsilon I_\nu'=\{1,\cdots,p\}\setminus I_\nu$$

作　$\Omega_{i+1}=\left\{x\epsilon R^n|\sum_{j\epsilon I_\nu}\left[\left(\sum_{i=1}^n b_{ji}x_i-p_{\nu j}\right)\Big/a_{\nu j}\right]^2\leqslant1;\ \sum_{i=1}^n b_{ji}x_i=p_{\nu j},\ j\epsilon I_\nu'\right\}$

求出$\sigma_{\nu+1}=(\sigma_{\nu+1,1},\cdots,\sigma_{\nu+1,n})^T$　使$f(\sigma_{\nu+1})=\min\limits_{x\in\Omega_{\nu+1}} f(x)$

定理7　由上面算法得到的序列σ_ν强收敛于线性规划问题Ⅵ的解σ。

证　令$h(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$,　　$x\in R^n$

设存在$a\in R^n$使$h(x)\geqslant h(a)$，$\forall x\in\Omega_0$(特别取$a=\sigma$即可)作$t(y)=h(y)$，$y\in C=\Omega_0-a$，在C上关于t的样条是τ，根据定理1，$\sigma=\tau+a$

根据〔3〕提出的算法，τ是τ_ν的极限，τ_ν是在C_ν上关于t的样条，而且易知：$C_1=\Omega_1-a$，因为$\Omega_1\subset\Omega_0$所以$h(x)\geqslant h(a)$，$\forall x\in\Omega_1$由定理1，$\sigma_1=\tau_1+a$

用归纳法可得　$C_\nu=\Omega_\nu-a$，$\nu=1,2\cdots$而且由定理1知　$\sigma_\nu=\tau_\nu+a$

所以用〔3〕的算法收敛性定理推出在强收敛意义下：

$$\lim_{\nu\to\infty}\sigma_\nu=\lim_{\nu\to\infty}(\tau_\nu+a)=\tau+a=\sigma$$

得证。

例　求x_1,x_2使　$f=3x_1-x_2$　取极大值，并满足约束条件

$x_1\geqslant 0$，　$x_2\geqslant 0$

和　$2x_1+x_2\geqslant 2$，　$x_1+3x_2\leqslant 3$，　$x_2\leqslant 4$。

解　这是〔5〕的例题($p.559$)

原来约束区域等价于

$$0\leqslant x_2\leqslant 4,\qquad 2\leqslant 2x_1+x_2\leqslant 6,\qquad 1\leqslant x_1+3x_2\leqslant 3$$

原问题变为在上约束条件下求$f(x_1,x_2)=-3x_1+x_2$的极小问题。用本文定理3的算法得：

$$\Omega_1=\left\{x\in R^2\,\middle|\,\left(\frac{2x_2-4}{4}\right)^2+\left(\frac{4x_1+2x_2-8}{4}\right)^2+\left(\frac{2x_1+6x_2-4}{2}\right)^2\leqslant 1\right\}$$

$$\beta_1^{(1)}=\frac{47}{27},\qquad \beta_2^{(1)}=\frac{4}{27}$$

$$\alpha_1^{(1)}=\frac{64}{27},\qquad \alpha_2^{(1)}=-\frac{25}{27},\qquad \rho_1=\frac{\sqrt{217}}{2}$$

$$x_1^{(1)}=2.0625631,\quad x_2^{(1)}=0.0224363$$

$$\Omega_2=\left\{x\in R^2\,\middle|\,\left(\frac{x_2-0.0224363}{0.0224363}\right)^2+\left(\frac{2x_1+x_2-4.1475625}{1.8524375}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x_1+3x_2-2.129872}{0.870128}\right)^2\leqslant 1\right\}$$

$$\beta_1^{(2)}=x_1^{(1)}=2.0625631,\qquad \beta_2^{(2)}=x_2^{(1)}=0.0224363$$

$$\alpha_1^{(2)}=0.6062465,\qquad \alpha_2^{(2)}=-0.00162879,\qquad \rho_2=0.9578693$$

$$x_1^{(2)}=2.6954746,\qquad x_2^{(2)}=0.0207358$$

$$\alpha_1^{(3)}=0.0545567,\qquad \alpha_2^{(3)}=-0.00147081,\qquad \rho_3=0.2873507$$

$$x_1^{(3)}=2.8853356,\qquad x_2^{(3)}=0.0156173$$

每次迭代只要解一个方程组，程序简单．而

$$\beta_i^{(j)} = x_i^{(j-1)}, \quad i=1,2,\cdots,n, \quad j=2,3,\cdots$$

$$\rho_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(-a_k\alpha_k^{(j)})/2s} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\alpha_k^{(j)}\right)} \quad j=2,3,\cdots$$

实际计算过程还可进一步简化．

参考文献

〔1〕S.I.Gass, *Linear Programming*, 1964.

〔2〕马仲蕃、田丰，数学的实践与认识 1980，2．36—44．

〔3〕关履泰，高等学校计算数学学报，1982，3，268—278．

〔4〕P.J.Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris, 1972.

〔5〕沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976．

A Spline Function Algorithm for Linear Programming Problems

Guan Lütai

Abstract

In this paper, we research the relation between spline functions in a convex set and linear programming problems. A spline function algorithm is given for linear programming problems with constraints

$\Omega_1 = \{ x \in R^n | \ b_3 \leqslant Ax \leqslant b_1, \ A'x = b_2 \}$.