

点阵规范理论

殷鹏程

(复旦大学)

§ 1 引言

近年来对于强子是由层子所组成的束缚态的观点,提出了不少的模型,一般都不能满足完全的相对论和量子论的要求,或者是忽略了粒子的湮灭和产生(势模型)。或者只以半经典的方式包括了量子场论(袋模型)。而且各种模型和假定之间也只有很松散的连系,缺乏一个统一的动力学理论把各种模型和假定连系起来,一般认为非阿贝尔颜色规范场论[QCD],很可能在未来的理论中起重要作用,对于耦合常数很小的区域,这种理论的行为,包括重正化和渐近自由已知道很多。可是我们常用的弱耦合展开的方法,对于强耦合理论却不能有多大的作用。

我们希望得到一个(有效)理论体系,它能满足(1)在高动量、弱耦合区能趋向QCD的结论。(2)在耦合常数 $g(\lambda) \gtrsim 1$ 的区域,可以进行计算。在弱耦合区我们像通常场论所采用的方法那样,以自由粒子作为非微扰项,而以相互作用项作为微扰,来进行微扰计算。这时单粒子的波函数可写成平面波的形式, e^{ikx} ,可是在强耦合区,我们就应该首先把自作用项(同一位置力学量的耦合)对角化,而以动能项来作微扰。这时单粒子波函数可写成 $\delta(x-x_0)$ 形式。要求在强耦合区满足上述第二个条件也就要求体系的力学自由度是可数的(可以是无限的)。在可数的自由度情况下,态矢量可以写成

$$|s\rangle = \prod_i |s_i\rangle$$

可是在具有连续无限变量的场论,就不能有这样的描述。因此我们必须考虑(无限)可数的自由度。格点系就是我们知道得比较清楚的这样的体系。

K. G. Wilson等⁽¹⁾于一九七四年提出了点阵规范理论,指出在耦合常数大时,这种理论可提供荷色粒子的禁闭。Kogut和Susskind⁽²⁾更提出了点阵规范理论的哈密顿形式。

目前我们来讨论点阵规范理论还有以下意义的:我们知道像QED那样的弱耦合,阿贝尔的规范理论用来描写电子和无质量的光量子,它是没有粒子禁闭性质的,而对于强耦合的非阿贝尔规范理论象QCD,用来描写强子物理,它是禁闭层

子和颜色胶子的,这两者之间很象是一种相变过渡。另一方面,在统计理论里对于相变和相干态都讨论了很多。我们在点阵上讨论规范理论,就可以借用统计物理中所用的一套有效方法。

其实在统计物理和欧氏空间的量子场论之间有很多相似之处,例如可由下表说明。

统计物理	欧氏空间的量子理论
组态的求和	Feynmann路线积分
$\beta \times$ 组态的能量	$\hbar^{-1} \times$ 经典作用量
$\beta \times$ 自由能	连接的Green函数的产生泛函数
低温展开	微扰展开
高温展开	强作用展开
相变	相变(对称性破缺)

而我们通常所用的,在动量空间里的Feynman传播子的方法,对这种“相变”的理解并没有多大的帮助。点阵规范理论的研究,由于自动引进了高动量截断,可望把量子场论变成一个有限的、确定的且不需要依靠弱作用展开的理论。

点阵规范理论还有一个优点,就是它可以使我们简单而形象地理解定域的颜色规范交换。而且我们还不能最终地排除空间存在一个最小长度的可能性,例如 $\lesssim 10^{-16}$ 厘米,目前我们所能观察到的 $\gtrsim 10^{-14}$ 厘米。

点阵规范理论应该不破坏理论的内部对称性,特别是定域规范理论在点阵规范理论中,对于层子禁闭更是起着重要作用。可是对应于时空各向同性和均匀性的Lorentz和Poincare不变性将遭到破坏,因为现在只存在点阵上的分立对称性,不过我们要求在低能区域以及在点阵,间距 $a \rightarrow 0$ 时能得到相对论的结果。

§ 2 基本概念

把空间看成为等距离的点阵,格点间的距离 $a = \frac{1}{\lambda}$ 。整个空间的线度(每一维)为 L ,可被平均分为 $2N + 1$ 段(每一段为 a)共有 $(2N + 1)$ 个格点(每一维),即

$$L = (2N + 1)a \quad (2.1)$$

并具有周期边界条件,在点阵上允许的动量为(每一维)

$$K = \frac{2\pi}{L} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (2.2)$$

且

$$K_{max} = \frac{2\pi}{L} N \quad (2.3)$$

相当对于动量提供了一个截断。

§ 2.1 求和与差分

空间积分就相应地变成对点阵的求和(每一维)

$$\int dx \longrightarrow \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=-N}^{+N} \longrightarrow a \sum_{j=-N} \quad (2.4)$$

$$\int d^4x \longrightarrow a^4 \sum_{i,j,k,l}$$

场量和相应的共轭动量现在都定义为点阵上的点函数, 它的 Fourier 展开成为 Fourier 求和 (一维情况)

$$\begin{aligned} \phi(x) \longrightarrow \phi_i &= \sum_{K=-K_{max}}^{+K_{max}} e^{ikj/\Lambda} \phi(k) = \sum_k e^{ikja} \phi(k) \\ \phi(k) &= \frac{1}{2N+1} \sum_j \phi_j e^{-ikj/\Lambda} = \frac{1}{2N+1} \sum_j \phi_j e^{-ikja} \end{aligned} \quad (2.5)$$

正则对易关系可写成(一维情况)

$$[\pi_j, \phi_j] = -i\Lambda \delta_{jj'}, \quad a[\pi_j, \phi_j] = -i\delta_{jj'} \quad (2.6)$$

高维情况

$$\phi_{j_\mu} = \sum_{K_\mu=-K_{\mu max}}^{K_{\mu max}} e^{ik_\mu j_\mu a} \phi(k_\mu) \quad \mu = 1, 2, 3, 0$$

$$a[\pi_{j_\mu}, \phi_{j_\nu}] = -i\delta_{j_\mu}^{\nu'} j_\nu'$$

函数的微分相应的变为差分

$$\nabla\phi \longrightarrow \Lambda[\phi_{j+1} - \phi_j] = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{a} \text{ 或 } \frac{\phi_{n+\nu'} - \phi_{n-\mu}}{2a} \quad (2.7)$$

例如标量场的动能部份

$$\frac{1}{2} \int dx (\nabla\phi)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \sum_K \phi^*(K) \phi(K) \left\{ 4/a^2 \sin^2 \frac{Ka}{2} \right\} \quad (2.8)$$

由此得到自由粒子的能量和动量关系一般为

$$E(k) = \sqrt{m^2 + \frac{4}{a^2} \sin^2 \frac{Ka}{4}} \quad (2.9)$$

只有当 $\frac{Ka}{2} \ll 1$ 时, 才得到通常的(正确的)色扩关系 $E(k) = \sqrt{m^2 + k^2}$,

可望在目前的低能区域, 相对论的能量动量关系依然成立。而在 $K \rightarrow K_{max} = \frac{\pi}{a}$ 区,

(2.9)式就和 $E(k) = \sqrt{m^2 + k^2}$ 有很大的偏离, E 随 k 的变化逐渐趋于平坦得到类似固体物理里的能带结构。

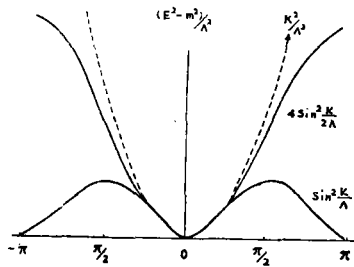
对于Dirac场还存在另外的困难。

$$\begin{aligned}
 -i \int dx \phi^+(x) \overleftrightarrow{D} \phi(x) &= \frac{-1}{2} \int dx \{ \phi^+(x) \alpha D \phi^*(x) - [D \phi^*(x)] \alpha \phi(x) \} \\
 &= L \Sigma \phi^+(k) \alpha \phi(k) \left(\frac{1}{a} \sin K a \right)
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

以上式作为动量的表达式, 我们得到对于 Dirac 粒子的能量和动量的色散关系如下

$$E_0(k) = \sqrt{m^2 + A^2 \sin^2 \frac{K}{A}} = \sqrt{m^2 + \frac{1}{a^2} \sin^2(Ka)} \quad (2.11)$$

虽然当 $Ka \ll 1$ 时, 依然得到正确的相对论的能量动量关系, 可是在一个给定能量 E_D 值时一般可有两个 k 值态。如图所示。



为了克服以上困难, Drell⁽¹⁾ 等人提出: “以 iK 乘上相应的 Fourier 分量作为微分的定义: (每一维)

$$\begin{aligned}
 (D\phi)_j &\equiv \sum_K iK e^{iKj} \phi(K) = \sum_{j'} \phi_{j'} \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_K e^{iK(j-j')} a_{iK} \right\} \\
 &= \frac{1}{a} \sum_{j'} \phi_{j'} [-\delta'(j-j')]
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中当 $N \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned}
 \delta'(j-j') &= \frac{(-1)^{j-j'+1}}{(j-j')} \quad j \neq j' \\
 &= 0 \quad j = j'
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

以上是对一维情况定义的, 一般情况下可以推广为, 例如

$$\delta'_x(j-j') = \delta'(j_x - j'_x) \delta_{j_y, j'_y} \delta_{j_z, j'_z} \quad (2.14)$$

由(2.12)式所定义的微分运算可以得到正确的能量动量关系

$$\text{即} \quad E(K) = \sqrt{m^2 + K^2} \quad |K| < K_{max} = \frac{2\pi N}{L}$$

不过这时梯度所连繁的格点就不仅是近邻两点, 而是遍及整个点阵。

§ 2.2 规范变换

由于梯度项中连系了不同格点的场量,因而在动能项中出现有不同格点上的 $\bar{\psi}_j \psi_{j+1}$ 之类的乘积,而这种乘积在定域规范变换下不是保持不变的。

例如 $\bar{\psi}_j \rightarrow \bar{\psi}_j e^{-ie\alpha(j)}$, 同时 $\psi_{j+1} \rightarrow e^{ie\alpha(j+1)} \psi_{j+1}$ 在这样的变换下 $\bar{\psi}_j \psi_{j+1}$ 是要改变的。如同在连续时空的常用情况,为了保持定域规范变换下不变的性质,我们还必须引进规范场和规范协变梯度的概念,为此 K. G. Wilson⁽²⁾ 引进作用于相邻格点间的么正算符 $U(j, j+1)$ 。在定域规范变换下(考察一般的规范群)

$$\bar{\psi}_j \rightarrow \bar{\psi}_j \Phi_j^+ = \bar{\psi}_j \exp[-igx^a(j) \cdot \frac{\lambda_a}{2}] \quad (2.15)$$

$$\psi_{j+1} \rightarrow \Phi_{j+1} \cdot \psi_{j+1} = \exp[igx^a(j+1) \cdot \frac{\lambda_a}{2}] \psi_{j+1}$$

$$\begin{aligned} U(j, j+1) &= \Phi_j U(j, j+1) \Phi_{j+1}^+ \\ &= \exp[igx^a(j) \cdot \frac{\lambda_a}{2}] U(j, j+1) \\ &\quad \exp[-igx^a(j+1) \cdot \frac{\lambda_a}{2}] \end{aligned}$$

其中 $\frac{\lambda_a}{2}$ 为规范群的产生算子,么正算符 $U(j, j+1)$ 可以具体写为

$$U(j, j+1) = e^{ig \frac{\lambda_a}{2} \cdot A_a(j, \vec{j}+1)a} \quad (2.16)$$

其实上式就是杨振宁所提出的位相因子的点阵表达形式,由上式在相邻格点间的 $U(j, j+1)$, (为了简便把它记成 $U(l)$) 通过按顺序连乘可以得到一般的 $U(j_1 j_2)$ 算符

$$U(j_1 j_2) = \prod_{j_1 < l < j_2} U(l) \quad (2.17)$$

并且利用

$$A(l_{1,2}) = -A(l_{2,1}) = -A(-l_{1,2})$$

可以证明

$$\begin{aligned} U(j, j) &= 1 \\ U(l_{1,2}) &= U^+(l_{2,1}) = U^+(-l_{1,2}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

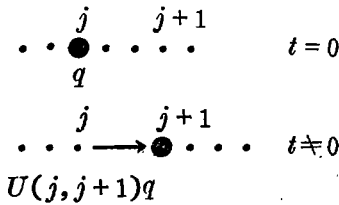
由以上讨论的关于 $U(j, j+1)$ 的性质可以看出:如果我们把所有的 $\bar{\psi}(j) \psi(j+1)$ 都代以 $\bar{\psi}(j) U(j, j+1) \psi(j+1)$ 那末就可以在定域规范变换下保持不变。这就相应于规范协变微商在点阵理论中的表达形式。

§ 2.3 定域规范不变性

由此看来所谓规范场是定义在格点之间的线段上的算符。定域规范不变性,在

连续时空理论中导致，定域的“电”荷守恒，也就是空间每一点，“电”流散度等于“电”荷密度的变化率。在点阵理论中，定域规范不变要求 $U(j, j+1)$ 和 $\bar{\psi}(j)\psi(j+1)$ 伴随出现。这相当说夸克由 j 格移动到 $j+1$ 格时，必然同时在 $j \rightarrow j+1$ 的线段上产生规范场，以保持空间每点仍旧保持原来的“电”荷状态。如果假定夸克带有“电”荷 $+1$ ，反夸克带有“电”荷 -1 ，那末规范场的弦的起端 j 应带 $+1$ “电”荷，而弦的末端应带有 -1 “电”荷，例如在 $t=0$ 时，在 j 点有一个夸克 q ，而在 $t \neq 0$ 时层子 q 移动 $j+1$ 点。这时在 $j \rightarrow j+1$ 线段出现了规范弦，如图所示。空间每一点“电”荷依然和 $t=0$ 时相同。

如果每一规范弦都有一有限能量，那末我们要把一对层子对分开，所需要的能量将随它们之间距离而直线上升，这就起到层子禁闭的作用。在点阵理论中，定域规范不变性对层子禁闭起着重要的作用。



如果空间某一点 j 有一对夸克对处在颜色单态，这整个体系在点阵上运动不会破坏规范不变性。（色荷守恒），这个体系可以看成是介子的基态，可是要把它们分开就必须产生带颜色的规范弦才能保持定域色荷守恒。一个带色的规范弦两端都带有颜色，一端带有颜色另一端则带有相应的反颜色，带色规范弦可以和一对层子对接合使得两端都处在颜色单态。如图所示。这样体系也可以在点阵上自由运动，这可以看作是介子的激发态。重子的基态就是三个层子在同一格点并处于颜色单态，重子的激发态可以看成是例如三个夸克和三条带色规范弦构成，三个夸克和三条弦的反色端相连形成单态，而三条弦的另三端带色端聚在一点也形成单态，此外还有规范不变的无层子的纯粹由颜色规范弦所组成的态，例如由规范弦所组成的封闭的方块。如果带色规范弦具有有限质量，那末夸克就被禁闭而不能单独出现。对于非阿贝尔群的强作用例QCD,情况就应该是这样,对于阿贝尔群弱作用,例如QED,规范线的质量就应为零,因而没有轻子禁闭现象。目前理论的任务就是要说明这些事实,很可能这是和相变情况类似。



§ 2.4 作用量

有了以上的准备工作,我们可以写下在点阵上的QCD的作用量,这也是我们理论的出发点,由和连续空间的理论的对比可知,(暂时仍以(2.7)或作为梯度定义)

$$A_\phi = \frac{1}{2} \alpha^3 \sum_n \sum_\mu (\bar{\psi}_n \gamma_\mu e^{igA_{n\mu}^a} \psi_{n+\mu} - \bar{\psi}_{n+\mu} \gamma_\mu e^{-igA_{n\mu}^a} \psi_n)$$

$$-\alpha^4 \sum_n m \bar{\phi}_n \phi_n \tag{2.19}$$

其中 $A_{n\mu} = A_{n\mu}^a \cdot \frac{\lambda_n}{2}$ (2.20)

为了方便引进 $B_{n\mu} \equiv \alpha g A_{n\mu}^a \frac{\lambda_n}{2}$ (2.21)

在 A_ϕ 中 $B_{n\mu}$ 是出现为角变量。 A_ϕ 是 $B_{n\mu}$ 的周期函数，周期为 2π 。不过当 $\alpha \rightarrow 0$ 时， $-\infty < A_{n\mu} < \infty$ 不再具有周期性。

规范不变场量（先考虑阿贝尔规范场） $F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ 在点阵上可表成为

$$E_{n\mu\nu} = (A_{n+\mu,\nu} - A_{n,\nu} - A_{n+\nu,\mu} + A_{n,\mu})/\alpha \tag{2.22}$$

为了方便引进

$$f_{n\mu\nu} = \alpha^2 g F_{n\mu\nu} = B_{n,\mu} + B_{n+\mu,\nu} - B_{n+\nu,\mu} - B_{n,\nu} \tag{2.23}$$

作用量中的规范场部份(利用(2.16)式)可写成

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{1}{2g^2} \sum_{n,\mu\nu} e^{if_{n\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{Tr}(U_{n,\mu} \cdot U_{n+\mu,\nu} U_{n+\mu,\nu}^+ U_{n,\mu}^+) \end{aligned} \tag{2.24}$$

当 $\alpha \rightarrow 0$, $f_{n\mu\nu} \rightarrow 0$

$$A_B \simeq \frac{1}{2g^2} \sum_{n,\mu\nu} (1 + if_{n\mu\nu} - \frac{1}{2} f_{n\mu\nu}^2 + \dots) \tag{2.25}$$

第一项常数项是无关紧要的， $f_{n\mu\nu}$ 的壹次项求和为零，因为 $f_{n\mu\nu}$ 对于 $\mu\nu$ 指标是反对称的， $f_{n\mu\nu}$ 的两次项

$$A_B \simeq \frac{-1}{4} \alpha^4 \sum_{n,\mu\nu} F_{n\mu\nu}^2 \tag{2.26}$$

这正是连续理论中的 A_B 在点阵理论中的表示。所余 $f_{n\mu\nu}$ 的高次项由于其中含有高次 α 次幂全都趋于零。

由此总的的作用量 $A \simeq A_\phi + A_B$

$$\begin{aligned} A &\sim -C \sum_n \bar{\phi}_n \phi_n + K \sum_{n\mu} (\bar{\phi}_n \gamma_\mu e^{iB_{n\mu}} \phi_{n+\mu} - \bar{\phi}_{n+\mu} \gamma_\mu e^{-iB_{n\mu}} \phi_n) + \\ &+ \frac{1}{2g^2} \sum_n \sum_{\mu\nu} e^{if_{n\mu\nu}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

其中 $C = m\alpha^4$, $K = \alpha^3/2$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，上式 $A \sim$ 连续理论中的作用量。当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，上式 A 是规范不变

的, 对于规范场 $B_{n\mu}$ 是周期的, 在点阵上的作用量。

对于非阿贝尔规范场

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

不过(2.24)式的 A_0 依然成立。

利用(2.16)式, 上式又可写成

$$\begin{aligned} A \sim & C \sum_n \bar{\phi}_n \phi_n + K \sum_n \sum_\mu (\bar{\phi}_n \gamma_\mu U_{n, \mu} \phi_{n+\mu} - \bar{\phi}_{n+\mu} \gamma_\mu U_{n, \mu}^\dagger \phi_n) \\ & + \frac{1}{2g^2} \sum_n \sum_{\mu, \nu} \text{Tr}(U_{n, \mu} U_{n, \nu} + U_{n+\nu, \mu}^\dagger U_{n, \nu}^\dagger) \end{aligned} \quad (2.28)$$

§3 量子理论

时空点阵取为欧氏空间的点阵, 也就是时间格点取为虚时间而不是实时间, 这样做可以保持时间, 空间轴交换的对称性, 在这个理论形式中只能计算出欧氏动量的传播子或其他真空期待值, 对于点阵展开的有限级, 可以延拓到Lorentz空间, 真空期待值是通过在点阵上的路线积分来进行的。

考虑点阵坐标限于 $-N \leq n \leq N$ 并且引进周期性边界条件, 类似统计物理的方法, 可以把 $Z = \int d\{\varphi\} e^A$ 写成

$$Z = \text{Tr} V^{2N+1} \quad (3.1)$$

其中 V 称为Transfer矩阵, 而且

$$V = e^{-aH} \quad (3.2)$$

其中 H 即为体系的哈氏量。由此我们使这一套理论有一个量子力学解释。

§3.1 流——流传播子

下面举例说明点阵上路线积分的运算, 例如流——流传播子。

$$D_{n\nu} = Z^{-1} \left(\pi \pi \int_{-x}^x dB_{m\nu} \right) \langle \bar{\phi}_n \gamma_\nu \phi_n \cdot \bar{\phi}_0 \gamma_\nu \phi_0 e^A \rangle \quad (3.3)$$

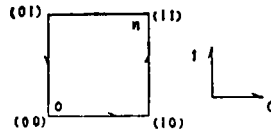
其中 A 为全部作用量, 例如(2.27)式所给出。介子传播子可作为上式的一个特例。

$$Z = \left(\pi \pi \int_{-x}^x dB_{m\nu} \right) \langle e^A \rangle \quad (3.4)$$

括号表示对Dirac场的路线积分。在这里由于 A 是 $B_{m\nu}$ 的周期函数, 对 $B_{m\nu}$ 的路线积分是有限的, 只在一个周期内进行, 以致不必要引进gauge-fixing项。在点阵理论中只要点阵的空间有限, 整个积分也是有限的, 即使点阵体积是无限的。(3.3)式中的 Z^{-1} 亦可把体积抵销。

对(3.3)式进行路线积分时, 常把 e^A 中的 A 中的 $\sim K$ 的梯度项展开。展开的每一

项并可用相应的图形表示, 例如考虑 $\sim K^4$ 项, 如下图所示.



对应这个图形的一项表示如下

$$\begin{aligned}
 & \left(\pi \int_{-\pi}^{\pi} d B_{m\nu} \right) K^4 < \bar{\phi}_{11} \gamma_r \phi_{11} \bar{\phi}_{00} \gamma_l \phi_{00} \cdot \\
 & \cdot \bar{\phi}_{00} \gamma_0 \phi_{10} e^{i B_{00,0}} \phi_{10} \gamma_1 \phi_{11} e^{i B_{10,1}} \\
 & \cdot \bar{\phi}_{11} \gamma_0 \phi_{01} e^{-i B_{01,0}} \phi_{01} \gamma_1 \phi_{00} e^{-i B_{00,1}} e^{A_0} > = D \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

其中所涉及的四个格点的位置为 $(n_0, n_1) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 和 $(1, 1)$. (n_2, n_2) 均为常数, 在上式中省略, A_0 中不含有 K 项

$$A_0 = -C \sum_n \bar{\phi}_n \phi_n + \frac{1}{2g^2} \sum_{\mu\nu} \sum_{n\mu} e^{i f_{n\mu\nu}} \tag{3.6}$$

对于(3.5)的积分包括对 $d B_{m\nu}$ 求积分和对 $\bar{\phi} \phi$ 的括号运算, 这两种运算是相互独立的, 可以把 D 写成 $= D_\phi D_B$, 其中

$$\begin{aligned}
 D_B = & \left(\pi \int_{-\pi}^{\pi} d B_{m\nu} \right) \exp [i (B_{00,0} + B_{10,1} - B_{01,0} - B_{00,1}) \\
 & + \frac{1}{2f^2} \sum_{\mu\nu} e^{i f_{n\mu\nu}} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

这是一个对规范场的迥路积分的指数函数的平均典型计算。

因为 A_0 中不包含不同格点的耦合项, 所以对 $\bar{\phi} \phi$ 求括号运算又可进一步分解为在每个格点上的括号运算的联乘, 为了简单计, 考虑位于封闭迥路上的各格点, 利用 ϕ 在括号内的搬运(利用反对易法则), 对应(3.5)式的括号运算可写成

$$\begin{aligned}
 & < \bar{\phi}_{00} \gamma_0 \phi_{10} e^{-C \bar{\phi}_{10} \phi_{10}} \phi_{10} \gamma_1 \phi_{11} e^{-C \bar{\phi}_{11} \phi_{11}} \phi_{11} \gamma_0 \phi_{01} \bar{\phi}_{11} \gamma_0 \phi_{01} \cdot \\
 & e^{-C \bar{\phi}_{01} \phi_{01}} \phi_{01} \gamma_1 \phi_{00} e^{-C \bar{\phi}_{00} \phi_{00}} \phi_{00} \gamma_1 \phi_{00} > \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

上式全部括号运算又可分为四个括号运算的联乘, 定义

$$D\phi' = \langle \phi_{10} e^{-C\bar{\phi}_{10}\phi_{10}-\phi_{10}} \rangle \quad (3.9)$$

和

$$D_{\phi_i} = \langle \phi_{11} e^{-C\bar{\phi}_{11}\phi_{11}-\phi_{11}\gamma\phi_{11}\bar{\phi}_{11}} \rangle \quad (3.10)$$

而

$$D_{\phi} = -K^4 T \cdot (D_{\phi'} \gamma_1 D_{\phi_{\mu}} \gamma_0 D_{\phi'} \gamma_1 D_{\phi_{\nu}} \gamma_0) \quad (3.11)$$

矩阵 $D_{\phi'}$ 和 $D_{\phi_{\mu}}$ 是可以计算的, 例

$$(D_{\phi'})_{\alpha\beta} = \langle \phi_{10\alpha} \exp(-C\sum_{\gamma} \bar{\phi}_{10} \phi_{10}) \bar{\phi}_{10\beta} \rangle \quad (3.12)$$

指数可展开为 C 的级数, 假定Dirac旋量有四个分量, 上式中只有 C^2 项包括所有的四个 $\phi_{10}\bar{\phi}_{10}$ 的乘积, 所以

$$(D_{\phi'})_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} (-C)^2 \quad (3.13)$$

(负号是由于习惯上 $\bar{\phi}_{10}$ 出现在 ϕ_{10} 的左边时取正号)。类似的计算可给出

$$(D_{\mu}) = C^3 \gamma_{\mu} \quad (3.14)$$

§ 3.2 对规范场的平均

现在来考虑对规范场的平均, 由以上(3.7)式可知在求 D 时, 一般会出现如下的路线积分。首先考虑类似(3.7)式的路线积分, P 表示展开图形中的回路曲线。

$$I_N(P) = \left(\prod_{m,\nu} \int_{-x}^x dB_{m\nu} \right) \exp[i\Sigma(\pm) B_{n\nu} + \frac{1}{2J^2} \sum_{n,\nu} e^{if_{n,\nu}}] \quad (3.15)$$

其中 Σ 求和是对回路上每一线段进行。(±)号由路线的方向决定。如图所示

$$n \xrightarrow{+B_{n\mu}} n + \mu, \quad n \xleftarrow{-B_{n\mu}} n + \mu$$

按 $1/g^2$ 展开的零级项

$$I_N^0(P) = \left(\prod_m \prod_{\nu'} \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu} \exp[i\Sigma(\pm) B_{n\nu}] \right) \quad (3.16)$$

这一项贡献为零, 因为对于出现在 Σ 中的任一个 B_n 都有一个积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} dB_{n\mu} \exp(\pm i B_{n\mu}) \text{ 这个积分为零。一级项}$$

$$I_N^{(1)}(P) = \frac{1}{2j^2} \left(\prod_m \prod_{\nu'} \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu} \right) \sum_{l\pi\sigma} \exp[i \sum (\pm) B_{n\nu} + i f_{l_{\sigma_0}}] \quad (3.17)$$

$f_{l_{\sigma_0}}$ 本身就是规范场的线积分，它是从格点出发的边长为 a 的单位正方形的回路积分， $I_N^{(1)}(P)$ 积分只有当可能找到一个单位正方形使得 $f_{l_{\sigma_0}}$ 完全和 $\sum (\pm) B_{n\nu}$ 线积分相抵销才不为零，这只有当 P 回路本身就是一个单位正方形才能做到，否则 $I_N^{(1)}$ 为零。

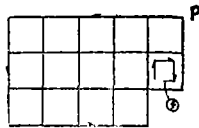
一般 g^{-2K} 级项可写成

$$I_N^{(K)}(P) = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2j^2} \right)^K \left(\prod_m \prod_{\nu'} \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu} \right) \sum_{l_1\pi_1\sigma_1} \dots \sum_{l_K\pi_K\sigma_K} \exp[i \sum (\pm) B_{n\nu} + i f_{l_1\pi_1\sigma_1} + \dots + i f_{l_K\pi_K\sigma_K}] \quad (3.18)$$

$$\text{只有当 } \sum (\pm) B_{n\nu} + i f_{l_1\pi_1\sigma_1} + \dots + i f_{l_K\pi_K\sigma_K} = 0 \quad (3.19)$$

时 $I_N^{(K)}(P)$ 才不为零。

根据 $f_{l_{\sigma_0}}$ 的定义可知每一个 $f_{l_{\sigma_0}}$ 就是在一个边长为 a 的单位方块上的线积分。要求(3.19)式为零，就相应为所有 $f_{l_{\sigma_0}}$ 的线积分在 P 的路线上正好和 $\sum (\pm) B_{n\nu}$ 的方向相反，而在 P 的内部的一条线积分彼此相销，可用下图表明。



对于一个给定的路线 P ， $I_N(P)$ 的最低级非零项就是由 P 所围成的最小面积来决定。于是除了一个数值因子外 $I_N(P) \sim (j^2)^{-A/a^2}$ 也就是 $I_N(P) \sim \exp[-A(l_n j^2)/a^2]$ 其中 $A(P)$ 为由 P 回路所围的面积。这就是说层子路线不能分开很大，也就是层子在传播时，不易分开，这就是在点阵规范理论中层子禁闭的机制。

考虑在 (z, t) 平面里如右图所示的回路，这相当在 A 点产生了夸克对，相互分开距离 dz ，以后又在 B 点湮灭。这个图形对一流传播子的贡献，正比于

$$\sim \exp\left(-dz \cdot dt \frac{l_n j^2}{a^2}\right)$$

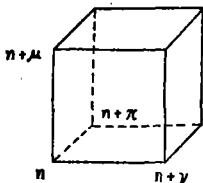
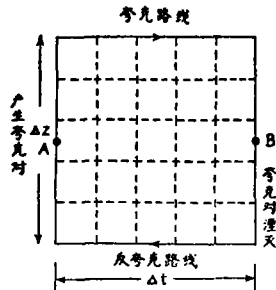
这相当上述过程的机率估计也正比

$$\sim \exp(-\Delta z \cdot \Delta t \ln g^2/a^2)$$

另一方面，在欧氏空间中，一个过程的机率正比 $\Delta t \exp(-\Delta E \cdot \Delta t)$ 。其中 ΔE 是过程中的能量， Δt 为过程进行的时间。由此相比，可得到把夸克对分开 Δz 距离，需要能量 $\Delta E \sim z \ln g^2/a^2$ 。如果把夸克对分开所需要的能量正比于它们的距离，这实际上就是夸克永远被禁闭的。

对于给定的 P 路线， $I_N(P)$ 展开中还有很多高级项，因为对于给定的边界，可以有很多表面，特别我们可以在原有的最小的表面上加上那些本身相加为零相互抵销的 $f_{1,1}$ 回路。最简单的例子就是一个单位立方体的六个面的 $f_{1,1}$ 回路，这六个面的 $f_{1,1}$ 回路相加为零，即

$$0 = f_{n,n} - f_{n+z,n} + f_{n,x} - f_{n+y,x} + f_{n,x} - f_{n+y,x} - f_{n+z,n} \tag{3.20}$$



上式就是连续理论中的 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_\nu F_\alpha(x) = 0$ ，在点阵理论的类比。

我们可以在由 P 围成的最小面积上任何一处加上一个单位立方体，这就意味着在 $I_N(P)$ 展开中还应有一大概为数 $A(P)/a^2$ 个，其数量级为 $g^{-12}(g^2)^{-A(P)}/a^2$ 的项，〔当然我们也可以把单位立方体加在与 $A(P)$ 不相连的地方。不过这些不相连的单位立方体的贡献，

在除以 Z 时将被抵销。〕由此看来当 $A(P) \rightarrow \infty$ 时， $I_N(P)$ 按 $1/g^2$ 展开并不是很简单的，每一非零项对应一个以 P 为边界的对于所有可能的表面求和，其中也包括那些本身相交的表面，〔考虑到在 $f_{1,1}\pi_1\sigma_2 \dots f_{1,k}\pi_k\sigma_k$ 中可能有相同的 $f_{1,1}\pi_1\sigma_1$ 出现。〕

根据我们以往的经验，特别是量子统计的经验，以上所得到的 $I(P) \sim e^{-A(P)}$ 的结论是由微扰方法所得到的，当 g^2 够大以致还没有产生相变时，在正确的理论中，这个结论依然保持成立。可是当 g^2 很小以致可能产生了相变，这时以上的展开就需要改进。这时正确理论可按 L 展开可给出 $I(P) \sim e^{-L(P)}$ 其中 $L(P)$ 为 P 图形的长度，这时层子禁闭就消失了。

因此对于流传播子的强作用展开和强子的对偶弦模型有相同的一般情况，我们在此地讨论的实际上是双重展开，一种是对 K 系数展开，（出现在 Dirac 场的作用量中）这是在点阵上定义层子回路所需要的。对 K 展开求和就是对所有可能的层子回路求和。为了要规定填满层子回路中的表面，需进另一种对 g^{-2} 的展开。对 g^{-2} 展开求和就是对所有可能的表面求和，这正是出现在对偶弦模型中的情况，要接合对层子回路和对以回路为边界的表面求和。不过此地规范场的对回路和对表

面求和都是在点阵上定义的,而在弦模型中是在连续时空上定义的。

§ 3.3 按图形展开

由上例所得到的结论可以推广到一般情形,在计算真空期待值的路线积分时,可以按 K 和 $1/g^2$ 展开,展开的每一项可以有图形与之对应。图形的基本元素是连接近邻格点的连线,和基本的单位方块。连线和方块都有指向由箭头表示。连线表示夸克的动能项,方块表示规范场的动能项。图形由连线和方块以各种方式组合而成,近邻连线必须彼此相连接形成层子线,这种层子线可以是起于并终止于外层子场,或者形成封闭回路。

每一条由 n 指向 $n+\mu$ 的连线将以因子 $K(1+\gamma_\mu)U_{n\mu}$ 代入,而由 $n+\mu$ 指向 n 的连线则以因子 $K(1-\gamma_\mu)U_{n\mu}^+$ 代入。出现 $(1\pm\gamma_\mu)$ 因子的理由如下:在点阵上的Dirac场有四个旋量分量,如果不仔细处理,层子将出现四个自旋态,为了限制层子的自旋态,我们引进了投影算符,它只允许Dirac场的上面两个分量沿时间正方向前进,而下面两个分量只能反时间方向前进。只有上两个分量的投影算符是 $(1+\gamma_0)$,因此沿时间方向前进的连线应有 $(1+\gamma_0)$ 因子,为保持时间空间对称性这个因子一般应是 $(1+\gamma_\mu)$ 。以上 γ 矩阵是在欧氏空间定义的。也就是 $\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}$ 而不是 $2y_{\mu\nu}$ 。相应一个规范场的单位方块,有一个因子 $\frac{1}{2g^2}T.U_{n\mu}^+U_{n+\mu}^+,U_{n+\nu,\mu}U_{n\nu}$ 。如果在相同的地点有 l 个指向相同的规范场回路那末应有一个 $1/l!$ 的因子,对于每一个含有 m 个连线的层子回路有一个 $-1/m$ 的因子。如果对于一给定的长度有 k 个层子回路,那末有一个因子 $1/k!$

§ 4 具体模型

§ 4.1 Ising 模型

我们所想要建立的点阵规范理论,是当它应用于弱的相互作用QED时(3+1维)不出现禁闭现象,而当它应用于非-阿贝尔的QCD强作用时就会有禁闭现象,迄今尚未能做到这一点,Wilson和Kosut和Susskind的工作都是考虑了强作用的叠代,其中包括一些近似方法,使得我们不考虑计算技巧的可靠性就无法判断理论内容的正确性,目前的问题是要发展可靠的计算方法,使得由计算结果和实验相比就足以判定理论内容正确与否,我们认为在接触实际的物理问题以前,首先要解决的重要问题就是发展简单而可以理解的计算方法来武装我们自己。下面我们来介绍S.D.Drell⁽³⁾等人最近所提出的一套近似计算方法。目前在统计里通常用重整化群的方法来讨论相变和临界现象,下面介绍的方法其精神也和重整化群方法相似。不过是在时空点阵空间进行的,而不像在场论中通常是在动量空间进行的。

我们选取Ising模型(1+1维)作为示例来检验我们的方法是以下两个原因,(1)在一个格点上自旋自由度只有有限个数的状态(向上或向下),这是和自旋为 $\frac{1}{2}$ 的夸克理论相同的(在1维空间在每一个格点上,对于每一个颜色有 $0, q,$

q 和 qq 态), (2)这个模型的准确解是已知的, 计算结果可以和准确算得的临界指数和临界温度相比较。对于Ising模型的处理可以作为以后处理规范场情况的准备。

考虑1+1维 ϕ^4 场论

$$\frac{1}{A} H = \sum_{j=-N}^N [\frac{1}{2} P_j^2 + \lambda_0 (X_j^2 - f_0^2)^2] + \sum_{j=-N}^{N-1} \frac{1}{2} (X_{j+1} - X_j)^2 \quad (4.1)$$

$$X_j \equiv \phi_j$$

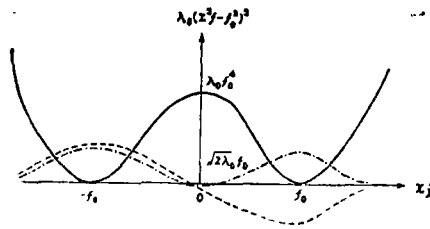
$$[X_j, P_{j'}] = i\delta_{jj'}$$

$$P_j \equiv \frac{1}{A} \pi_j$$

忽略梯度项后(强耦合近似)所余下的单格点的Schrodinger方程的最低两个能级, 深深地处在势垒的下部, 如果零点能量远比势垒的中间高度为小的话, 即

$$\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 \ll_0 f_0^4 \quad (4.2)$$

这两个态分别是对于原点反演对称的和反对称的。如下图所示。这两个能级的间隔比例于在势的两个极小值之间的隧道贯穿。(4.2)式也意味着贯穿是很小的, 所以这个能级间隔是很小的。



$$\Delta \varepsilon \sim \lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 e^{-\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0^3} \ll \lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 \quad (4.3)$$

当 $\lambda^{\frac{1}{2}} f_0^3 \gg 1$ 。当以上两条件都成立时, 我们就可以忽略每个格点的高激发态, 只保留最低两个态, 这两个态就对应于Ising模型中的自旋向上和向下的态。

梯度项将引起对称和反对称态之间的混合。

$$\langle \text{对称} | x | \text{反对称} \rangle^2 \equiv \Delta_0 \sim f_0^2 \quad (4.3)$$

如果这种混合和两个能级之间间距同数量级, 即

$$\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 e^{-\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0^3} \approx \Delta_0 \sim f_0^2 \quad (4.4)$$

(这个条件要和 $\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0^3 \gg 1$ 相容, 要求 $f_0^2 \ll 1$, $\lambda_0 \gg 1$) 那末我们就既不能取强作用近似也不能取弱作用近似。

$$\langle \sigma_z \rangle = \begin{cases} [-(\epsilon_0/2A_0)^2]^{1/2} & \text{当 } \frac{\epsilon_0}{2A_0} \cong 1 \\ 0 & \text{当 } \frac{\epsilon_0}{2A_0} > 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

我们的目的就是要找到一个简单而直接的计算方法，它能得到这个准确的结果，而且它还能推广到适用于四维规范场理论中去，具体的方法如下：

(i) 把点阵分为若干小块，每一小块内包含若干格点，如图就是两个格点组成一个小块。

每一小块内的两格点的哈氏量 $|\cdot\cdot| \cdot\cdot | \cdot\cdot | \cdot\cdot | \cdot\cdot | \cdot\cdot | \dots$
为

$$H_{(1)} = \frac{\epsilon_0}{2} [\sigma_1(1) + \sigma_2(2)] - A_0 \sigma_x(1) \sigma_x(2) \quad (4.10)$$

这是两个自旋耦合的四个自由度的哈氏量。

(ii) 用截断手续把自由度“减小”，这个截断手续就是保留最低的两个本征态，而把高激发态丢掉，这样做法相当于在变分法求解时，采取的试用函数只在整个 Hilbert 空间的部分里展开，并由此建立一个截断的有效哈氏量。

(iii) 把这个手续继续做下去，把相邻的两个小块并成为一个较大的块。原来小块中保留下来的两个最低本征态，就作为描写大块哈氏量的基。因此我们又可以把哈氏量写成自旋的形式，不过有效的耦合常数，块之间的距离以及能级之间的间距都重正化了。

(iv) 如此类推继续重复下去，不断地把高激发态除掉，我们可以认为这个手续在建造一系列的截断的哈氏量的过程中，继续除掉了高动量的态，这种哈氏量描写的只是低动量的态。

(v) 这种叠代的程序一直进行到问题进入弱作用或强作用的区域变成可解的问题。

下面我们以(4.10)为例来说明以上的叠代程序，在一块内相邻两格点有四个独立的态。我们把它们分别记为 $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 。此地 $|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ ；余类推。(4.10)式中第二项只在 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 之间，或 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 之间引起混合，(4.10)的本征态和本征值列于下表

态	能量	相对于最低能态的能量
$\frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}} (\downarrow\downarrow\rangle + a_0 \uparrow\uparrow\rangle) \equiv \phi_0\rangle$	$-\sqrt{\epsilon_0^2 + A_0^2}$	0
$\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle) \equiv \phi_1\rangle$	$-A_0$	$\sqrt{\epsilon_0^2 + A_0^2} - A_0$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle) + D_0 \sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2 + D_0} \\ & \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}}(-a_0|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle) + \sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2} \sqrt{2\varepsilon_0^2 + D_0^2} \end{aligned}$$

其中 $a_0 = (\sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2} - \varepsilon_0)/D_0$

首先把每一块的 H 用以上四个本征态来对角化, 估计每一块的真正的基态的主要部分将是铺张在以上最低的两个本征态的子空间内, 把每一小块 (包含两个格点) 编号并记以整数“ P ”。把截断的 H^{tr} 分成两个部分, 一部分 H_1 中只包含同一小块的各项, 而另一部分 H_2 则包含相邻的小块的各项。即

$$H_2 = -D_0 \sum_P \sigma_x(P, 1) \sigma_x(P+1, 0) \tag{4.12}$$

其中 $\sigma_x(P, a)$ 作用到第 P 个小块的第 $a(a=0, 1)$ 个格点的自旋上, 在我们以上提到的只保留两个最低能态的近似下, H_1 可以表成为 Pauli 矩阵之和, 这些 Pauli 矩阵作用到每一小块所保留的两个态上, 由 (4.11)

$$\begin{aligned} H_1^v = \sum_P & \begin{vmatrix} -D_0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2} \end{vmatrix}_P = \sum_P \left\{ \frac{-1}{2} \left[D_0 + \sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2} \right] I(P) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\varepsilon_0^2 + D_0^2} - D_0 \right] \sigma_2(P) \right\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

具体计算可得到

$$\sigma_x(P, 1) |\phi_0(P)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}} [|\downarrow\uparrow\rangle + a_0 |\uparrow\downarrow\rangle]_P \tag{4.14}$$

因而

$$\langle \phi_1(P) | \sigma_x(P, 1) | \phi_0(P) \rangle = \frac{1+a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} \tag{4.15}$$

同样

$$\langle \phi_1(P+1) | \sigma_x(P+1, 0) | \phi_0(P+1) \rangle = \frac{1+a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}}$$

由此可得

$$H^{tr} = \sum_P \left[C_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_P + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}_P - D_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_P \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{P+1} \right] \tag{4.16}$$

其中

$$C_1 = \frac{-1}{2} (A_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 + A_0^2})$$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\epsilon_0^2 + A_0^2} - A_0$$

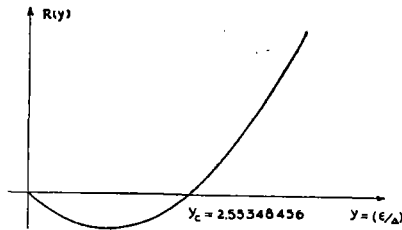
且

$$A_1 = \frac{A_0(1+a_0)^2}{2(1+a_0^2)}$$

(4.17)

如果所得到的 $\epsilon_1/A_1 \gg 1$ 或 $\epsilon_1/A_1 \ll 1$, 我们就可以用微扰叠代法来计算, 否则我们将再重复以上的程序。比较(4.16)和(4.10)可以看到, 每经过一次循环, 我们得到新的 $H^{(r)}$, 它的形式和原来的形式相象, 不过各项前面的系数和原来的 $H^{(r)}$ 各项中的系数有一个关系, 类似(4.17)所表示的。

经过 n 次叠代后的比值记为 $y_n \equiv (\epsilon/A)_n$, 我们来研究 $R(y_n) \equiv y_{n+1} - y_n$ (4-18)的变化。如果 $R(y_n)$ 随着 n 的增大愈来愈减少, 那末最终就导致弱作用近似, 就以梯度项为主导, 如果 $R(y_n)$ 愈来愈增大, 那末就导致强作用近似, 就以单格点为主导, Drell等人计算所得 $R(y)$ 曲线如下图所示, 这个曲线表明有三个固



定点, 就是 $y = 0$, $y = \infty$, 和 $y_c = 2.55\dots$, $R(y) = 0$ 是固定点表明 y 不再变化, 不过 $y_c = 2.55\dots$ 是不稳定的固定点。 $y = \infty$ 时, $R(\infty) > 0$, y 的数值不再减少, 所以 $y = \infty$ 也是固定点。如果我们在 $0 < y < y_c$ 之间任一点出发, 由于 $R(y) < 0$, 最后导致 $y \rightarrow 0$ 也就是导致弱作用近似, 而我们由 $y > y_c$ 出发, 由 $R(y) > 0$, 最后导致 $y \rightarrow \infty$, 也就是导致了强作用近似, 这就是说 $y_c = 2.55\dots$ 就是(4.10)为 H 的体系的临界点, 当 $y < y_c$ 就导致基态的简并, 对称的自发破缺, 而当 $y > y_c$ 时就导致了非简并的基态。

以上所介绍的方法给出 $y_c = 2.55\dots$ 而准确解给出 $y_c = 2$ 不过以上的方法可望能推广到 $3+1$ 维的实际情况。并且可推广到规范场情况, 在那里只有一个耦合常数, 我们也可同样把 y 定义为单格点耦合项和梯度项之比, 来讨论 $R(y)$ 的变化行为。

除了以上讨论的 $R(y)$ 曲线外, 还可能出现如下图所示的两种情况。上面图形表明只有 $y = 0$ 和 $y = \infty$ 处是固定点, $y = 0$ 对应零耦合, 这时相应于自由场理论, 可

以准确求解, $y = \infty$ 时可以完全忽略梯度项, 此外不论我们以 $y > 0$ 的任何一点出发, 最终都导致强作用近似, 而可忽略梯度项。这就是说低能行为可用强作用近似来处理, 下面图形情况相反。不论我们以 $y > 0$ 的任何一点出现最终将导致弱作用近似, 也就是说低能行为可用弱作用近似来处理, 以梯度项为主导。此地的 $R(y)$ 函数和重整化群中的 $\beta(g)$ 函数有相似之处, 不过 $R(y)$ 是在坐标空间而 $\beta(g)$ 是在动量空间描述的, $R(y)$ 是讨论低能 (大距离) 的行为, 而 $\beta(g)$ 是讨论高能 (小距离) 行为。



§ 4.2 Thirring 模型

Thirring 模型的哈氏量如下

$$H = \int dx \left[-\bar{\psi} i \partial \psi - \frac{1}{2} g \{ (\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 \} \right] \quad (4.18)$$

我们研究 Thirring 模型的理由有三。(1) 它讨论的是费米场, 可作为处理费米场的示例。(2) 由于讨论的是费米场, 正如以前已讲过, 为了避免一个能量 E 会出现两个 k 值的态, 我们应用 (2.12) 式作为梯度的定义, 这和上面对玻色场的处理是不同的, 在 (2.12) 式的梯度定义中, 不仅近邻的格点有耦合, 而且远距的格点也有耦合。(3) 在连续的 Thirring 模型中, 当耦合常数 g 超过一个有限的临界值时, 波函数重整化 Z_ψ 为零, 与之相应就是在有限质量谱内不出现单费米子态, 这也就是在这个模型中的夸克禁闭的形式。

引进无因次的场变量 $X_j = A^{-1/2} \psi_j$ 和一种方便的矩阵表示来把上式 (4.18) 式的两次项对角化

$$\alpha = \gamma_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad X_j = \begin{vmatrix} b_j \\ d_j^+ \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

$$\{ b_j, b_{j'}^+ \} = \{ a_j, d_{j'}^+ \} = \delta_{jj'}, \quad \{ b_j, d_{j'} \} = 0 \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} H = & \sum_{j_1 j_2} i \delta'(j_1 - j_2) \{ b_{j_1}^+ b_{j_2} - d_{j_1}^+ d_{j_2} \} - \\ & - g \sum_j (n_b(j) + n_d(j) - 1)^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 $n_b(j) = b_j^+ b_j$, $n_d(j) = d_j^+ d_j$ 是粒子数算符, 这个理论中有两个守恒“荷”。

$$Q = \sum_j n_b(j) - n_d(j) = \sum_j : X_j^+ X_j : \quad (4.21)$$

$$Q_b = \sum_j (n_b(j) + n_d(j) - 1) = \sum_j X_j^+ \gamma_b X_j$$

还有 P , C , 和 T 变换不变都可用来把态分类。

弱作用极限 $g=0$ 时回到无质量的自由费米场, 此时最好在动量空间把梯度项对角化, 其实取

$$b(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_j b_j e^{-ikj/\Lambda} \quad (4.22)$$

$$d(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \sum_j d_j e^{-ikj/\Lambda}$$

我们有

$$\begin{aligned} H(g=0) &= \sum_{k=-\pi\Lambda}^{\pi\Lambda} k(b^+(k)b(k) - a^+(k)d(k)) \quad (4.22) \\ &= \sum_{k=-k_{max}}^{k_{max}} k(n_b(k) - n_d(k)) \end{aligned}$$

上式的最低本征态, 相应于所有 $k < 0$ 态都占有费米子 (b -量子) 同时所有 $k > 0$ 态都有反费米子占有 (d -量子), 也就是 $n_b(k) = \theta(-k)$, $n_d(k) = \theta(k)$ 。在 $Q=0$ 截面, 有双重简并的基态, 一个态是 $k=0$ 的态是空的 ($Q_b = -1$), 另一个态是 $k=0$ 的态有一对费米子对占有 ($Q_b = +1$)。此外在 $Q_b=0$ 截面, 有相应于 $k=0$ 态占有一个费米子 ($Q = +$ 或一个反费米子 ($Q = -1$)) 的双重简并。一共有四重简并, 它们的能量都是

$$F_0 = -2 \sum_{k=0}^{k_{max}} k$$

相反在强作用极限下 $g \gg 1$, 我们最好把 (4.18) 式中的同一格点项对角化, 并把梯度项作为微扰, 参看 (4.20) 式, 在每一格点只有四个态, 相应于 $n_b(j) = 1, 0$, 和 $n_d(j) = 1, 0$ 。这些态的量子数和本征能量列于下表。

态	Q	Q_b	$-g[n_b(j) + n_d(j) - 1]^2$
$ 0\rangle$	0	-1	$-g$
$ +\rangle = b^+ 0\rangle$	+1	0	0
$ -\rangle = a^+ 0\rangle$	-1	0	0
$ \pm\rangle = b^+ a^+ 0\rangle$	0	+1	$-g$

我们看到在每一格点上 $Q=0$ 的态相应格点上无粒子或有一对束缚在格点上的粒子对, 是简并的基态。单费米子态 $Q = \pm 1$ 的激发能为 $g\Lambda$ 。由此看来我们把一对费米子对自同格点分开需要能量 $2g\Lambda$ 。当 $g \gg 1$ 时 $2g\Lambda \gg \Lambda$ (格点截断) 这就是夸克禁闭。

在强作用下把梯度项作为微扰来处理已由 Drell 等人进行了。由 (4.20) 式容易

看出：梯度项的作用就是把费米子或反费米子由一个格点移到另一个格点，并且对于 $Q=0$ 的， $n_b(j) = n_a(j)$ 的低能态，梯度项没有一级能量修正。梯度项二级效应相当把一对费米子对由共同的一个格点移到另外一个共同的格点，或者把一个费米子（或者反费米子）由一个格点移到另外一格点再移回来。

如果限取格点的两个最低的能态：格点是空的（自旋向下）或者由一对费米子占据（自旋向上），那末我们就可以用自旋的形式来表示这个体系。实际考虑梯度项的二级修正，可得到，在 $1/g^2$ 的数量级上，和Heisenberg的反铁磁链体系一样的有效哈氏量。这样体系对于有奇数个 $(2N+1)$ 个格点的链，有双重简并的基态，相应于奇数格点的自旋向上或自旋向下。并且对于无限长的链，有低激发的自旋波谱，与 k 有线型关系，而无质量间隙。

我们的兴趣主要还在于中间耦合的区域，在这里Thirring模型由自由费米“相”过渡到无单费米子传播的“相”。我们要求检验一下用我们上述的截断的方法是否也能像连续理论那样得到这种“相变”的过渡。虽然在每个格点上对于费米子和反费米子都有两个本征态，而且梯度项需要 δ' （联系了远距的格点）来表示。可是(4.5)式的Ising和(4.20)式的Thirring模型还是很相似的，因此可以想像采取上叙的格点块扩大的程序，能够得到预计“相变”过程。实际上这种方法表明存在一个临界的耦合常数 $g_{cr} \approx 1.1$ ，当 $g > g_c$ 时我们就趋向强作用极限，当 $g < g_c$ 时我们趋向于弱作用近似。

总之用上述截断的程序可以得到和连续理论相一致的结论，即存在一个有限的临界的 g_{OR} ，当 $g < g_{OR}$ 没有质量间隙，当 $g > g_{OR}$ 格点截断理论不能用通常的方式来进行乘积性(multiplicative)的重正化，不过点阵理论依然存在，并且趋向于强作用极限。这时它就相应于Heisenberg的反铁磁体的链（只有近邻相互作用）。激发单位“荷”所需要的能量高到 $\sim gA$ 。这个结果表明对于参量 g 在某一区域时，在点阵有限截断理论中，粒子和低激发能谱，并不是简单地和原始的拉氏量和哈氏量的基本量相关联着。

前面我们已介绍过，在处理强作用时，需要使力学量的自由度成为（无限）可数的，同时在强耦合微扰中的非微扰状态的波函数，可以局部化（ δ 函数的形式），因此在处理强耦合理论时，引进时空点阵是很自然的。不过点阵规范模型，正在发展阶段，不仅在理论上未尽完善。有些论点也还不一定保证正确，在实际上所能解决的问题也不够多。可是根据初步计算看来，例如W. Basdseen和R. B. Pearson⁽⁴⁾以及Kogut和Suskind⁽⁵⁾他们提出粒子点阵理论，其中有2维或1维，是连续的，具体计算可以得到领头Regge轨迹，以及低能量的强子质量谱，沿着点阵规范这方向考虑，还是可取的。当然我们还必须要克服很多困难，解决不少问题。例如相对论协变性的恢复的问题，建立描述过强耦合的场论的问题，进一步了解点阵模型和其他模型的关系问题，提供具体问题的计算方法问题，以及规范场本身尚需研究的，像规范对称的真空性质问题等都需要我们进一步深入研究。

参 考 文 献

- [1] S. D. Drell, et al., *Phys. Rev.*, D14 (1976), 487, 1627.
- [2] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, D9 (1974), 3501.
 K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 2445.
 R. Balian, J. Drouffe, and C. Itzykson, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 3376; *Phys. Rev.*, D11 (1975), 2098, 2104.
 K. G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Reports*, 12C (1974), 75.
 K. G. Wilson, *Phys. Reports*, 23C (1976), 331.
 J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, D10 (1974), 732; *Phys. Rev.*, D11 (1975), 395; *Phys. Reports*, 23C, (1976) 348.
- [3] S. D. Drell, SLAC Pub-2020 (1977).
 Leo. P. Kadanoff, *Rev. Mod. Phys.*, 49 (1977), 2, 267.
- [4] W. Bardeen and R. B. Pearson, Fermilab Preprint 76/24-THY(1976).
- [5] J. Kogut and L. Suskind, *Phy. Rev.*, D11 (1975), 395.

学术动态

引力理论及相对论天体物理讨论会在广州举行

中国科学院委托中山大学主办的“引力理论及相对论天体物理讨论会”于一九七八年十一月二十日至十二月五日在广州举行,这是建国以来有关相对论问题的第一次全国性会议,参加会议的有科学院有关研究所、天文台以及有关高等院校共三十五个单位,正式代表九十七人,列席代表二十六人。

周培源副院长主持会议并作了报告。

讨论会对引力规范理论、引力波探测、时空大尺度结构、黑洞与宇宙学、孤立波理论、引力场量子化和重正化、超对称性及超重力等进行了专题报告与讨论。在会议期间就引力波探测问题进行了多次座谈,并分组就今后如何开展引力理论、相对论天体物理、引力理论的实验验证等进行了讨论。讨论会上提出的报告、论文、资料共四十多篇。

会议的报告反映了我国近几年来在相对论与引力的理论及实验研究方面所取得的进展。

引力和相对论天体物理的理论和实验研究工作近年来在国际上有很大的发展,引起了广泛的重视,广义相对论对当代理论物理及天体物理发展的作用越来越明显。广义相对论与量子理论的结合,关于引力与其他基本相互作用的内在联系的研究,引力波与其他引力实验的研究等等正酝酿着新的飞跃。与会代表认为这种形势应引起国内物理学和天文学界的足够重视。