

桨叶的耦合振动

蔡承武 陈树辉

(数学力学系)

一、前言

桨叶挥舞弯曲、弦向弯曲与扭转的耦合振动固有频率的计算,过去大多是从运动微分方程^[1]出发,应用各种数学方法^{[2][3]},求解微分方程特征值问题。这些解法难以考虑各种复杂因素的影响。

用有限单元法分析桨叶的耦合振动,可以较准确地反映桨叶的外形及质量与刚度分布,还可以很方便地考虑各种因素对桨叶固有频率的影响。此外,用有限单元法计算结构的固有频率归结为求解广义特征值问题,从建立方程到求解均适合用电子计算机计算。

本文以文[1]的桨叶力学模型为基础,建立了空间预扭梁单元体,保留了工程梁理论的平截面假设,并假定横截面的几何形状和质量分布对主中性轴对称。质量轴、弹性轴及应力轴不要求重合,但要求平行。

本文还假定轴向惯性力的合力可以忽略,从而可使扭转中心的轴向位移这个未知量在势能表达式中消去。这样,空间预扭梁单元体每一节点只有5个自由度,因而也就不便考虑柯氏力的影响,假设柯氏力可以忽略。

二、最小势能原理

取动坐标系 x, y, z 固定在桨毂上,以角速度 Ω (从上往下看逆时针方向为正)随桨毂一起转动。 x 轴与变形前的弹性轴重合,沿桨叶向外为正; z 轴通过桨叶根部剖面的扭转中心,与旋转轴方向一致,向上为正; x, y, z 轴构成右手直角坐标系,如图1所示。桨叶横截面上取局部坐标 η, ζ ,原点在弹性轴上, η 轴沿截面主中性轴,如图2所示。横截面扭转中心沿 x, y, z 轴的位移分量记为 u, v, w ,截面对弹性轴的扭转角记为 ϕ 。 v, w, ϕ 是 x 的函数,它们是耦合振动的基本变量。

1、纤维的纵向线应变

考虑 $\eta = \text{常数}$, $\zeta = \text{常数}$ 的纤维 f ,它的相对伸长记为 ϵ 。纤维 f 上任一点的坐标

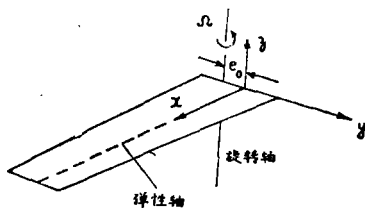


图 1

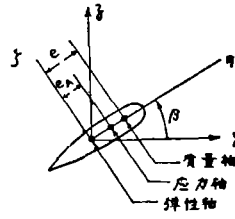


图 2

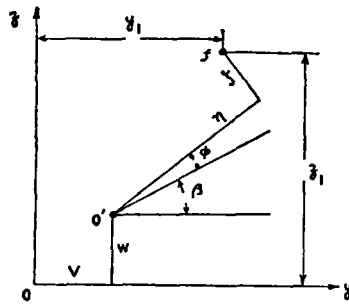


图 3

记作 x, y, z ，其中 y, z 与局部坐标 η, ζ 的关系为：

$$y = \eta \cos \beta - \zeta \sin \beta; \quad z = \eta \sin \beta + \zeta \cos \beta. \quad (1)$$

式中 β 为预扭角， β 是 x 的函数。变形后该点的坐标记为 x_1, y_1, z_1 (见图 3)。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + u - v'(y_1 - v) - w'(z_1 - w), \\ y_1 &= v + \eta \cos(\beta + \phi) - \zeta \sin(\beta + \phi), \\ z_1 &= w + \eta \sin(\beta + \phi) + \zeta \cos(\beta + \phi). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

纤维变形前弧元素长度记为 ds ，变形后的长度记为 ds_1 ，则线应变可表为：

$$\epsilon = (ds_1 - ds) / ds = \frac{ds_1}{dx} / \frac{ds}{dx} - 1. \quad (3)$$

按(1)、(2)二式可推导出 $\frac{ds}{dx}$ 、 $\frac{ds_1}{dx}$ 的表达式，并代入(3)式，略去三阶及三阶以上的小量可得：

$$\epsilon = \epsilon_1 + \bar{\epsilon}_2, \quad (4)$$

其中

$$\epsilon_1 = u' - \eta(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) + \zeta(v'' \sin \beta - w'' \cos \beta) + (\eta^2 + \zeta^2)\beta' \phi', \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_2 &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2)\phi'^2 + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) + \eta\phi(v'' \sin \beta - w'' \cos \beta) + \\ &+ \zeta\phi(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta). \end{aligned} \quad (6)$$

在上面推导中和文[1]一样, 假设 $1 + (y^2 + z^2)\beta'^2 \approx 1$ 。

取桨叶以 Ω 角速度旋转的平衡状态为初始状态, 桨叶横截面上具有初始正应力 $\sigma_0 = \frac{T}{A}$, 这里 A 为承受轴向力的横截面面积, T 为初始轴向力, $T = \int_x^R \Omega^2 m x dx$, m 为单位长桨叶的质量, R 为桨尖的 x 坐标。考虑到初始应力 σ_0 已与稳定平衡位置的离心力平衡, 因此, 当忽略高阶小量后, 轴向平衡方程为:

$$\iint_A E \varepsilon_1 d\eta d\zeta = 0, \quad (7)$$

式中 E 为弹性模量。将(5)式代入上式可得:

$$u' = e_A (v'' \cos\beta + w'' \sin\beta) - k_A^2 \beta' \phi', \quad (8)$$

其中 $e_A = \iint_A \eta d\eta d\zeta / A$, $k_A^2 = \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta / A$ 。

将(8)式代入(5)式便得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & (e_A - \eta)(v'' \cos\beta + w'' \sin\beta) + \zeta(v'' \sin\beta - w'' \cos\beta) + \\ & + (\eta^2 + \zeta^2 - k_A^2) \beta' \phi'. \end{aligned} \quad (9)$$

2、应变能

应变能可分为二部分, 其一是初始应力 σ_0 所引起的势能, 其二是振动产生的附加应力所引起的应变能。由于应变能的一次项只影响平衡位置而不影响结构的固有频率, 同时按线性振动理论可以忽略三阶及三阶以上的小量, 本文的势能表达式中只保留 w, v, ϕ 的二次项, 忽略 u 的二次项。

初应力引起的势能线密度为:

$$\begin{aligned} U_0 = & \iint_A \sigma_0 \varepsilon_1 d\eta d\zeta = T \left[\frac{1}{2} k_A^2 \phi'^2 + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) + \right. \\ & \left. + e_A \phi (v'' \sin\beta - w'' \cos\beta) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

应变能线密度为:

$$\begin{aligned} U_1 = & \iint_A \left[\frac{1}{2} E \varepsilon_1^2 d\eta d\zeta + \frac{1}{2} G J \phi'^2 \right] = \frac{1}{2} E I_2 (v'' \cos\beta + w'' \sin\beta)^2 + \\ & + \frac{1}{2} E I_1 (v'' \sin\beta - w'' \cos\beta)^2 + \frac{1}{2} E B_1 \beta'^2 \phi'^2 - \\ & - E B_2 (v'' \cos\beta + w'' \sin\beta) \beta' \phi' + \frac{1}{2} G J \phi'^2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 GJ 为桨叶的抗扭刚度。

$$I_1 = \iint_A \zeta^2 d\eta d\zeta, \quad I_2 = \iint_A (e_A - \eta)^2 d\eta d\zeta;$$

$$B_1 = \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) (\eta^2 + \zeta^2 - k_A^2) d\eta d\zeta; \quad B_2 = \iint_A \eta (\eta^2 + \zeta^2 - k_A^2) d\eta d\zeta.$$

3、离心力势能

单位长桨叶具有的离心力势能为：

$$U_1 = -\frac{1}{2} \iint_F \Omega^2 \rho (r^2 - r_1^2) d\eta d\zeta. \tag{12}$$

式中 F 为横截面质量分布的面积， ρ 为密度， r, r_1 分别表示微面积变形前、后至旋转轴的垂直距离。 $r^2 = x^2 + (y + e_0)^2$ ， $r_1^2 = x_1^2 + (y_1 + e_0)^2$ (e_0 见图1)，利用(2)式，保留二阶小量可得：

$$U_2 = -\Omega^2 m x e \phi (v' \sin\beta - w' \cos\beta) - \frac{1}{2} \Omega^2 m \left\{ v'^2 (k_{m_2}^2 \cos^2\beta + k_{m_1}^2 \sin^2\beta) + 2v'w' (k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \sin\beta \cos\beta + w'^2 (k_{m_2}^2 \sin^2\beta + k_{m_1}^2 \cos^2\beta) - \phi^2 [(k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \cos 2\beta + e e_0 \cos\beta] + v^2 - 2v\phi e \sin\beta \right\}, \tag{13}$$

其中

$$m = \iint_F \rho d\eta d\zeta; \quad e = \iint_F \rho \eta d\eta d\zeta / m; \\ k_{m_1}^2 = \iint_F \rho \zeta^2 d\eta d\zeta / m; \quad k_{m_2}^2 = \iint_F \rho \eta^2 d\eta d\zeta / m.$$

4、相对运动惯性势能

按公式(2)，略去二阶小量，可得任一点的相对加速度

$$\ddot{x}_1 = \ddot{u} - \ddot{v}'y - \ddot{w}'z, \quad \ddot{y}_1 = \ddot{v} - z\ddot{\phi}, \quad \ddot{z}_1 = \ddot{w} + y\ddot{\phi}.$$

其中 \ddot{u} 可从近似关系式 $\iint_F \rho \ddot{x}_1 d\eta d\zeta = 0$ ，得到

$$\ddot{u} = \ddot{v}'e \cos\beta + \ddot{w}'e \sin\beta. \tag{14}$$

单位长桨叶的惯性力沿 y, z 轴方向的分量 p_y, p_z 以及对 x, y, z 轴的惯性力矩 q_x, q_y, q_z 为：

$$\begin{aligned}
 p_y &= - \iint_F \rho \ddot{y}_1 d\eta d\zeta = -m(\ddot{v} - e \sin\beta \ddot{\phi}), \\
 p_z &= - \iint_F \rho \ddot{z}_1 d\eta d\zeta = -m(\ddot{w} + e \cos\beta \ddot{\phi}), \\
 q_x &= - \iiint_F \rho (\ddot{z}_1 y - \ddot{y}_1 z) d\eta d\zeta = -(m e \cos\beta \ddot{w} - m e \sin\beta \ddot{v}) - m \bar{k}_m^2 \ddot{\phi}, \\
 q_y &= - \iint_F \rho \ddot{x}_1 z d\eta d\zeta = m(\bar{k}_{m_2}^2 \sin^2\beta + k_{m_1}^2 \cos^2\beta) \ddot{w}' + \\
 &\quad + m(\bar{k}_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \sin\beta \cos\beta \ddot{v}', \\
 q_z &= \iint_F \rho \ddot{x}_1 y d\eta d\zeta = -m(\bar{k}_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \sin\beta \cos\beta \ddot{w}' - \\
 &\quad - m(\bar{k}_{m_2}^2 \cos^2\beta + k_{m_1}^2 \sin^2\beta) \ddot{v}'.
 \end{aligned} \tag{15}$$

式中

$$\bar{k}_m^2 = k_{m_1}^2 + k_{m_2}^2, \quad \bar{k}_{m_2}^2 = k_{m_2}^2 - e^2 = \iint_F \rho(\eta - e)^2 d\eta d\zeta / m_0.$$

惯性势能的线密度为:

$$U_3 = -[q_x \phi + p_z w - q_y w' + p_y v + q_z v']. \tag{16}$$

5、桨叶总势能

桨叶总势能为:

$$\Pi = \int_{R_0}^R (U_0 + U_1 + U_2 + U_3) dx, \tag{17}$$

其中 R_0 为桨根截面的 x 坐标。根据最小势能原理, 在满足约束条件和连续条件的 ϕ 、 w 、 v 中, 满足平衡条件的位移使势能取极小值。即真实的位移 ϕ 、 w 、 v 满足变分方程:

$$\delta \Pi = 0. \tag{18}$$

三、单元体的刚度分析

1、位移模式

图 4 中的 1、2 两点分别代表单元体的左、右节点。取局部坐标 \bar{x} 、 \bar{z} , 原点位于左端节点上, \bar{x} 轴与 x 轴重合, \bar{z} 轴与 z 轴平行。

单元体长度记作 a , 每一节点的节点位移记作 \mathbf{W}_i ;

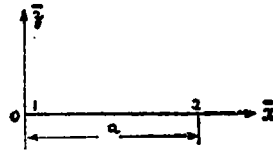


图 4

$$W_i = \{ \phi, w, w_i', v, v_i' \}, \quad i=1,2 \tag{19}$$

其中记号 { ... } 代表列阵。单元体节点位移记作 W_e

$$W_e = \{ \phi_1 \ w_1 \ w_1' \ v_1 \ v_1' \ \phi_2 \ w_2 \ w_2' \ v_2 \ v_2' \}, \tag{20}$$

取位移模式如下:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ w \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} W_e, \tag{21}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 1 - \frac{\bar{x}}{a}, & \omega_2 &= \frac{\bar{x}}{a}, \\ N_1 &= 1 - \frac{3}{a^2} \bar{x}^2 + \frac{2}{a^3} \bar{x}^3, & N_2 &= \bar{x} - \frac{2}{a} \bar{x}^2 + \frac{1}{a^2} \bar{x}^3, \\ N_3 &= \frac{3}{a^2} \bar{x}^2 - \frac{2}{a^3} \bar{x}^3, & N_4 &= -\frac{1}{a} \bar{x}^2 + \frac{1}{a^2} \bar{x}^3. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

2、单元刚度矩阵、质量矩阵和几何刚度矩阵

① 单元体刚度矩阵 K_e

公式 (11) 可以表为:

$$U_1 = \frac{1}{2} X_1^T D_1 X_1,$$

其中

$$X_1 = \{ \phi' \ w'' \ v'' \} = B_1 W_e, \tag{23}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \omega_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1'' & N_2'' & 0 & 0 & 0 & N_3'' & N_4'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1'' & N_2'' & 0 & 0 & 0 & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} GJ + EB_1\beta'^2 & & & & \text{对} \\ -EB_2\beta' \sin\beta & EI_1 \cos^2\beta + EI_2 \sin^2\beta & & & \text{称} \\ & & & & \\ -EB_2\beta' \cos\beta & (EI_2 - EI_1) \sin\beta \cos\beta & EI_1 \sin^2\beta + EI_2 \cos^2\beta & & \end{pmatrix} \quad (25)$$

因此单元体的应变能为:

$$\int_0^l U_1 d\bar{x} = \int_0^l \frac{1}{2} X_1^T D_1 X_1 d\bar{x} = \frac{1}{2} W_e^T K_e W_e, \quad (26)$$

其中

$$K_e = \int_0^l B_1 D_1 B_1 d\bar{x}. \quad (27)$$

②单元体几何刚度矩阵G_e.

公式(13)可以表为:

$$U_2 = \frac{1}{2} X_2^T D_2 X_2,$$

其中

$$X_2 = \{ \phi \ w' \ v \ v' \} = B_2 W_e, \quad (28)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_1 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & N'_3 & N'_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_3 & N_4 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & N'_3 & N'_4 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$D_2 = \Omega^2 m \begin{pmatrix} (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \cos 2\beta & & & & \text{对} \\ + e e_0 \cos\beta & & & & \\ ex \cos\beta & -(k_{m2}^2 \sin^2\beta + k_{m1}^2 \cos^2\beta) & & & \text{称} \\ es \sin\beta & 0 & & -1 & \\ -ex \sin\beta & -(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \sin\beta \cos\beta & 0 & -(k_{m2}^2 \cos^2\beta + k_{m1}^2 \sin^2\beta) & \end{pmatrix}. \quad (30)$$

因此, 单元体的离心力势能为:

$$\int_0^a U_2 d\bar{x} = \int_0^a \frac{1}{2} X_2^T D_2 X_2 d\bar{x} = \frac{1}{2} W_e^T G_{le} W_e, \quad (31)$$

其中

$$G_{le} = \int_0^a B_2^T D_2 B_2 d\bar{x}. \quad (32)$$

公式(10)可表为:

$$U_0 = \frac{1}{2} X_0^T D_0 X_0, \\ X_0 = \{ \phi \ \phi' \ w' \ w'' \ v' \ v'' \} = B_0 W_0, \quad (33)$$

五、直升机操纵系统刚度C和挥舞调 节系数H对总刚度矩阵的影响

设水平铰、轴向铰所在的截面分别记作0、1，从运动学关系^[4]可得：

$$\begin{Bmatrix} M_{\phi_1} \\ M_{w_0'} \end{Bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & H \\ H & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ w_0' \end{Bmatrix} \quad (49)$$

其中 w_0' 为水平铰处的挥舞角， ϕ_1 为轴向铰处的扭转角，而 M_{ϕ_1} 、 $M_{w_0'}$ 分别为小拉杆的作用力对轴向铰轴线和水平铰轴线的力矩。 M_{ϕ_1} 、 $M_{w_0'}$ 对势能的贡献为

$$U_4 = \frac{1}{2} X_4^T D_4 X_4, \quad (50)$$

其中

$$X_4 = \{ \phi_1, w_0' \}, \quad (51)$$

$$D_4 = C \begin{bmatrix} 1 & H \\ H & H^2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

矩阵 D_4 的元素可直接迭加到总刚度矩阵的对应位置中去。

六、广义特征值问题的快速同步迭代法

考虑广义特征值问题

$$Kq = \lambda Mq \quad (53)$$

其中 K 、 M 为 n 阶实对称矩阵，且 M 正定。现要计算绝对值最小的若干个特征值及相应的特征向量。

设(53)的 n 个实特征值按绝对值从小到大排列，依次记作 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，相应的经正规化的特征向量记作 q_1, q_2, \dots, q_n 。它们满足如下关系：

$$KQ = MQ\Lambda, \quad (54)$$

$$Q^T M Q = E_n, \quad (55)$$

其中

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n], \quad (56)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (57)$$

E_n 为 n 阶单位矩阵。

取 P 个初始向量 u_1, u_2, \dots, u_P ，不妨假定它们已满足正规化条件，即

$$U^T M U = E_P, \quad (58)$$

其中

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_p], \quad (59)$$

U 的各列均可按特征向量展开,一般地可写为

$$U = Q A_p + Q_n A_n, \quad (60)$$

其中

$$Q_p = [q_1, q_2, \dots, q_p], \quad (61)$$

$$Q_n = [q_{p+1}, q_{p+2}, \dots, q_n], \quad (62)$$

A_p, A_n 分别为 $p \times p$ 与 $(n-p) \times p$ 的展开系数矩阵。

将(60)式代入(58)式,再利用(55)式可得如下关系式

$$A_p^T A + A_n^T A_n = E_p \quad (63)$$

假设 A_n 的元素比 A 的元素小得多,在上式中可略去 A_n 元素的二次项,便得近似关系式

$$A_p^T A \doteq E_p \quad (64)$$

后面将证明,随着迭代次数的增加,上式的误差很快趋于零。由上式可知, A_p 为正交矩阵,它的转置即为逆阵。

从矩阵方程

$$KV = MU, \quad (65)$$

可解得 V 。应用(60)式与(54)式, V 可一般地表为

$$V = Q \Lambda_p^{-1} A_p + Q_n \Lambda_n^{-1} A_n, \quad (66)$$

其中

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}, \quad \Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_{p+1} & & 0 \\ & \lambda_{p+2} & \\ & & \dots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (67)$$

令

$$B \equiv (MU) V, \quad (68)$$

B 为 p 阶对称矩阵。以(60), (66)式代入上式可得

$$B = A_p^T \Lambda_p^{-1} A_p + A_n^T \Lambda_n^{-1} A_n,$$

根据假设,上式右端最后一项可以略去,于是

$$B \doteq A_p^T \Lambda_p^{-1} A_p. \quad (69)$$

应用(64)式可得

$$B A_p^T \doteq A_p^T \Lambda_p^{-1}. \quad (70)$$

从如下特征值问题

$$BX = X\Lambda^* \quad (71)$$

计算特征值组成的对角矩阵 Λ^* 和相应的经正规化的特征向量组成的矩阵 X 。比较(70), (71)两式可知,

$$X = A_p^T, \quad \Lambda^* = \Lambda^{-1} \tag{72}$$

可见, Λ^* 对角元的倒数可以作为前 p 个特征值的一级近似。

令

$$\bar{V} = VX, \tag{73}$$

以(66), (72)式代入上式, 并应用(64)式可得,

$$\bar{V} = Q_p \Lambda_p^{-1} + Q_n \Lambda_n^{-1} A_n A_p^T, \tag{74}$$

\bar{V} 的各列可以作为前 p 个特征向量的一级近似。

对于计算工程结构的固有频率或临界载荷问题, 需要计算的特征值数目是不多的, 通常矩阵 B 的阶数较低, 可利用各种标准程序精确计算特征方程(71)的全部特征值与特征向量。但是, 实践证明, 迭代法每迭代一次所得到的改进值并没有必要精确计算, 有时为了缩短迭代一次所需的计算时间, 宁愿损失一些改进值的精度, 这样做的效果可能需要多迭代一、二次, 但节省了总的计算时间。

我们采用文[5]的方法计算 A_p^T 和 Λ 的近似值, 这个方法的前提是假设 A_p 的非对角元和 A_n 的元素均远小于 A_p 的对角元, 它们的二次项可以忽略。

令

$$A_p^T \equiv X \equiv \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix} \tag{75}$$

近似公式为:

$$\lambda_i = \frac{1}{b_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, p) \tag{76}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} -2b_{ij} / [\Delta + (\text{sign} \Delta) \sqrt{\Delta^2 + 4b_{ij}^2 / G^2}] & (i < j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{77}$$

$$x_{ji} = -x_{ij}, \quad (j \neq i). \tag{78}$$

其中 $\Delta = b_{ii} - b_{jj}$, G 是 x_{ij} 的上限, G 在0.25到0.5之间取一值均能保证迭代收敛。

按以上诸式计算得到的 \bar{V} , 需要经过正规化, 才能作为下一次迭代的“初始矩阵”。为了使收敛得到的特征向量能按对应特征值大小的次序排列, 小特征值对应的特征向量排在前列, 可用一上三角矩阵 R 右乘 \bar{V} , 使 $\bar{V}R$ 满足正规化条件, 根据这一条件可以唯一确定 R 。必须指出, 在正规化以前, \bar{V} 的各列应按对应近似特征

值从小到大的次序重新排列。

下面来讨论快速同步迭代算法的收敛性。第 k 次迭代的“初始矩阵”记作 $U^{(k)}$ ，和(60)式一样， $U^{(k)}$ 可表为

$$U^{(k)} = Q_p A_p^{(k)} + Q_n A_n^{(k)} \quad (79)$$

按照以上的迭代步骤， $U^{(k+1)}$ 可以表为

$$U^{(k+1)} = (Q_p \Lambda_p^{-1} A_p^{(k)} + Q_n \Lambda_n^{-1} A_n^{(k)}) X_k R_k \quad (80)$$

按此递推公式可得

$$U^{(k+1)} = (Q_p \Lambda_p^{-k} A_p + Q_n \Lambda_n^{-k} A_n) S_k, \quad (81)$$

其中

$$S_k = X_1 R_1 X_2 R_2 \cdots X_k R_k. \quad (82)$$

因为，当 $k \rightarrow \infty$ 时， Λ_n^{-k} 的元素与 Λ_p^{-k} 的元素之比趋于零。所以大特征值对应的特征向量对 $U^{(k+1)}$ 的影响趋于零。由此可见，当 $k \rightarrow \infty$ 时，(64)，(70)，(72)等式的误差趋于零，并且(74)式右端第二项也趋于零。这就证明了收敛性。

至于公式(76)—(78)的前提条件(A_p 的非对角元远小于对角元)，可通过分析正规化的步骤得到证明。事实上，矩阵 V 经正规化后作为下一次迭代的“初始矩阵”，就足以保证收敛。用矩阵 X 右乘 V 进行修正，可以加快收敛速率。

七、数值结果比较

1. 算例

用文[2]中的例题数据：

$$R_0 = 0, \quad R = 40.0 \text{ in}, \quad \beta = 45^\circ, \quad EI_1 = 25000 \text{ lb-in}^2,$$

$$EI_2 = 75000 \text{ lb-in}^2, \quad GJ = 9000 \text{ lb-in}^2, \quad m = 0.0015 \text{ slugs/in},$$

$$k_{m1}^2 = 1.0 \text{ in}^2, \quad k_{m2}^2 = 1.0 \text{ in}^2, \quad e = \sqrt{2} \text{ in},$$

$$B_1 = B_2 = e, \quad e_0 = k_A = \Omega = 0.$$

边界条件：桨根刚性固定，桨尖完全自由。

计算结果列于表1，有限元方法与传递矩阵法的计算结果十分一致。

由于文[2]没有考虑惯性力矩 q_y, q_z 的影响，为了便于比较，我们计算此例题时也没有计及。

表 1 有限单元法与传递矩阵法数值结果比较

模态数	固有频率 (弧度/秒)			振型
	有限元法	传递矩阵法 [2]	准确解 [2]	
1	30.8299	30.8295	53.8218	$v = -w$
2	53.8278	53.8277		$v = w \phi = 0$
3	184.737	184.618	337.320	$v = -w$
4	337.344	337.333		$v = w \phi = 0$
5	486.477	484.337		$v = -w$

2、计算结果与实验值比较

表 2 列出一工程梁挥舞弯曲振动固有频率的计算结果与实验值的比值。从表 2 可以看出，二者相当接近。

表 2 固有频率的计算值与实验值比较

模态数	1	2	3	4	5
实验值	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
计算值	$0.96\omega_1$	$1.00\omega_2$	$1.02\omega_3$	$1.02\omega_4$	$1.04\omega_5$

参 考 文 献

- (1) Houbolt, J.C., and Brooks, G. W., Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted non-uniform rotor blades, *NACA Report*, 1958, 1346.
- (2) Murthy, V.R., Dynamic characteristics of rotor blades, *Journal of Sound and Vibration*, 49 (1976), 4.
- (3) Giurgiutiu, V., & Stafford, R. O., Semi-analytic determination of bending frequencies of propeller and helicopter rotors, *First European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum*, 1975, 14.1-14.12.
- (4) 米里等, 直升飞机计算和設計, 第二卷, 振动和劲强度, 国防工业出版社, 1976, 46-47.
- (5) Jennings, A., A direct iteration method of obtaining latent roots and vectors of a symmetric matrix, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 63, (1967), 745-765.
- (6) Bathe, K. J., Solution methods for large generalized eigenvalue problems in structural engineering, *SESM Report*, 1971, 71-20.
- (7) Jennings, A., and Stewart, W. J., Simultaneous iteration for partial eigensolution of real matrices, *J. Inst. Maths Applics*, 15 (1975), 3.