

全息光弹性法直接求解平面问题

李嘉宝

柯敬唐

(中山大学数力系)

(郑州工学院科研所)

多年来,国内外一些研究工作者曾经提出过各种不用等倾线而直接求解平面模型中一点应力状态的方法。1963年,陈志达提出根据光弹性实验的应力光图直接解答平面问题,其中的等和函数 $p(x,y)$ 由已知数值解法求出,获得满意的结果。但是,数值解法往往需要通过大量的繁琐计算,不仅工作量大,且易引进计算误差。本文作者直接采用激光全息光弹性所便于获取的两个应力光图,不必测取等倾线和进行繁琐的数值计算,而直接求解平面问题内部应力。并通过实例说明这种方法是简便的,与理论解比较证明具有足够的精度。同时,对光弹性实验的数据自动处理,提供了一条捷径。

基本方程

弹性力学平面问题中,如不计算体积力,考虑 xy 平面中 0 点附近的一个微元体,则此微元体的平衡微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若主应力以 σ_1, σ_2 表示,并设 σ_1 与 x 轴成 θ 角, θ 以逆时针方向为正,令

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ q &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

又知

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p + q \cos 2\theta \\ \sigma_y &= p - q \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= q \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

现在 xoy 平面中取一个新的坐标系 s_1os_2 , s_1 轴与 x 轴成 2θ 角,把式(3)代入式(1)并引入坐标 s_1, s_2 ,经化简后,可得主应力方向角沿 x, y 方向的变化率为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{2q} \left[\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial s_2} \right] \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{1}{2q} \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

用差分形式表示后, (4)式中第一式可写成

$$\Delta\theta_x = \frac{1}{2q} \left[\Delta q \frac{\Delta x}{\Delta y} - \Delta p \frac{\Delta x}{\Delta s_2} \right] \quad (5)$$

当取 $\Delta x = \Delta y = \Delta s_2$, 则式(5)为

$$\Delta\theta_x = \frac{1}{2q} [\Delta q_y - \Delta p_{s_2}]$$

式中, $\Delta\theta_x$ 为主应力方向角 θ 沿 x 方向增量;
 Δq_y 为主应力差函数 q 沿 y 方向增量;
 Δp_{s_2} 为主应力和函数 p 沿 S_2 方向的增量.

设已知任一截面上一点 $a(x_0)$ 的主应力方向为 θ_a , 则相邻点 $b(x_0 + \Delta x)$ 的主应力方向为

$$\theta_b = \theta_a + \frac{1}{2q_a} [\Delta q_{a_y} - \Delta p_{a_{s_2}}] \quad (6)$$

式中注脚 a, b 分别表示对应点的值.

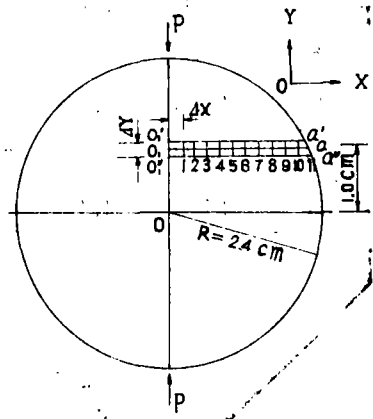
式(6)为用数值解法计标主应力方向的简便算式. 因而, 不仅使整个平面问题的求解过程大大简化, 而且提高了精度.

计算实例

本文以圆盘对径受压的全息光弹性实验为例, 扼要说明解题步骤

用直径为4.8cm的环氧树脂圆盘及有机玻璃圆盘, 在全息光弹仪上分别采用一次曝光及两次曝光的方法测取主应力等差线及等和线, 并在距离圆盘水平直径 $y = 1\text{cm}$ (见图处取计算截面 $0a$ (考虑对称性仅取一半), 选取 $\Delta x = 2\text{mm}$ 划分 $0a$ 截面为12个节点, 编号为0至11, 另分别在 $0a$ 面上、下距离为 $\pm \frac{\Delta y}{2}$ 处取辅助截面 $o'_1 a'$ 及 $o''_1 a''$, 各截面也相应划分为12个节点, 从应力光图中, 可直接测取上、中、下三个截面各12个节点的 p, q 值, 再考虑已知的边界条件, 根据式(6)就可逐点求得各节点的主应力方向角 θ 及全部应力分量. 计算结果列于附表中.

从表中可见, 除个别函数值较小的点相对误差较大以外, 其余的点误差均在6%以内, 对光弹性实验求解问题而言, 可认为具有足够的精度.



计算成果表

名称 数值 点号	θ (度)		σ_x (kg/cm ²)		σ_y (kg/cm ²)		τ_{xy} (kg/cm ²)	
	实验值	理论值	实验值	理论值	实验值	理论值	实验值	理论值
0	0	0	25.14	23.93	-93.25	-91.94	0	0
1	4.62	4.80	23.21	22.11	-89.62	-88.42	9.39	9.47
2	9.62	9.92	18.62	17.76	-80.12	-79.10	17.28	16.38
3	13.56	13.25	12.30	12.19	-67.50	-66.45	20.52	19.50
4	16.80	16.35	7.34	7.02	-53.24	-53.06	20.60	19.52
5	19.08	18.90	3.35	3.18	-41.29	-40.68	18.38	17.35
6	21.19	21.56	0.71	0.67	-30.57	-29.98	14.62	14.02
7	22.58	22.60	-0.65	-0.72	-22.19	-21.38	10.86	10.35
8	23.30	23.45	-1.45	-1.50	-15.09	-14.28	7.52	7.09
9	24.08	24.02	-1.04	-1.13	-8.61	-8.28	5.01	4.75
10	24.29	24.37	-0.68	-0.63	-3.78	-3.60	1.75	1.71
11	24.29	24.49	0	0	0	0	0	0

参考文献

- [1] 陈至达, 根据应力光图直接解答弹性力学平面问题的方法, 力学学报, 5(1963), 3.
 [2] Frocht M. M., *Photoelasticity*, 2(1948), 197-229.
 [3] Computer-aided Fringe-pattern Analyzer-A Case of Photoelastic Fringe, *Exp. Mech.*, 19(1979), 10.