

解KdV方程的微分几何方法*

卢文 (中山大学) **姚起元** (华南工学院) 区智 (中山大学) 何少辉 陶福臻 (暨南大学) 何志强

一 引言

本文用与[1]不同的微分几何方法来研究Korteweg-de Vries方程

$$u_t + u_{xxx} + 12uu_x = 0 \quad (1)$$

的求解问题, 并得到一个Bäcklund变换, 通过它, 可以从(1)的一个解求得(1)的另一个解。

非线性偏微分方程(1)中的常系数“12”仅为讨论的方便而设。通过简单的变换, 它可以变为别的常数。

二 KdV方程变为等价的外微分形式方程组

在KdV方程(1)中, x, t 是自变量, u 是 x, t 的未知函数, 若引进新的变量 z, p . 记

$$z = u_x, \quad p = z_x = u_{xx}, \quad (2)$$

则方程(1)可写成

$$u_t + p_x + 12zu = 0. \quad (3)$$

如果我们将(2)和(3)式看成以 x, t 为自变量, u, z, p 为未知函数的方程组——一阶偏微分方程组, 则它与(1)等价。

我们建立一个五维流形 M , 其坐标为 (x, t, u, z, p) , 在此流形中, 一次微分形式空间 T_p^* 的基为 dx, dt, du, dz, dp . 我们在 M 上引进一组二次微分形式。令

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= du \wedge dt - z dx \wedge dt, \\ a_2 &= dz \wedge dt - p dx \wedge dt, \\ a_3 &= -du \wedge dt + dp \wedge dt + 12uz dx \wedge dt, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 d 表外微分, \wedge 表外积, a_1, a_2, a_3 是三个 $(0, 2)$ 型反对称张量。

注意到在 M 中的二维子流形

$$S_2 = \{x, t, u(x, t), z(x, t), p(x, t)\} \quad (5)$$

* 1979年1月8日来稿。本文作者都是中山大学引力物理研究室成员。

上有

$$\left. \begin{aligned} du &= u_x dx + u_t dt, \\ dz &= z_x dx + z_t dt, \\ dp &= p_x dx + p_t dt. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将(6)代入(5)得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (u_x - z) dx \wedge dt, \\ \alpha_2 &= (z_x - p) dx \wedge dt, \\ \alpha_3 &= (u_t + p_x + 12uz) dx \wedge dt. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

显然, 方程组(2)和(3)的解, 一定是方程组,

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \quad (8)$$

的解。但二次微分形式方程组(8)必须满足附加的可积性条件,

$$d\alpha_i = \eta_i^j \wedge \alpha_j, \quad (9)$$

才能保证(8)有解。其中 η_i^j 是 \mathbf{M} 上的一次微分形式; 并且以后约定 $i, j = 1, 2, 3$ 。条件(9)称为闭理想条件, 由(4)可得

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_1 &= -dz \wedge dx \wedge dt = dx \wedge \alpha_2, \\ d\alpha_2 &= -dp \wedge dx \wedge dt = dx \wedge \alpha_3, \\ d\alpha_3 &= -12dx \wedge (z\alpha_1 + u\alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

即(9)中的 η_i^j 取值为

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^1 &= \eta_1^3 = \eta_2^1 = \eta_2^2 = \eta_3^3 = 0, \\ \eta_1^2 &= \eta_2^3 = dx, \\ \eta_3^1 &= -12zdx, \\ \eta_3^2 &= -12udx, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

的情形, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 满足闭理想条件, 以下我们以 $\{\alpha_i\}$ 表示 α_i 在 \mathbf{M} 上所生成的闭理想。这样一来, 将解方程组(2)(3)的问题, 归结为在流形 \mathbf{M} 上求方程组(4), (8)的解与子流形 \mathbf{S}_2 的交, 即得方程组(2), (3)的解 $u(x, t)$ 。

三 外微分形式方程组的积分问题

现在, KdV 方程的求解问题已归结为探求方程组

$$\alpha_i = 0, \quad (12)$$

解的存在性问题, 即外微分形式方程组的积分问题。在这里, 我们直接引用〔2〕中的结果。为此, 设想在闭理想 $\{\alpha_i\}$ 中, 可找到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 使得

$$\beta_i = f_j^i \alpha_i, \quad (\text{其中 } \|f_j^i\| \neq 0) \quad (13)$$

满足恰当条件, 即

$$d\beta_i = 0, \quad (14)$$

则根据Poincaré引理, 在流形M上的P点的一个同伦于零的拓扑结构的邻域上, 一定存在一次微分形式 ω_j , 使得

$$\beta_i = d\omega_j. \quad (15)$$

因此求解方程组(12)的问题变成求解方程组 $d\omega_j = 0$ 的问题, 在这条件下再次应用Poincaré引理, 得知一定存在一个函数 (零次微分形式) y_i , 使得

$$\omega_j = dy_i \quad (16)$$

于是KdV方程的求解问题, 就变成在流形M上求函数 y_i 的问题。

四 β_i 的求法

我们要指出, 由 α_i 满足闭理想条件很容易推知 β_i 也满足闭理想条件。只须对(13)式两边求外微分, 并由(9)即有

$$\begin{aligned} d\beta_i &= df_j^i \wedge \alpha_i + f_j^i \wedge d\alpha_i \\ &= (df_j^k + f_j^i \eta_j^k) \wedge \alpha_k. \end{aligned} \quad (17)$$

由(11)和(4)代入(17)并由(14)得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_j^3}{\partial z} - \frac{\partial f_j^3}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial f_j^1}{\partial z} - \frac{\partial f_j^2}{\partial u} &= \frac{\partial f_j^1}{\partial p} - \frac{\partial f_j^3}{\partial u} = \frac{\partial f_j^2}{\partial p} - \frac{\partial f_j^3}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f_j^1}{\partial x} + z \frac{\partial f_j^1}{\partial u} + p \frac{\partial f_j^2}{\partial u} + \frac{\partial f_j^3}{\partial t} - 12uz \frac{\partial f_j^3}{\partial u} - 12z f_j^3 &= 0, \\ z \frac{\partial f_j^1}{\partial z} + \frac{\partial f_j^2}{\partial x} + p \frac{\partial f_j^2}{\partial z} - 12uz \frac{\partial f_j^3}{\partial z} + f_j^1 - 12u f_j^3 &= 0, \\ z \frac{\partial f_j^1}{\partial p} + p \frac{\partial f_j^2}{\partial p} + \frac{\partial f_j^3}{\partial x} - 12uz \frac{\partial f_j^3}{\partial p} + f_j^2 &= 0. \end{aligned} \right\} (18)$$

我们在 C^∞ 类函数族中求方程组(18)的解, 经过繁复的计算后, 得到

$$\left. \begin{aligned} f_j^1 &= -12C_i t p + E_i p - 144C_i u^2 t + 12E_i u^2 + 12C_i u x + 12D_i u, \\ f_j^2 &= -C_i + 12C_i t z - E_i z, \\ f_j^3 &= -12C_i t u + E_i u + C_i x + D_i, \end{aligned} \right\} (19)$$

其中 C_i, D_i, E_i 为与 x, t, u, z, p 无关的常量。将(19)和(4)代入(13), 得

$$\begin{aligned} \beta_j &= f_j^1 du \Delta dt + f_j^2 dz \Delta dt + f_j^3 dp \Delta dt - f_j^4 du \Delta dx + C_j p dx \Delta dt \\ &= \beta_j^1 + \beta_j^2 + \beta_j^3 + \beta_j^4 + \beta_j^5. \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \beta_j^1 &= (-12C_i t p + E_i p - 144C_i u^2 t + 12E_i u^2 + 12C_i u x \\ &\quad + 12D_i u) du \Delta dt, \\ \beta_j^2 &= (-C_i + 12C_i t z - E_i z) dz \Delta dt, \\ \beta_j^3 &= (-12C_i t u + E_i u + C_i x + D_i) dp \Delta dt, \\ \beta_j^4 &= (12C_i t u - E_i u - C_i x - D_i) du \Delta dx, \\ \beta_j^5 &= C_i p dx \Delta dt. \end{aligned} \right\} (21)$$

注意在流形 M 的坐标 x, t, u, z, p 及积分变量的右上角的数字均表示幂的指数, 而其它符号中右上角的数字均是上指标。

这样, 当且仅当 β_j 满足(21)时, 就有

$$d\beta_j = 0. \quad (14)$$

五 应用Poincaré引理对方程 $\beta_j = d\omega_j$ 进行积分

我们在前面给出的流形 M 是一个以 x, t, u, z, p 为坐标的五维欧氏空间 E^5 , 它当然满足同伦于零这一个几何要求, 设 I 为 R^1 上的闭区间 $[0, 1]$ 其坐标为 T , 即 $0 \leq T \leq 1$ 。又设 $I \times M$ 为 I 与 M 的直积空间。我们建立一个将 $I \times M$ 映入 M 的映射 ϕ

$$\left. \begin{aligned} \phi: I \times M &\longrightarrow M \\ (x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T) &\longmapsto (x, t, u, z, p) \end{aligned} \right\} (22)$$

它满足Poincaré引理中映射所必须满足的两个条件:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, t, u, z, p, 1) &= (x, t, u, z, p) \\ \phi(x, t, u, z, p, 0) &= (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

再建立一个积分算子的线性映射 K ,

$$\left. \begin{aligned} K: \mathbf{F}^2(1 \times \mathbf{M}) &\longrightarrow \mathbf{F}^1(\mathbf{M}) \\ \alpha &\longmapsto \beta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

它将 $1 \times \mathbf{M}$ 上的 2 次微分形式空间 \mathbf{F}^2 映入 \mathbf{M} 上的 1 次微分形式空间 \mathbf{F}^1 , 当

$$\alpha = a(x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T) d\sigma^H \quad (25)$$

其中 $a(x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T)$ 为流形 $1 \times \mathbf{M}$ 的坐标 $x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T$ 的函数, $d\sigma^H$ 为由 $dx^1, dt^1, du^1, dz^1, dp^1$ 中任两个作外积的二次微分形式, 规定

$$\beta = \kappa(\alpha) = 0. \quad (26)$$

当

$$\alpha = b(x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T) dT \wedge d\sigma^J \quad (27)$$

其中 $b(x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T)$ 为流形 $1 \times \mathbf{M}$ 的坐标 $x^1, t^1, u^1, z^1, p^1, T$ 的函数, $d\sigma^J$ 为由 $dx^1, dt^1, du^1, dz^1, dp^1$ 中的任一个一次微分形式, 规定

$$\beta = \kappa(\alpha) = \left(\int_0^1 b(x, t, u, z, p, T) dT \right) d\sigma^J \quad (28)$$

Poincaré 引理指出, 满足方程 $\beta_i = d\omega_i$ 的 ω_i 为

$$\omega_i = \kappa(\phi^* \beta_i) \quad (29)$$

其中, ϕ^* 也是一个线性映射, 据 (20) 式, 有

$$\omega_i = \kappa(\phi^* \beta_j^1) + \kappa(\phi^* \beta_j^2) + \kappa(\phi^* \beta_j^3) + \kappa(\phi^* \beta_j^4) + \kappa(\phi^* \beta_j^5) \quad (30)$$

分别用 ϕ^* 作用于 (21) 并代入 (28), 由 (30) 有

$$\begin{aligned} \omega_i = \kappa & \left(-3C_i t p + \frac{1}{3} E_j p - \frac{144}{5} C_i u^2 t + 3E_j u^2 + 3C_i u x + 4D_i u \right) \\ & \times (u dt - t du) + \left(-\frac{1}{2} C_i + 3C_i t z - \frac{1}{3} E_j \right) (z dt - t dz) \\ & + \left(-3C_i t u + \frac{1}{3} E_j u + \frac{1}{3} C_i x + \frac{1}{2} D_i \right) (p dt - t dp) \\ & + \left(3C_i t u - \frac{1}{3} E_j u - \frac{1}{3} C_i x - \frac{1}{2} D_i \right) (u dx - x du) \\ & + \frac{1}{3} C_i p (x dt - t dx). \end{aligned} \quad (31)$$

如果我们选择一组 C_i, D_i, E_i 的值, 使得

$$|f_j^i| \neq 0, \quad (32)$$

则方程组(8)等价于

$$d\omega_i = 0. \quad (33)$$

设

$$u = u(x, t), \quad z = z(x, t), \quad p = p(x, t), \quad (34)$$

为方程组(8)局限于二维子流形(5)上的一组解,因而也是方程组(2)与(3)的解。若将(34)代入(31)中,于是 ω_i 就是子流形 S_2 中的一组一次微分式,它满足(33)式。再应用一次Poincaré引理,就可以求得积分 W_j 。它满足方程

$$\omega_i = dW_j, \quad (35)$$

其中 W_j 为 x, t 的函数,即零次微分形式。

众所周知,在满(14)条件下求(15)的积分,所得到的解并不唯一。设 ω_j 是(15)的一个解,则对流形 M 上的任意 C^∞ 类函数 g ,一次微分形式 ω'_j

$$\omega'_j = \omega_j + dg \quad (36)$$

也一定是方程(15)的解,而且它就是方程组(15)的通解。

下面我们探讨(15)在流形 M 上是否存在形式为

$$\omega = Fdx + Gdt, \quad (37)$$

的解

对(37)两边求外微分,由(13)和(15),有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -f^3, \\ \frac{\partial G}{\partial u} = f^1, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = f^2, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = f^3 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

由(38)解得

$$\left. \begin{aligned} F &= -Du - Cxu - \frac{1}{2}Eu^2 + 6Ctu^2 + F_1(x, t), \\ G &= Epu - 12tpu - 48Cu^3t + 4Eu^3 + 6Cu^2t \\ &\quad + 6Du^2 + 6Ctz^2 - \frac{1}{2}Ez - Cz + Dp + Cxp + G_1(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中, $F_1(x, t)$, $G_1(x, t)$ 满足关系

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

因此,存在一个依赖于 x, t 的函数 g^1 ,使得

$$dg^1 = F_1(x, t) dx + G_1(x, t) dt.$$

这里不仅证明方程式(15)在整个流形M上存在(37)形式的解,而且具体地给出F与G的函数关系式,如果令常数C,D,E分别取不同的值,则可以得到一组满足(32)的 ω_i :

(1) 令

$$\left. \begin{aligned} F_1 \equiv G_1 &\equiv 0, \\ C = E &= 0, \\ D &= -1, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

得

$$f^1 = -12u, \quad f^2 = 0, \quad f^3 = -1. \quad (41)$$

并分别以 f_1^1, f_2^1, f_3^1 表示之,以 ω_1 表示相应的 ω

$$\omega_1 = u dx - (p + 6u^2) dt. \quad (42)$$

(2) 令

$$\left. \begin{aligned} F_1 \equiv G_1 &\equiv 0, \\ C = D &= 0, \\ E &= -2, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

得

$$\left. \begin{aligned} f^1 &= -2p - 24u^2, \\ f^2 &= 2z, \\ f^3 &= -2u, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

并分别以 f_2^1, f_2^2, f_2^3 表示之,以 ω_2 表相应的 ω ,得

$$\omega_2 = u^2 dx + (z - 8u^3 - 2pu) dt. \quad (45)$$

(3) 令

$$\left. \begin{aligned} F_1 \equiv G_1 &\equiv 0, \\ D = E &= 0, \\ C &= \frac{1}{12}, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} f^1 &= -tp - 12u^2t + ux, \\ f^2 &= zt - \frac{1}{12}, \\ f^3 &= -tu + \frac{1}{12}x, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

并分别以 f_3^1, f_3^2, f_3^3 表示之, ω_3 表示相应的 ω ,得

$$\omega_3 = \left(-\frac{1}{12}ux + \frac{1}{2}tu^2 \right) dx$$

$$+\left(\frac{1}{12}xp - \frac{1}{12}z + \frac{1}{2}tz^2 + \frac{1}{2}u^2x - 4u^3t - tpu\right)dt. \quad (48)$$

计算行列式 $|f_i^j|$, 得

$$|f_i^j| = \begin{vmatrix} -12u & 0 & 1 \\ -2p - 24u^2 & 2z & -2u \\ -tp - 12u^2t + ux & zt - \frac{1}{12} & \frac{1}{12}x - tu \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}p \quad (49)$$

当 $p \neq 0$ 时, $|f_i^j| \neq 0$, 在这条件下方程组(8)等价于方程组

$$d\omega_i = 0, \quad (50)$$

这里 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别由(42), (45), (48)表达

综合上面所述, Poincaré' 引理指出, 对同一个微分形式 β , 满足

$$\beta = d\omega_A, \text{ 和 } \beta = d\omega_B \quad (51)$$

允许且仅允许差一个流形 M 上的函数 h 的微分, 即

$$\omega_A - \omega_B = dh. \quad (52)$$

如果我们引入流形 M 上新的二次微分形式 ω'' ,

令

$$\omega'' = \omega_A + d(-\omega_B - h) = \omega_A + dy, \quad (53)$$

若以(37)式表示 ω_A 于是(52)可写成

$$\omega'' = Fdx + Gdt + dy. \quad (54)$$

显然, ω'' 满足

$$d\omega'' = f^i \alpha_i, \quad (55)$$

而且当将 ω'' 局限于 M 的二维子流形 S_2 时, 由(52)与(53)得

$$\omega'' = 0 \quad (56)$$

这样一来, 求(4), (8)的解的问题, 引导到求满足方程

$$\omega = 0 \quad (57)$$

的解, 其中

$$\omega = Fdx + Gdt + dy, \quad (58)$$

并且满足

$$d\omega = f^i \alpha_i. \quad (59)$$

而 F, G, y 为流形 M 上的函数的问题, 于是提出一个在考虑扩大理想并使之成为闭的情况下研究方程的求解问题。

六 闭理想的外延拓

设流形N为流形M与流形Y的乘积流形,

$$N = M \times Y, \tag{60}$$

其中

$$Y = \{y\} \tag{61}$$

是一个实的一维欧氏空间 R^1 , 于是流形N的坐标为 x, t, u, z, p, y . 在N上定义一次微分式 ω

$$\omega = Fdx + Gdt + dy \tag{62}$$

假设 F, G 是 u, z, p, y 的函数. 将(62)的 ω 与(4)的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成一个新理想 $\{\alpha_j, \omega\}$, 为了满足闭理想条件, 除了 $d\alpha_i$ 所满足的关系式(10)之外, 还必须加上一个新关系式:

$$d\omega = f^i \alpha_i + \eta \Lambda \omega. \tag{63}$$

我们仍约定 $i, j = 1, 2, 3$. 其中 f^i 已是六维流形N中六个坐标的函数.

下面我们先通过闭理想条件(63)去确定函数 F 与 G , 并求出 ω , 然后将(8)放到新的闭理想 $\{\alpha_i, \omega\}$ 中去研究.

将(63)两边对 ω 求外积, 得

$$d\omega \wedge \omega = f^i \alpha_i \wedge \omega. \tag{64}$$

将(4), (63)代入(64), 然后按N中 $A^2 T_p^*$ 的基展开, 令基的各项系数相等, 得一组偏微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= -f^3, & \frac{\partial F}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= f^1, & \frac{\partial G}{\partial z} &= f^2, & \frac{\partial G}{\partial p} &= f^3, \\ -G \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial G}{\partial u} &= f^1 F + f^3 G, \\ G \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial G}{\partial y} &= -z f^1 - p f^2 + 12uz f^3 \end{aligned} \right\} \tag{65}$$

消去 f^i , 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial p} &= 0, \\ G \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial G}{\partial y} - 12uz \frac{\partial G}{\partial p} + p \frac{\partial G}{\partial z} + z \frac{\partial G}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

解得

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1(y)u^2 + F_2(y)u + F_3(y), \\ G &= -p(2F_1(y)u + F_2(y)) + F_1(y)z^2 + \left[F_2(y)\frac{dF_3(y)}{dy} - \right. \\ &\quad \left. - F_3(y)\frac{dF_2(y)}{dy} \right]z + G_5(u, y), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

其中 F_1, F_2, F_3 为 y 的待定函数, G_5 为 u, y 的待定函数, 而且 F_i 必须满足下列关系

$$\left. \begin{aligned} F_1 \frac{dF_2}{dy} - F_2 \frac{dF_1}{dy} &= 0, \\ F_3 \frac{dF_1}{dy} - F_1 \frac{dF_3}{dy} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

以下用 F_{ij} 表示 $\frac{dF_j}{dy}$, 显然 $F_1 = 0$ (68) 必满足. 此时, 若只考虑 $F_1 \equiv 0$ 情形下的解, 有

$$\left. \begin{aligned} F &= F_2u + F_3 \\ G &= -pF_2 + (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})z + G_5(u, y) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

由(66), 并注意到有 $\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} = 0$ 和 $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ 等关系, 可得

$$\begin{aligned} G_5(u, y) &= -6u^2F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})u^2 \\ &\quad + (F_3G_{4y} - G_4F_{3y})u + F_4(y) \end{aligned} \quad (70)$$

其中 $G_4 = F_2F_{3y} - F_3F_{2y}$. 此时(69)化为

$$\left. \begin{aligned} F &= F_2u + F_3 \\ G &= -pF_2 + (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})z - 6u^2F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})u^2 \\ &\quad + (F_3G_{4y} - G_4F_{3y})u + F_4 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

(71)是(66)在 $F_1 = 0$ 条件下的直接结果, 反过来, 研究在 $F_1 = 0$ 的条件下, (71)中的各个待定函数 F_2, F_3, F_4, G_4 要加什么限制, 才能保证满足(66), 显然(66)的前三式必然满足把(71)代入第四式, 然后按 u 展开, 得

$$\begin{aligned} &\left\{ [-6F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})]F_{2y} - F_2 \frac{d}{dy} [-6F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})] \right\} u^3 \\ &+ \left\{ [-6F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})]F_{3y} - F_3 \frac{d}{dy} \right. \\ &\quad \times [-6F_2 + \frac{1}{2}(F_2G_{4y} - G_4F_{2y})] + (F_3G_{4y} - G_4F_{3y})F_{2y} \\ &\quad \left. - F_2 \frac{d}{dy} (F_3G_{4y} - G_4F_{3y}) \right\} u^2 + \left\{ (F_3G_{4y} - G_4F_{3y})F_{3y} \right. \\ &\quad \left. - F_3 \frac{d}{dy} (F_3G_{4y} - G_4F_{3y}) + [-z(G_4F_{2y} - F_2G_{4y})] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ [-pF_2 + (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})z + F_4]F_{2y} - F_2 \frac{d}{dy} [-pF_2 \\
 &+ (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})z + F_4] \} u + \{ [-p_2F_2 + (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})Z + F_4]F_{2y} \\
 &- F_3 \frac{d}{dy} [-PF_2 + (F_2F_{3y} - F_3F_{2y})z + F_4] - z(G_4F_{3y} - F_3G_{4y}) \\
 &+ p(F_2F_{3y} - F_3F_{2y}) \} = 0 \tag{72}
 \end{aligned}$$

只有令 u 的三次多项式各项系数为零, (66) 才能成立, 为了使这四个方程描述简单, 并用李代数的一些基本性质去解方程, 在 \mathbf{M} 流形上引入几个切矢量, 令

$$\mathbf{F}_k = F_k(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{G}_k = G_k(y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{73}$$

并记李导数为

$$L_{F_1} \mathbf{F}_2 = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = [F_1F_{2y} - F_2F_{1y}] \frac{\partial}{\partial y} \tag{74}$$

其中 $[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2]$ 称为换位子。于是(72)导出的四个方程可写成

$$\left. \begin{aligned}
 &[[\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_4], \mathbf{F}_2] = 0, \\
 &\frac{1}{2} [[\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_4], \mathbf{F}_3] - 6\mathbf{G}_4 + [[\mathbf{F}_3, \mathbf{G}_4], \mathbf{F}_2] = 0, \\
 &[[\mathbf{F}_3, \mathbf{G}_4], \mathbf{F}_3] + [\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_2] = 0, \\
 &[\mathbf{F}_4, \mathbf{F}_3] = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{75}$$

(75)中四个方程是在 $F_1 = 0$ 的条件下(66)成立的充分必要条件。

只考虑 $F_3 \neq 0$ 情形的解

解(75)得

$$\left. \begin{aligned}
 &F_2 = 2, \\
 &F_3 = y^2 - \lambda, \\
 &F_4 = -4\lambda y + 4\lambda^2, \\
 &G_4 = 4y.
 \end{aligned} \right\} \tag{76}$$

代入(71)得

$$\left. \begin{aligned}
 &F = 2u + y^2 - \lambda, \\
 &G = -4[(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda) + \frac{1}{2}p - zy]
 \end{aligned} \right\} \tag{77}$$

再把(77)代入(62)得

$$\omega = (2u + y^2 - \lambda)dx - 4[(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda) + \frac{1}{2}p - zy]dt + dy \tag{78}$$

因此, (78)及由(65)所得的 f^1, f^2, f^3 满足(64), 而(64)保证了(63)成立。所以由(4)表达的 α_i 与(78)表达的 ω 构成一个闭理想 $\{\alpha_i, \omega\}$ 。我们称 $\{\alpha_i, \omega\}$ 为由闭理想 $\{\alpha_i\}$ 外延拓得到的新的闭理想。 $\{\alpha_i\}$ 是 $\{\alpha_i, \omega\}$ 的一个子环。

七 KdV方程的 Bäcklund变换

最后,我们应用在流形 N 中闭理想 $\{\alpha_i, \omega\}$ 的性质推导出KdV方程的Bäcklund变换,应用这个变换,可以由KdV方程的任一解求得该方程的另一个解。

设 $u(x, t)$ 是(1)的一个解。在第二节中指出,如果把它和(2)(3)代入(7)。得

$$\alpha_i = 0. \quad (8)$$

如果我们将(78)式中的 y 看成 x, t 的函数,

$$y = y(x, t), \quad (79)$$

(78)可写成

$$\begin{aligned} \omega = & [y_x + (2u + y^2 - \lambda)]dx + \{y_t - 4[(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda)] \\ & + \frac{1}{2}p - zy\}dt \} \end{aligned} \quad (80)$$

如果能从方程组

$$\left. \begin{aligned} y_x &= -(2u + y^2 - \lambda), \\ y_t &= 4[(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda) + \frac{1}{2}p - zy], \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

中解出 $y(x, t)$ 。就得

$$\omega = 0, \quad (82)$$

设 u^*, z^*, p^* 为在流形 N 上定义的仅依赖于变量 u, z, p, y 的 C^∞ 类函数。

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(u, z, p, y), \\ z^* &= z^*(u, z, p, y), \\ p^* &= p^*(u, z, p, y). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

将(83)中的 u^*, z^*, p^* 代替(4)中的 u, z, p ,得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^* &= du^* \Lambda dt - z^* dx \Lambda dt, \\ \alpha_2^* &= dz^* \Lambda dt - p^* dx \Lambda dt, \\ \alpha_3^* &= -du^* \Lambda dt + dp^* \Lambda dt + 12u^* z^* dx dt, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

我们取函数 u^*, z^*, p^* 使 α_i^* 属于流形 N 上的闭理想 $\{\alpha_i, \omega\}$;

$$\alpha_i^* \in \{\alpha_i, \omega\} \quad (85)$$

由闭理想定义,存在在流形 N 上定义的函数 h_i^j 及一次微分式 η ,使得

$$\alpha_i^* = h_i^j \alpha_j + \eta \Lambda \omega. \tag{86}$$

将(86)两边外乘 ω ,得

$$\alpha_i^* \Lambda \omega = h_i^j \alpha_j \Lambda \omega. \tag{87}$$

注意到 α_i 在流形 N 上与在 M 上的表达式相同,故由(4)(83)(84),并在 N 上 P 点的三次微分形式空间 $\Lambda^3 T_p^*$ 的基展开,然后对该基向量在式两边比较系数,并消去 h_i^j 后,可得

$$\left. \begin{aligned} u_z^* &= u_p^* = z_p^* = 0, \\ z^* &= z u_u^* - F u_y^*, \\ p^* &= z z_u^* + p z_z^* - F z_y^*, \\ G u_y^* + p_y^* - 12u^* z^* &= z p_u^* + p p_z^* - 12uz P_p^*, \end{aligned} \right\} \tag{88}$$

其中 F, G 由(77)给出,注意到 F, u^* 及其各阶偏导数均不依赖于 z 和 p .(88)可化为

$$\left. \begin{aligned} u_{uu}^* &= u_{uy}^* = 0, \\ 2(u - u^*) u_u^* - F u_{yy}^* &= 0, \\ F^3 u_{yyy}^* + 6y F^2 u_{yy}^* + 12 F u_y^* u_y^* - 4(u + \lambda)(2u + y^2 - \lambda) u_y^* &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{89}$$

解(89)得

$$u^* = au + \frac{1}{2} a(1-a)y^2 + by + c \tag{90}$$

其中 a, b, c 为使

$$a(1-a^2)y^2 + 2aby + a[2c - (1-a)\lambda] = 0 \tag{91}$$

成立的任意常数.得下列三组解

$$(1) \quad a = 0, \quad b, c \text{ 为任意常数. 有} \tag{92}$$

$$u^* = by + c;$$

$$(2) \quad a = 1, \quad b = c = 0; \text{ 有} \tag{93}$$

$$u^* = u;$$

$$(3) \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = \lambda, \text{ 有} \tag{94}$$

$$u^* = -u - y^2 + \lambda.$$

再把(92)代入(89)中我们发现,要使对所有的 u, y 值恒成立,其充要条件是所有各

次幂的系数为零, 即 $b=c=0$. 所以如果想获得方程式的非零新解只有第三种情形有意义。

我们把

$$u^* = -u(x,t) - y^2 + \lambda \quad (94)$$

称为 KdV 方程的 Bäcklund 变换, 其中 y 为

$$\left. \begin{aligned} y_x &= -(2u(x,t) + y^2 - \lambda), \\ y_t &= 4 \left\{ [u(x,t) + \lambda][2u(x,t) + y^2 - \lambda] + \frac{1}{2}p(x,t) \right. \\ &\quad \left. - z(x,t)y, \right\} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

的解, 闭理想条件(9)与(63)保证了方程(81)是相容的。若已知(1)的一个解 $u(x,t)$, 由(94)就可得出 KdV 方程的另一个解 $u^*(x,t)$ 。

若对(81)式第一式作变换

$$y = \frac{1}{\phi} \phi_x, \quad (95)$$

得

$$\phi_{xx} + (2u - \lambda)\phi = 0. \quad (96)$$

这就是对新的函数 ϕ 的 Schrödinger 方程, 而常数 λ 为其特征值。所以求 Bäcklund 变换的问题归结为解线性 Schrödinger 方程问题。

我们举一个应用 Bäcklund 变换的例子,

设

$$u \equiv 0. \quad (97)$$

这一函数显然是 KdV 方程(1)的解, 将(97)代入(81)得

$$\left. \begin{aligned} y_x &= -(y^2 - \lambda), \\ y_t &= 4\lambda(y^2 - \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

消去 y 并化成

$$y_{tt} - (4\lambda)^2 y_{xx} = 0. \quad (99)$$

解得

$$y = \phi(x - 4\lambda t), \quad (100)$$

其中 ϕ 为 $(x - 4\lambda t)$ 的函数, 令

$$S = x - 4\lambda t, \quad (101)$$

于是(100)变为

$$y = \phi(S) \quad (102)$$

将(102)代入(98)的第一式, 得

$$\phi_s(S) = -[\phi^2(S) - \lambda]. \quad (103)$$

积分得

$$\phi(S) = \sqrt{\lambda} \tanh[\sqrt{\lambda}(S - S_0)], \quad (104)$$

其中 S_0 为 $t=0$ 时 X 的值 X_0 .

$$S_0 = X_0. \quad (105)$$

将(104)代入(100), 并考虑(101)(105), 得

$$y = \sqrt{\lambda} \tanh[\sqrt{\lambda}(x - x_0 - 4\lambda t)] \quad (106)$$

将(106)代入(94)得

$$u^* = \lambda \operatorname{sech}^2[\sqrt{\lambda}(x - x_0 - 4\lambda t)], \quad (107)$$

这就是 KdV 方程的 1-Soliton 解。

参 考 文 献

- [1] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, 16 (1975), 1, 1.

A Differential Geometrical Approach for the Solution of KdV Equations

Lu Wen (Loo Win) Yao Qiyuan Ou Zhi
He Shaohui Tao Puzhen He Zhiqiang

Abstract

Here the Korteweg-de Vries equation (1) will be dealt in an exterior differential forms way other than [1]. A Bäcklund Transform is thus induced and helps to obtain another solution form a solution of (1).