关于具有控制約束的时变线性系統的容许控制的存在性问题

陈云烽　赵　怡
（数学力学系）

一、问 题 的 提 出

讨论线性系统

$$X(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t) \tag{1.1}$$

$$Y(t)=C(t)X(t) \tag{1.2}$$

这里，$t\epsilon[0,+\infty)$；$X(t)$是n维状态变量，即系统的状态空间是n维欧氏空间R^n；$U(t)$和$Y(t)$分别是r维的输入（即控制）和m维的输出；$A(t)$、$B(t)$和$C(t)$分别是$n\times n$、$n\times r$和$m\times n$阶的已知矩阵。并假设：输入$U(t)$的元在所考察的区间$[t_0,t_\alpha]$是平方可积的，即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha}|U_j(t)|^2dt<+\infty \qquad j=1,2,\cdots,r.$$

其次，还假定阵$A(t)$的元$a_{ij}(t)$是定义于$[t_0,t_\alpha)$的绝对可积函数，$B(t)$和$C(t)$的元$b_{ij}(t)$和$c_{ij}(t)$是定义于$[t_0,t_\alpha]$的平方可积函数。这时，存在唯一解$X(\cdot)$使$X(t_0)=X_0$，且方程(1.1)几乎处处得到满足[1,2]。

关于系统(1.1)的能控性的概念是[1,3]：

定义1　如果线性系统(1.1)对t_0时刻，存在时刻$t_\alpha>t_0$，使得对t_0时刻的任意初始状态$X(t_0)=X_0$可以找到容许控制$U\epsilon L_r^2[t_0,t_\alpha]$，使$X(t_\alpha)=0$，则称线性系统(1.1)在$t_0$时刻是完全能控的。

如果系统(1.1)对任意$t_0\epsilon[0,+\infty)$都是完全能控的，则称系统(1.1)是完全能控的。

作为能控性的定义1，应当指出，关于容许控制U，除了假设$U\epsilon L_r^2[t_0,t_\alpha]$之外，没有加上任何其它约束。然而，在实际的控制系统中，由于各种原因（例如控

制作用的能量不能无限增大），往往对容许控制必须加上限制。即系统的控制具有一定约束。因而，在定义1的意义下是完全能控的系统（1.1），对某些初始状态X_0却不一定存在满足约束条件的容许控制U将它转移到零状态。这里，便提出一个问题：在什么条件下，才能把怎样的初始值X_0，用具有约束的容许控制，用有限的时间，将状态从X_0转移到零状态。

关于这个问题，专著〔4〕对定常系统的情形曾有过研究，得到容许控制存在性定理(见〔4〕的定理14)，给出了容许控制存在的某些充分条件。本文将对时变线性系统的一类情形讨论上面所提出的问题。

为了讨论方便，引入几个定义：

设容许控制的约束条件是

$$\|U\|_{L^2}\leqslant 1 \tag{1.3}$$

这里，$\|\cdot\|_{L^2}$表示$L_r^2[t_0, t_\alpha]$的范数。

定义2　如果线性系统(1.1)对t_0时刻和R^n的子集D，对任一属于D的初始状态$X(t_0)=X_0\epsilon D$,都存在时刻$t_\alpha>t_0$和满足约束条件(1.3)的容许控制$U\epsilon L_r^2[t_0, t_\alpha]$将$X(t_0)$转移到$X(t_\alpha)=0$，则称系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下,关于子集D在时刻t_0是能控的。

当$D=R^n$时，就称系统(1.1)在控制约束(1.3)条件下，在时刻t_0是完全能控的。

定义3　如果线性系统(1.1)对t_0时刻和R^n的子集G，对任一属于G的初始状态$X(t_0)=X_0\epsilon G$，对任意时刻$t_\alpha>t_0$，都找不到满足约束条件（1.3）的容许控制$U\epsilon L_r^2[t_0, t_\alpha]$,将$X(t_0)$转移到$X(t_\alpha)=0$；即是说，任意满足条件(1.3)的容许控制$U\epsilon L_r^2[t_0,t_\alpha]$均不能用$t_\alpha-t_0$的时间间隔将$X(t_0)$转移到零状态，则称系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下，关于子集G在时刻t_0是完全不能控的。

当$G=R^n/\{0\}$时，即是说G是R^n除去零点所余下的元而构成的子集，就称系统(1.1)在控制约束(1.3)条件下，完全不能控。

二、控制约束条件下能控性的若干判据

设$\Phi(t,s)$是方程(1.1)的基解阵

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,s)=A(t)\Phi(t,s) \tag{2.1}$$

$$\Phi(t,s)\Phi(s,\tau)=\Phi(t,\tau),\qquad \Phi(t,t)=I \tag{2.2}$$

这里，I 表示单位阵。

则方程(1.1)满足初始值$X(t_0)=X_0\epsilon R^n$的解$X(\cdot)$，在t_a时刻的值为

$$X(t_a)=\Phi(t_a,\ t_0)X_0+\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_a,s)B(s)U(s)\ ds \tag{2.3}$$

定义算子T_a和T

$$T_aU=\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_a,s)B(s)U(s)ds \tag{2.4}$$

$$TU=\Phi(t_0,t_a)T_aU=\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_0,s)B(s)U(s)ds \tag{2.5}$$

由〔1〕可知：T_a和T都是$L_r^2〔t_0,t_a〕\to R^n$的连续有界线性变换，若用T_a^*和T^*分别表示T_a和T的伴随算子，则有

$$T_a^*\xi=B^*(t)\Phi^*(t_a,t)\xi \tag{2.6}$$

$$T^*\xi=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)\xi \tag{2.7}$$

这里，$\xi\epsilon R^n$，而$T_a^*\xi$、$T^*\xi$均属于$L_r^2〔t_0,\ t_a〕$，$B^*(t)$、$\Phi^*(t_a,t)$分别表示$B(t)$和$\Phi(t_a,t)$的伴随矩阵。

因此

$$T_aT_a^*=\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_a,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_a,s)ds \tag{2.8}$$

$$TT^*=\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_0,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_0,s)ds \tag{2.9}$$

并且，有

$$(T_aT_a^*)^*=(T_a^*)^*T_a^*=T_aT_a^*$$

$$(TT^*)^*=(T^*)^*T^*=TT^*$$

即是说，$T_aT_a^*$和TT^*均是Hermite阵，此外，

$$\langle T_aT_a^*\xi,\ \xi\rangle_{R^n}=\langle T_a^*\xi,\ T_a^*\xi\rangle_{L^2}\geqslant 0$$

$$\langle T\ T^*\xi,\ \xi\rangle_{R^n}=\langle T^*\xi,\ T^*\xi\rangle_{L^2}\geqslant 0$$

即$T_aT_a^*$和TT^*均表现为非负定的Hermite阵。

由(2.8)、(2.9)和(2.5)，并注意到$\Phi(t_0,t_a)$是满秩矩阵，立刻可得：若

$T_a T_a^*$满秩、则TT^*也满秩；反之，若 TT^* 满秩，则 $T_a T_a^*$也必为满秩。

为了导出后面的能控性的几个判据，我们先证明一个引理。

引理　设 TT^*满秩，则系统(1.1)在t_0时刻是完全能控的(依定义1)，并且将初始状态$\mathrm{X}(t_0)=\mathrm{X}_0$转移到$\mathrm{X}(t_a)=0$ 的所有容许控制U 中，其范数$\|\mathrm{U}\|_{L^2}$ 最小者为

$\widetilde{\mathrm{U}}=-T^*(TT^*)^{-1}\mathrm{X}_0$，它的范数$\|\widetilde{\mathrm{U}}\|_{L^2}$满足不等式

$$\frac{1}{\mu_{max}(t_0,t_a)}\|\mathrm{X}_0\|^2_{R^n}\leqslant\|\widetilde{\mathrm{U}}\|^2_{L^2}\leqslant\frac{1}{\mu_{min}(t_0,t_a)}\|\mathrm{X}_0\|^2_{R^n} \tag{2.10}$$

式中，$\mu_{max}(t_0,t_a)$和$\mu_{min}(t_0,t_a)$分别是TT^*的最大和最小的本征值。

证明　由于 $T\widetilde{\mathrm{U}}=-TT^*(TT^*)^{-1}\mathrm{X}_0=-\mathrm{X}_0$

所以，根据(2.3)～(2.5)式便有：

$$\begin{aligned}\mathrm{X}(t_a)&=\Phi(t_a,t_0)\mathrm{X}_0+T_a\widetilde{\mathrm{U}}\\&=\Phi(t_a,t_0)\mathrm{X}_0+\Phi(t_a,t_0)\,T\widetilde{\mathrm{U}}\\&\Phi(t_a,t_0)\mathrm{X}_0-\Phi(t_a,t_0)\mathrm{X}_0=0\end{aligned}$$

即是说，$\widetilde{\mathrm{U}}$是将初态$\mathrm{X}(t_0)=\mathrm{X}_0$转移到$\mathrm{X}(t_a)=0$的容许控制。进一步需证明

$$\|\widetilde{\mathrm{U}}\|_{L^2}=inf\{\|\mathrm{U}\|_{L^2}\mid T\mathrm{U}=-\mathrm{X}_0,\ \mathrm{U}\in L^2_r(t_0,\ t_a)\} \tag{2.11}$$

为了证明这一点，可讨论如下的条件极小值问题。

在条件$T\mathrm{U}=-\mathrm{X}_0$(这是U将初始状态$\mathrm{X}(t_0)=\mathrm{X}_0$转移到$\mathrm{X}(t_a)=0$的等价条件)，即在条件

$$\int_{t_0}^{t_a}\Phi(t_0,s)B(s)\mathrm{U}(s)ds=-\mathrm{X}_0 \tag{2.12}$$

的约束下，使U的泛函

$$\mathrm{J}=\|\mathrm{U}\|^2_{L^2}=\langle\mathrm{U},\mathrm{U}\rangle_{L^2}=\int_{t_0}^{t_a}\sum_{i=1}^{r}|u_i(s)|^2ds \tag{2.13}$$

取极小值的极值问题。在变分学中条件(2.12)通常称为等周条件[6]，而这里的问题也就是所谓等周问题。依Lagrange乘子法求解这个问题，只须作辅助泛函

$$\widetilde{\mathrm{J}}=\langle\mathrm{U},\mathrm{U}\rangle_{L^2}-\lambda'(T\mathrm{U}+\mathrm{X}_0)$$

这里，$\lambda\in R^n$是常矢量，即所谓 Lagrange 乘子，从而得到确定极小值问题的解的Euler方程

$$\mathbf{U}-T^{*}\lambda=0 \tag{2.14}$$

这里，λ可以利用条件(2.12)来确定。显然，$T\mathbf{U}=-\mathbf{X}_0$，从而由(2.14)式便有$T\mathbf{U}=TT^{*}\lambda=-\mathbf{X}_0$，而$TT^{*}$是满秩的，所以$(TT^{*})^{-1}$存在，于是得到

$$\lambda=-(T\ T^{*})^{-1}\mathbf{X}_0 \tag{2.15}$$

满足问题所要求的极值的控制为

$$\widetilde{\mathbf{U}}=-T^{*}(T\ T^{*})^{-1}\mathbf{X}_0 \tag{2.16}$$

下面证明$\widetilde{\mathbf{U}}$使泛函J达到条件极小：设$\mathbf{U}=\mathbf{U}^{*}+\delta\mathbf{U}$是满足约束(2.12)的容许控制

$$T(\widetilde{\mathbf{U}}+\delta\mathbf{U})=-\mathbf{X}_0$$

而$T\widetilde{\mathbf{U}}=-\mathbf{X}_0$，故有$T\delta\mathbf{U}=0$。从而根据(2.16)式，可知

$$\langle\widetilde{\mathbf{U}},\ \delta\mathbf{U}\rangle_{L^2}=\langle-(TT^{*})^{-1}\mathbf{X}_0,\ T\delta_U\rangle_{R^n}=0$$

于是，泛函J的增量

$$\Delta J=J(\widetilde{\mathbf{U}}+\mathbf{U}\delta)-J(\widetilde{\mathbf{U}})=2\langle\widetilde{\mathbf{U}},\ \delta\mathbf{U}\rangle_{L^2}+\langle\delta\mathbf{U},\delta\mathbf{U}\rangle_{L^2}\geqslant 0$$

这便证明了泛函J，在$\widetilde{\mathbf{U}}$达到条件极小值。这便证明了等式(2.11)是正确的。最后，注意到

$$\|\widetilde{\mathbf{U}}\|^2_{L^2}=\langle\widetilde{\mathbf{U}},\ \widetilde{\mathbf{U}}\rangle_{L^2}=\langle-T^{*}(TT^{*})^{-1}\mathbf{X}_0,-T^{*}(TT^{*})^{-1}\mathbf{X}_0\rangle_{L^2}$$
$$=\langle(TT^{*})^{-1}\mathbf{X}_0,\mathbf{X}_0\rangle_{R^n}$$

并根据非负定的满秩Hermite阵只有正的实特征值与二次型的性质[5]，可知不等式(2.10)成立。引理证毕。

利用这个引理，不难证明下述定理，这些定理可作为定义2、3意义下的能控性的判据。

定理1　如果对给定的时刻t_0，存在时刻$t_1>t_0$，使得当$t_\alpha>t_1$时，TT^{*}是满秩的，且随着t_α的无限增加最小本征值$\mu_{min}(t_0,t_\alpha)$是无界的。则系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下，在时刻t_0是完全能控的(在定义2的意义下)。

证明　对任意非零的$\mathbf{X}_0\in R^n$，根据$\mu_{min}(t_0,t_\alpha)$关于t_α无界的假设，必存在t_α，满足$t_\alpha>t_1>t_0$，使

$$\mu_{min}(t_0,t_\alpha)>\|\mathbf{X}_0\|_{R^n} \tag{2.17}$$

根据已证引理，应存在容许控制$\widetilde{\mathbf{U}}\in L_r^2[t_0,t_\alpha]$用不多于$t_\alpha-t_0$的时间间隔将初始状态$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$转移到$\mathbf{X}(t_\alpha)=0$，且其范数

$$\|\widetilde{\mathbf{U}}\|^2_{L^2}\leqslant\frac{1}{\mu_{min}(t_0,t_\alpha)}\|\mathbf{X}_0\|^2_{R^n}$$

从而根据(2.17)式可知有 $\|\widetilde{\mathbf{U}}\|^2_{L^2}\leqslant 1$，即满足控制约束(1.3)。

依定义2，这时系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下，在时刻t_0是完全能控的。定理证毕。

定理2　如果对给定的时间t_0，存在时刻$t_1>t_0$，使得当$t_\alpha>t_1$时，TT^*是满秩的，且其最小本征值$\mu_{min}(t_0, t_\alpha)$关于$t_\alpha>t_1$来说是有界的，即是有

$$Sup\ \{\mu_{min}(t_0, t_\alpha)\,|\,t_\alpha>t_1>t_0,\ t_\alpha\epsilon[t_1, +\infty)\} = a < +\infty$$

则在R^n中存在子集$D=\left\{\mathbf{X}\,|\,\|\mathbf{X}\|^2_{R^n}<a,\ \mathbf{X}\epsilon R^n\right\}$，使得　　(2.18)

系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下，关于子集D在时刻t_0是能控的(在定义2的意义下)。

证明　对任一属于D的初始状态$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0\epsilon D$，则有$\|\mathbf{X}_0\|^2_{R^n}<a$，于是根据(2.18)式，并注意到$\mu_{min}(t_0, t_\alpha)$关于$t_\alpha>t_1$来说是连续函数，这一点由$TT^*$的表达式(2.9)可以看出。于是存在$\widetilde{t_\alpha}\epsilon[t_1, +\infty]$使得

$$\|\mathbf{X}_0\|^2_{R^n}\leqslant\mu_{min}(t_0, \widetilde{t_\alpha})\leqslant a$$

即有

$$\frac{1}{\mu_{min}(t_0, \widetilde{t_\alpha})}\ \|\mathbf{X}_0\|^2_{R^n}\leqslant 1$$

从而根据引理，可知此时有满足条件(1.3)

$$\|\widetilde{\mathbf{U}}\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{\mu_{min}(t_0, \widetilde{t_\alpha})}\ \|\mathbf{X}_0\|^2_{R^n}\leqslant 1$$

的容许控制$\widetilde{\mathbf{U}}\epsilon L^2_r[t_0, \widetilde{t_\alpha}]$存在。用不多于$\widetilde{t_\alpha}-t_0$的时间将初始状态$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$转移到$\mathbf{X}(\widetilde{t_\alpha})=0$，这便是定理2所要证明的。

定理3　如果对时刻t_0存在实常数$\widetilde{t}>0$，$b>0$，使得对任意的$t'_0>t_0$和$t_\alpha>t'_0+\widetilde{t}$，对应的矩阵

$$TT^*_{(t'_0,t_\alpha)} = \int_{t'_0}^{t_\alpha}\Phi(t'_0,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t'_0,s)ds$$

是满秩的，其最小的本征值$\mu_{min}(t'_0,t_\alpha)$都满足

$$\mu_{min}(t'_0,t_\alpha)\geqslant b \tag{2.19}$$

此外，方程(1.1)的基解阵$\Phi(t, t_0)$满足

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t, t_0)=0 \tag{2.20}$$

这里，右端0表示零矩阵，则系统(1.1)在控制约束(1.3)的条件下，在t_0时刻是完全能控的。

证明　对任意$X_0\in R^n$，由条件(2.20)可知，有时刻$t_0'>t_0$，使得

$$\|\Phi(t_0',t_0)X_0\|_{R^n}\leqslant b$$

记$\widetilde{X}_0=\Phi(t_0',t_0)X_0$，则根据(2.19)式的假设和已经证明了的引理可知存在容许控制$\widetilde{U}\in L_r^2[t_0',t_\alpha]$将初始状态$\widetilde{X}_0$转移到$X(t_\alpha)=0$，且满足不等式

$$\|\widetilde{U}\|_{L^2}\leqslant\frac{1}{\mu_{min}(t_0',t_\alpha)}\|\widetilde{X}_0\|_{R^n}\leqslant\frac{1}{b}\cdot b=1$$

即$\widetilde{U}$满足约束(1.3)，于是若取

$$U(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant t_0'\text{时}\\ \widetilde{U}(t) & \text{当 } t_0'<t\leqslant t_\alpha\text{时}\end{cases}$$

则有$U\in L_r^2[t_0,t_\alpha]$将初始状态X_0用不多于$t_\alpha-t_0$的时间转移到$X(t_\alpha)=0$，且有$\|U\|_{L^2}=\|\widetilde{U}\|_{L^2}\leqslant 1$，即满足约束(1.3)，这就证明了定理所给出的结论。

定理4　如果对时刻t_0，存在$t_1>t_0$，使得当$t_\alpha\geqslant t_1$时，TT^*是满秩的，且其最大本征值$\mu_{max}(t_0, t_\alpha)$有界，即存在常数C，使得不等式

$$\mu_{max}(t_0, t_\alpha)<C \tag{2.21}$$

对任意$t_\alpha>t_1$时成立，则R^n中存在子集

$$G=\{X\mid \|X\|_{R^n}\geqslant C,\ X\in R^n\}$$

使得系统(1.1)在控制约束(3.1)的条件下，关于子集G，在时刻t_0是不能控的。

证明　对任意给定的$X_0\in G$，根据引理，在定理的假设下，对任意$t_\alpha\geqslant t_1$，存在控制$U\in L_r^2[t_0, t_\alpha]$将初始状态$X(t_0)=X_0$转移到$X(t_\alpha)=0$，而且对所有能实行这样转移的控制$U$均满足

$$\|U\|_{L^2}\geqslant\frac{1}{\mu_{max}(t_0, t_\alpha)}\|X_0\|_{R^n} \tag{2.22}$$

其次，因为$X_0\in G$，所以$\|X_0\|_{R^n}\geqslant C$，而依假设(2.21)有

$$\frac{1}{\mu_{max}(t_0, t_\alpha)} > \frac{1}{C}$$

从而，由(2.22)得

$$\|U\|_{L^2} > 1$$

即是说，不管如何选取 $t_\alpha \geqslant t_1$，满足约束条件(1.3)而又能把初始状态 $X(t_0)=X_0$ 转移到 $X(t_\alpha)=0$ 的容许控制 $U \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$ 是不存在的，当然，对任意的 $t_0 < t'_\alpha < t_1$ 的 t'_α 也不可能存在这样的容许控制 $\widetilde{U} \in L_r^2[t_0, t_\alpha]$。否则，我们取

$$U(t) = \begin{cases} \widetilde{U}(t) & 当 t_0 \leqslant t \leqslant t'_\alpha \\ 0 & 当 t'_\alpha < t \leqslant t_1 \end{cases}$$

即有 $U(t) \in L_r^2[t_0, t_1]$ 满足(1.3)，且实现转移，这与上面的结论矛盾。至此，按定义3的意义，定理的结论是正确的。证毕。

推论　如果对时刻 t_0，存在 $t_1 > t_0$，使得当 $t_\alpha > t_1$ 时，有 TT^* 满秩，且其最大本征值 $\mu_{max}(t_0, t_\alpha)$ 满足条件

$$\lim_{t_\alpha \to +\infty} \mu_{max}(t_0, t_1) = C < +\infty \tag{2.23}$$

并在 R^n 中定义子集 $G = \{X \mid \|X\|_{R^n} > C, X \in R^n\}$ 则系统(1.1)在控制约束(3.1)的条件下，关于子集 G 在时刻 t_0 是不能控的。

事实上，由条件(2.23)对任意小的 $\varepsilon > 0$ 均存在 $t_\varepsilon > t_0$，使得当 $t_\alpha > t_\varepsilon$ 时，有

$$\mu_{max}(t_0, t_\alpha) < C + \varepsilon$$

于是由定理4知道系统(1.1)在控制约束(1.3)之下，关于子集

$$G_\varepsilon = \{X \mid \|X\|_{R^n} \geqslant C + \varepsilon, X \in R^n\},$$

在时刻 t_0 是不能控的，由于 ε 可以任意小，而且有

$$\bigcup_\varepsilon G_\varepsilon = G$$

这便证明了所得的结论。

三、应用举例

例1　讨论线性系统

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t^\rho \end{pmatrix} u \qquad t \in [1, \infty] \tag{3.1}$$

在控制约束 $\int_0^{t_a}|\mathrm{u}(t)|^2dt\leqslant 1$ (3.2)

之下的能控性问题，这里，$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$\rho>-\frac{1}{2}$。

这时，系统(3.1)的系数矩阵满足前述的基本规定，故可应用上述所得出的结论来判断它的能控性。

容易验证，方程(3.1)的基解阵是

$$\Phi(t,s)=\begin{pmatrix}1 & t-s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

从而

$$TT^*=\int_0^{t_a}\Phi(0,s)B(s)B^*(s)\Phi^*(0,s)ds$$

$$=\int_0^{t_a}\begin{pmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ s^\rho\end{pmatrix}(o,\ s^\rho)\begin{pmatrix}1 & 0\\ -s & 1\end{pmatrix}ds$$

$$=\int_1^{t_a}\begin{pmatrix}s^2 & -s\\ -s & 1\end{pmatrix}s^{2\rho}ds$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\rho+3}t_a^{2\rho+3} & -\frac{1}{2\rho+2}t_a^{2\rho+2}\\ -\frac{1}{2\rho+3}t_a^{2\rho+2} & -\frac{1}{2\rho+1}t_a\end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\left(\frac{1}{2\rho+3}t_a^2-\mu t_a^{-(2\rho+1)}\right)\left(\frac{1}{2\rho+1}-\mu t_a^{-(2\rho+1)}\right)+\frac{1}{(2\rho+2)^2}t_a^2=0$$

令$\lambda=\mu t_a^{-(2\rho+1)}$可解得

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2\rho+3}t_a^2+\frac{1}{2\rho+1}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{t_a^2}{2\rho+3}-\frac{1}{2\rho+1}\right)^2-\frac{4t_a^2}{(2\rho+2)^2}}\right]$$

$$\mu_{1,2}=t_a^{2\rho+1}\lambda_{1,2}$$

$$\mu_{min}=\frac{1}{2}t_a^{2\rho+1}\left[\left(\frac{t_a^2}{2\rho+3}+\frac{1}{2\rho+1}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(\frac{t_a^2}{2\rho+3}-\frac{1}{2\rho+1}\right)^2-\frac{4t_a^2}{(2\rho+2)^2}}\right]$$

$$\because \lim_{t_\alpha\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t_\alpha^2}{2\rho+3}+\frac{1}{2\rho+1}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{t_\alpha^2}{2\rho+3}+\frac{1}{2\rho+1}\right)^2-\left(\frac{1}{(2\rho+1)(2\rho+3)}+\frac{1}{(2\rho+2)^2}\right)t_\alpha^2}\right]$$

$$=\lim_{t_\alpha\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{(2\rho+3)(2\rho+1)}+\right.}{\frac{1}{2}\left(\frac{t_\alpha^2}{2\rho+3}+\frac{1}{2\rho+1}\right)+}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\left.+\frac{1}{(2\rho+2)^2}\right]t_\alpha^2}{+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{t_\alpha^2}{2\rho+3}+\frac{1}{2\rho+1}\right)^2-\left(\frac{1}{(2\rho+1)(2\rho+3)}+\frac{1}{(2\rho+2)^2}\right)t_\alpha^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2\rho+3)(2\rho+1)}+\frac{1}{(2\rho+2)^2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2\rho+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{2\rho+3}}$$

$$\therefore \lim_{t_\alpha\to\infty}\mu_{min}(0,t_\alpha)=\infty$$

依定理1，系数(3.1)在控制约束(3.2)的条件下，在时刻$t_0=0$是完全能控的。

特别值得注意的是，当$\rho=0$时，系统(3.1)退化为定常系统，我们证 明了此时在控制约束(3.2)的条件之下，系统(3.1)完全能控。可是想利用〔4〕中的定理14来证明这个结论，则不可能，因为此时方程(3.1)对应的齐次方程的平凡解是不 稳定的，更谈不上那里所需要的全局渐近稳定的假设条件3。

例2　讨论线性系统

$$\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}u\qquad t\epsilon[1,+\infty]\qquad(3.3)$$

在控制约束条件(3.2)之下的能控性问题。

如同例1，方程(3.2)的基解阵为

$$\Phi(t,s)=\begin{pmatrix}1&t-s\\0&1\end{pmatrix}$$

而

$$TT^* = \int_1^{t_a} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s^{-2} \end{pmatrix} (0, s^{-2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_1^{t_a} \begin{pmatrix} s^2 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix} s^{-4} ds$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^a}+1 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_a^2}-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_a^2}-1\right) & -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t_a^3}-1\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} t_a^{-3} \begin{pmatrix} 6(t_a^3-t_a^2) & 3(t_a-t_a^3) \\ 3(t_a-t_a^3) & 2t_a^3-1 \end{pmatrix}$$

可解得

$$\mu_{max}(1,t_a) = \Big[(4t_a^3-3t_a^2-1) + $$
$$+ \sqrt{(4t_a^3-3t_a^2-1)^2-12(t_a^3-t_a^2)(t_a^3-1)+9(t_a-t_a^3)^2}\Big] \frac{1}{6} t^{-3}$$

$$\mu_{min}(1,t_a) = \Big[(4t_a^3-3t_a^2-1) - $$
$$- \sqrt{(4t_a^3-3t_a^2-1)^2-12(t_a^3-t_a^2)(t_a^3-1)+9(t_a-t_a^3)^2}\Big] \frac{1}{6} t^{-3}$$

可见，当$t_a>1$时，均有

$$\mu_{max}(1,t_a) > \mu_{min}(1,t_a) > 0$$

即TT^*是满秩的，因而系统(3.3)按照定义1的意义，在时刻$t_0=1$时是完全能控制的。但是，由于

$$\lim_{t_a\to\infty} \mu_{m\ x}(1,t_\mu) = \frac{4+\sqrt{16-12+9}}{6} = \frac{4+\sqrt{13}}{6} \tag{3.4}$$

$$\lim_{t_a\to+\infty} \mu_{min}(1,t_a) = \frac{4-\sqrt{16-12+9}}{6} = \frac{4-\sqrt{13}}{6} \tag{3.5}$$

由(3.4)式及定理4的推论可知系统(3.3)在控制约束(3.2)的条件下，关于子集$G=\{X \mid \|X\|_{R^n} > \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{6}, X\in R^n\}$ 在时刻$t_0=1$是不能控的；另一方面，由(3.5)式可知

$$\sup_{t_a > t_0} \mu_{min}(1, t_a) \geqslant \frac{4-\sqrt{13}}{6}$$

于是，由定理 2 可知系统(3.3)在控制约束(3.2)之下，关于子集

$$D = \{ X \mid \|X\|_{R^n} < \frac{4-\sqrt{13}}{6},\ X \in R^n \}$$ 在时刻$t=1$是能控的。

参 考 文 献

〔1〕关肇直、陈翰馥，綫性控制系統的能控性和能观测性(現代控制论小丛書)，科学出版社，1975年.

〔2〕Hermes, H. and Lasalle, J. P., *Functional Analysis and Time Optimal Control*, Academic press, New York, 1969.

〔3〕Kalman, R. E., On the General Theory of Control Systems, 1-th IFAC, Moscow, 1960.

〔4〕Понтрягин А. С. и дг., Математическая Теория Оптимальных Процессов, Москва, 1961(中譯本：最佳过程的数学理论，1965).

〔5〕Гантмахер Ф. Р., Теория Матриц, Наука, 1966(旧版中譯本：矩陣论，高等教育出版社，1955).

〔6〕Элсгодьц Л. Э., Вариационное Исчисление, Москва, 1952(中譯本：变分法，1958).

〔7〕关肇直，泛函分析講义，高等教育出版社，1959.