双曲型方程組的第二特征問題

吴兹潛　　林　伟
（计算机科学系）（数学力学系）

§1 问题的提出

作者在文[2,3]研究了二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性双曲方程组的第一和第三特征问题。本文研究第一、二类双曲方程组(H_1)、(H_2)[1]的第二特征问题。

所谓的第二特征问题是在方程组(H_1)的四条特征线中的三条上，在其中的二条上给u的函数值，在另一条上给定u和v的值；或者在一特征上给u和v的函数值，在另两特征上分别给u和v的函数值。本文考虑第二特征问题的解的唯一性。

§2 方程组(H_1)的第二特征问题（第一种情形）

这一节考虑方程组(H_1)在四条特征线中的三条给出u(或v)的函数值，并在其中的一条特征上同时给v的函数值，即

$$u|_{li}=\varphi_i,\ v|_{lj}=\phi_j,\ -\infty<x,y<+\infty \tag{*}$$

$i=1,2,3$，j是1，2，3中的某一数。如果导数$\varphi_i'(t)$、$\phi_j'(t)$在$t=0$的邻近存在连续，而且适合$O(|t|^{\mu-1})$的估计，$\mu\geqslant1$，称这一假设为条件(A)。关于这样的特征问题有廿四种，这里列出其中的十二种，而另十二种由u和v的互调而获得。这里只考虑表列的十二种，而后三种的解不存在。这一节只考虑序号1—9的情形。

从(H_1^*)出发，在特征线上u和v的齐次条件可以表示为

$$u|_{x=0}=f_2(y)+f_3(-ky)+f_4\left(-\frac{y}{k}\right)=0, \tag{2.1}$$

$$u|_{y=0}=f_2(0)+f_3(x)+f_4(x)=0, \tag{2.2}$$

$$u|_{y=kx}=f_2(kx)+f_3((1-k^2)x)+f_4(0)=0, \tag{2.3}$$

$$u|_{y=\frac{x}{k}}=f_2\left(\frac{x}{k}\right)+f_3(0)+f_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)=0, \tag{2.4}$$

$$v|_{x=0}=f_1(0)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(-ky)+\frac{k-2b_1}{2}f_4\left(-\frac{y}{k}\right)=0, \tag{2.5}$$

序号＼特征	x = 0	y = 0	y = kx	$y=\frac{x}{k}$
1	u = 0	u = 0, v = 0	u = 0	
2	u = 0	u = 0	u = 0, v = 0	
3	u = 0	u = 0, v = 0		u = 0
4	u = 0	u = 0		u = 0, v = 0
5	u = 0		u = 0, v = 0	u = 0
6	u = 0		u = 0	u = 0, v = 0
7		u = 0, v = 0	u = 0	u = 0
8		u = 0	u = 0, v = 0	u = 0
9		u = 0	u = 0	u = 0, v = 0
10	u = 0, v = 0	u = 0	u = 0	
11	u = 0, v = 0		u = 0	u = 0
12	u = 0, v = 0	u = 0		u = 0

$$v|_{y=0}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(x)+\frac{k-2b_1}{2}f_4(x)=0, \tag{2.6}$$

$$v|_{y=kx}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3((1-k^2)x)+\frac{k-2b_1}{2}f_4(0)=0, \tag{2.7}$$

$$v|_{y=\frac{x}{k}}=f_1(x)+\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}f_3(0)+\frac{k-2b_1}{2}f_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)=0, \tag{2.8}$$

定理1 假设方程组(H_1)的特征问题(＊)的解在域内属于C^1函数类，如果在特征上给出的函数适合条件(A)。对于序号1、2特征问题解的不唯一的充要条件是$\mu=1$，而且其齐次问题的不唯一解按序为

$$u=0,\ v=cb_1\left(\frac{1-k^2}{k}y\right); \tag{2.9}$$

$$u=0,\ v=cb_1(k^2-1)\left(x-\frac{y}{k}\right). \tag{2.10}$$

如果$\mu>1$，且它使实函数$t^\mu(-\infty<t<+\infty)$有定义，则序号1、2的问题解唯一。

证 序号1和2有共同的齐次条件(2.1)，(2.2)，(2.3)，从这三式子消去f_2，f_4得函数方程

$$F_4(t)-F_4(k^2t)+F_4((k^2-1)t)=0,$$
$$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0).$$

这是文〔3〕的引理1所列的函数方程。由引理1，当$\mu=1$时，

$$k^2-(k^2-1)=1,$$

当$\mu>1$时，

$$|k^{2\mu}+1-(k^2-1)^\mu|\leqslant k^{2\mu}+(1-k^2)^\mu<k^2+(1-k^2)=1,$$

由引理1得

$$f_4(t)=Ct^\mu+f_4(0),$$

$$C=\begin{cases}0, & 当\mu>1,\\ C, & 当\mu=0.\end{cases}$$

此外，还可以求得序号1和2各自的$f_i(t)(i=1,2,3)$，将各自的f_i分别代入（H_1^*），即得（2.9）和（2.10）。当$\mu=1$时，$c\neq0$，故（2.9）和（2.10）是序号1和2的齐次问题的不唯一解。当$\mu>1$时，$c=0$，故序号1、2的特征问题的解唯一。

此外还可以证明下列的定理：

定理2　假设方程组(H_1)的特征问题(*)的解在域内属于C^1函数类，如果在特征上给出的函数适合条件(A)。对于序号3、4的齐次特征问题解的不唯一的充要条件是$\mu=1$，而且其齐次问题不唯一解按序为

$$u=0,\quad v=cb_1\frac{1-k^2}{k}y; \tag{2.11}$$

$$u=0,\quad v=cb_1\left(1-\frac{1}{k^2}\right)(x-ky). \tag{2.12}$$

若$\mu>1$，且使实函数t^μ（$-\infty<t<+\infty$）有定义，则序号3、4的特征问题的解唯一。

定理3　假设方程组(H_1)的特征问题(*)的解在域内属于C^1函数类，如果在特征上给定的函数适合条件(A)，对于序号5、6的特征问题的解的不唯一的充要条件是$\mu=1$，而且其齐次问题的不唯一解按序为

$$u=0,\quad v=cb_1(k^2-1)\left(x-\frac{y}{k}\right); \tag{2.13}$$

$$u=0,\quad v=cb_1\left(1-\frac{1}{k^2}\right)(x-ky). \tag{2.14}$$

若$\mu>1$，且使实函数t^μ（$-\infty<t<+\infty$）有定义，则序号5、6的特征问题的解唯一。

定理4　假设方程组(H_1)的特征问题(*)的解在域内属于C^1函数类，而且在特征上给定的函数是奇函数，对于序号7、8、9的齐次特征问题的解是不唯一的，而且其不唯一解按序为

$$\begin{cases}u=C\left\{\bar r\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)-\bar r(x-ky)+\bar r\left(x-\frac{y}{k}\right)\right\},\\ v=C\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)(-\bar r(x)+\bar r(x-ky))\right.\\ \qquad\left.-\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\bar r(x)-\bar r\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)\right\};\end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{\bar{r}\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)-\bar{r}(x-ky)+\bar{r}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right\}, \\ v=C\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)\left(-\bar{r}((1-k^2)x)+\bar{r}(x-ky)\right)\right. \\ \left.\quad+\frac{1}{2}(k-2b_1)\bar{r}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right\}; \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{\bar{r}\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)-\bar{r}(x-ky)+\bar{r}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right\}, \\ v=C\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)\bar{r}(x-ky)-\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\bar{r}\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)\right.\right. \\ \left.\left.\quad-\bar{r}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)\right\}. \end{cases} \tag{2.17}$$

这里，$\bar{r}(x)$是奇函数，它属于C^1函数类。

证　从方程组(H_1)的序号７，８，９的齐次条件（2.2），（2.3），（2.4）消去f_2、f_3得函数方程

$$F_4(t)+F_4(-t)=0,$$
$$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0).$$

故任一属于C^1的奇函数适合函数方程，得

$$f_4(t)=c\bar{r}(t)+f_4(0),$$

而$\bar{r}(t)\epsilon C^1$是奇函数。从而可求得序号７，８，９的各自的$f_i(t), i=1,2,3$，将各自的$f_i(t)$代入(H_1^*)，即得序号７，８，９的齐次问题的不唯一解为（2.15），（2.16），（2.17）。

附记　由于f_i为奇函数，故在特征上给定的函数也是奇函数，故序号７，８，９的特征问题只须考虑半平面所构成的域就够了。

§3　H_1的第二特征问题（第二种情形）

本节所要考虑的特征问题是在四条特征线中的三条上，一条给u、一条给v、一条同时给u和v的函数值。即

$$\begin{cases} u|_{l_1}=\varphi_1,\ v|_{l_2}=\phi_1, \\ u|_{l_3}=\varphi_2,\ v|_{l_3}=\phi_2, \end{cases} \quad -\infty<x,y<+\infty. \tag{$\bullet$}$$

如果导数φ_i',ϕ_j'在$t=0$的邻域存在连续，而且适合$O(|t|^{\mu-1})$的估计，$\mu\geqslant1$，称这一假设为条件(B)。这一情形的特征问题有廿四种，下面列十二种，另十二种可由u和v位置互换而获得。

定理5　命$\mu_1=\dfrac{ln|k-2b_1|-ln|\frac{1}{k}-2b_1|}{2lnk}$，$\mu_0=max(1,\mu_1)$。方程组$(H_1)$适合序号

序号 \ 特征	x = 0	y = 0	y = kx	$y=\frac{x}{k}$
1	u = 0, v = 0	u = 0		v = 0
2	v = 0	u = 0, v = 0		u = 0
3	v = 0	u = 0		u = 0, v = 0
4	u = 0, v = 0	u = 0	v = 0	
5	v = 0	u = 0, v = 0	u = 0	
6	v = 0	u = 0	u = 0, v = 0	
7	u = 0, v = 0		v = 0	u = 0
8		u = 0, v = 0	u = 0	v = 0
9	u = 0		v = 0	u = 0, v = 0
10	u = 0		u = 0, v = 0	v = 0
11		u = 0	v = 0	u = 0, v = 0
12		u = 0	u = 0, v = 0	v = 0

1～6的特征问题的解在域内属于C^1函数类，而且在特征上给出的函数适合条件(B)。序号1～6齐次特征问题的解的不唯一的充要条件是存在实数$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu\neq1$，使

$$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}k^{2\mu}=1\,, \tag{H_1-1}$$

而μ使实函数$t^\mu(-\infty<t<+\infty)$有定义，则序号1～6的不唯一解按序为

$$\begin{cases} u=C\left\{(-ky)^\mu-\left(-\frac{y}{k}\right)^\mu-(x-ky)^\mu+\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v=C\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^\mu+\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right.\right. \\ \qquad \left.\left.-\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)^\mu\right)\right\}; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{-\left(\frac{k^2-1}{k}y\right)^\mu-(x-ky)^\mu+\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v=C\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)(x^\mu-(x-ky)^\mu)-\frac{1}{2}(k-2b_1)\right. \\ \qquad \left.\times\left(x^\mu-\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right)\right\}; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{-\left(\dfrac{k^2-1}{k}y\right)^{\mu}-(x-ky)^{\mu}+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\}, \\ v=C\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^{\mu}-\dfrac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}x\right)^{\mu}\right.\right. \\ \qquad \left.\left.-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right)\right\}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{(-ky)^{\mu}-\left(-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}-(x-ky)^{\mu}+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\}, \\ v=C\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(-((1-k^2)x)^{\mu}+(x-ky)^{\mu})\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{1}{2}(k-2b_1)\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{\left(\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^{\mu}-(x-ky)^{\mu}+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\}, \\ v=C\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(x^{\mu}-(x-ky)^{\mu})-\dfrac{1}{2}(k-2b_1)\right. \\ \qquad \left.\times\left(x^{\mu}-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right)\right\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} u=C\left\{\left(\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^{\mu}-(x-ky)^{\mu}+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\}, \\ v=C\left\{-\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{k}(-((1-k^2)x)^{\mu}+(x-ky)^{\mu})\right. \\ \qquad \left.+\dfrac{k-2b_1}{2}\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^{\mu}\right\}. \end{cases} \tag{3.6}$$

证 由方程组(H_1)序号1～6的共同齐次条件（2.2）、（2.5）得函数方程

$$F_4(t)-\frac{1-2b_1k}{(k-2b_1)k}F_4(k^2t)=0,$$

$$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0).$$

i）若存在$\mu\geqslant\mu_0$, $\mu\neq1$，使条件(H_1-1)成立。由引理1得

$$f_4(t)=Ct^{\mu}+f_4(0),$$

从而由序号1～6的各自的齐次条件，求得各自的f_i, $i=1,2,3$,并将它们代入$(H_1{}^*)$,即得序号1～6的齐次特征问题的不唯一解按序为(3.1)～(3.6)。

ii）若条件(H_1-1)不成立，当$\mu=1$时，有

$$\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}k^2=1,$$

从而得$b_1=0$,或$k=\pm1$，这是不可能的。

若 $\mu\geqslant\mu_0$，由于

$$\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|k^{2\mu}\leqslant\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|k^{2\mu_0}\leqslant 1,$$

即得

$$\left|\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}\right|k^{2\mu}<1\ \text{或}\ \frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}k^{2\mu}=-1.$$

由引理1得

$$f_4(t)=f_4(0),$$

从而可求得序号1～6的特征问题的解是唯一的。

同样做法，可得

定理6　命$\mu_1=\dfrac{ln|1-k^2|-ln|1-2b_1k|}{ln|1-k^2|}$，$\mu_0=max(1,\mu_1)$.方程组$(H_1)$适合序号7的特征问题的解在域内属于$C_1$函数类，而且在特征上给出的函数适合条件$(B)$。序号7齐次特征问题的解不唯一的充要条件是存在实数$\mu\geqslant\mu_0,\mu\neq1$，使

$$\frac{1-2b_1k}{1-k^2}(1-k^2)^\mu=1 \qquad (H_1-2)$$

成立，而且μ使实函数$t^\mu(-\infty<t<+\infty)$有定义，则序号7的齐次问题的不唯一解为

$$\begin{cases} u=C\left\{-\left(\dfrac{k^2-1}{k}y\right)^\mu-\left(\dfrac{x-ky}{k^2}\right)^\mu+\left(\dfrac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^\mu\right.\\ \qquad\left.+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v=C\left\{-\dfrac{\frac{1}{k}-2b_1}{2}\left[-\left(\dfrac{1-k^2}{k^2}x\right)^\mu+\left(\left(\dfrac{1-k^2}{k}\right)^2x\right)^\mu\right.\right.\\ \qquad\left.+\left(\dfrac{x-ky}{k^2}\right)^\mu-\left(\dfrac{(1-k^2)(x-ky)}{k^2}\right)^\mu\right]\\ \qquad\left.+\dfrac{k-2b_1}{2}\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right\}. \end{cases} \qquad (3.7)$$

定理7　当$\dfrac{k^2}{1-k^2}\neq1$时，命$\mu_1=\dfrac{ln|k-2b_1|+lnk-ln|1-k^2|}{2lnk-ln|1-k^2|}$，命$\mu_0=max(1,\mu_1)$.方程组$(H_1)$适合序号8的特征问题的解在域内属于$C^1$函数类，而且在特征上给出的函数适合条件$(B)$，序号8齐次特征问题的解不唯一的充要条件是存在实数$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu\neq1$，使

$$\frac{k}{k^2-1}(k-2b_1)\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^\mu=1 \qquad (H_1-3)$$

成立。而且μ使实函数$t^\mu(-\infty<t<\infty)$有定义，则序号8的齐次问题的不唯一解为

$$\begin{cases} u=C\left\{\left(\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^\mu-(x-ky)^\mu+\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v=C\left\{\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^\mu-\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}x\right)^\mu\right.\right.\\ \qquad\left.\left.-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right)\right\} \end{cases} \qquad (3.8)$$

当$\frac{k^2-1}{k^2}=-1$， $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，假设方程组(H_1)序号 8 特征问题的解属于解析函数类，当$b_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，齐次问题的解不唯一。当$b_1\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$时，则特征问题的解唯一。

证 由方程组(H_1)序号 8 的齐次条件(2.2),(2.6),(2.8)消去f_1、f_3得函数方程

$$F_4(t)-\frac{k}{k^2-1}(k-2b_1)F_4\left(\frac{k^2-1}{k^2}t\right)=0,$$

$$F_4(t)=f_4(t)-f_4(0).$$

i) 假设$\frac{1-k^2}{k^2}\neq 1$，$0<k<1$。如果存在$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu\neq 1$，使条件(H_1-3)成立。由引理 1 得

$$f_4(t)=Ct^{\mu}+f_4(0).$$

从而由序号 8 的齐次条件求得$f_i(i=1,2,3)$，将它们代入(H^*_1)，即得齐次问题的不唯一解为(3.8)。

ii) 若条件(H_1-3)不成立，当$\frac{1-k^2}{k^2}\neq 1$，$\mu=1$时，$b_1=0$，这是不可能的。

若$\mu\geqslant\mu_0$，由于

$$\left|\frac{k}{k^2-1}\right||k-2b_1|\left|\frac{k^2-1}{k^2}\right|^{\mu}\leqslant\left|\frac{k}{k^2-1}\right||k-2b_1|\left|\frac{k^2-1}{k^2}\right|^{\mu_0}\leqslant 1,$$

即得

$$\left(\frac{k}{1-k^2}\right)^{\mu-1}\frac{1}{k^{\mu}}|k-2b_1|<1 \text{ 或 } \frac{k}{k^2-1}(k-2b_1)\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^{\mu}=-1,$$

由引理 1 得

$$f_4(t)=f_4(0).$$

从而求得序号 8 的特征问题的解唯一。

iii) 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，得

$$F_4(t)=(2\sqrt{2}b_1-1)F_4(-t),$$

而且$b_1\neq\frac{1}{2\sqrt{2}}$。将$F_4(t)$展开为级数

$$F_4(t)=\sum_{i=0}^{\infty}C_it^i,$$

则

$$\sum_{i=0}^{\infty}C_i(1+(-1)^i(1-2\sqrt{2}b_1))t^i=0.$$

当i为偶数，若

$$1+1-2\sqrt{2}b_1=0,$$

即$b_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则$C_{2i}\neq 0$。若$b_1\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$则$C_{2i}=0$。当$i$为奇数，若

$$1-(1-2\sqrt{2}b_1)=0,$$

则$b_1=0$，这是不可能的，故$C_{2i+1}=0$。由此可见，当$b_1\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$F_4(t)=0$，由此可推得序号8的特征问题的解唯一。当$b_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，得

$$F_4(t)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{2i}t^{2i},$$

易得齐次问题的不唯一解为

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}C_{2i}\left\{\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)^{2i}-(x-ky)^{2i}+\left(x-\frac{y}{k}\right)^{2i}\right\},$$

$$v=\sum_{i=0}^{\infty}C_{2i}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^{2i}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)^{2i}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(x-\frac{y}{k}\right)^{2i}\right)\right\}.$$

类似于定理7与文〔3〕的定理5。可得

定理8 假设方程组(H_1)的序号9的特别问题的解属于解析函数类。$i)$当$2b_1>\frac{1}{k}$时，问题的解唯一；$ii)$ 当$k<2b_1<\frac{1}{k}$时，问题的解不唯一的充要条件是存在偶数$n_0=2m_1\geqslant2$，使条件

$$1+(-1)^{n_0}\frac{k-2b_1}{k-2b_1}-(1-k^2)^{n_0}=0, \qquad (H_1-4)$$

成立。$iii)$ 当$2b_1<k$时，解不唯一的充要条件是存在奇数$n_0=2m_2+1\geqslant3$使条件(H_1-4)成立。不唯一解呈如下的形式：

$$u=u_\mu,\qquad v=v_\mu.$$

$$u_\mu=C_\mu\left\{-\left(\frac{k^2-1}{k}y\right)^\mu-\left(\frac{x-ky}{k^2}\right)^\mu+\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^\mu+\right.$$

$$\left.\left(x-\frac{y}{k}\right)^\mu\right\},$$

$$v_\mu=C_\mu\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)\left(-\left(\frac{x-ky}{k^2}\right)^\mu+\left(\frac{1-k^2}{k^2}(x-ky)\right)^\mu\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\frac{k^2-1}{k^2}x\right)^\mu-\left(\frac{k^2-1}{k}\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)^\mu\right)\right\}.$$

定理9 假设方程组(H_1)的序号10的特征问题的解属于解析函数类。$i)$ 若$1-k^2>k^2$，当$k<2b_1<\frac{1}{k}$时问题的解唯一。当$k>2b_1$，或$2b_1>\frac{1}{k}$时，则问题的解不唯一。$ii)$ 若$1-k^2<k^2$，当$k<2b_1<\frac{1}{k}$，或$2b_1<k$时，问题的解不唯一。当$2b_1>\frac{1}{k}$时，问题的解唯一。$iii)$当$\frac{k^2}{1-k^2}=1$时，问题的解唯一。上述的齐次问题的不唯一解呈如下的形式

$$u_\mu = C\mu\left\{-\left(\frac{1-k^2}{k}y\right)^\mu + (x-ky)^\mu - \left(k^2\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)^\mu\right.$$

$$\left.+\left((k^2-1)\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)^\mu\right\},$$

$$v_\mu = C_\mu\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^\mu - \frac{1}{2}(k-2b_1)\left(-((k^2-1)x)^\mu\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(\frac{k^2-1}{k}\right)^2x\right)^\mu + \left(k^2\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)^\mu - \left((k^2-1)\left(x-\frac{y}{k}\right)\right)^\mu\right\}.$$

其中$\mu\geqslant 0$是自然数，如果解有奇次和偶次项，则取其线性组合。

理定10 命$\mu_1 - \dfrac{ln|k-2b_1| - ln|\frac{1}{k}-2b_1|}{2lnk}$，$\mu_0 = max(1,\mu_1)$。方程组$(H_1)$适合序号11、12的特征问题的解在域内属于$C^1$函数类，而且在特征上给出的函数适合条件$(B)$，序号11、12齐次特征问题的解的不唯一的充要条件是存在实数$\mu\geqslant\mu_0$，$\mu\neq 1$，使

$$-\frac{\frac{1}{k}-2b_1}{k-2b_1}(-k^2)^\mu = 1, \qquad (H_1-5)$$

成立，而μ使实函数$t^\mu(-\infty<t<+\infty)$有定义，则序号11、12 的齐次问题的 不唯一解按序为

$$\begin{cases} u = C\left\{-\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}y\right)^\mu - (x-ky)^\mu + \left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v = C\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^\mu - \dfrac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\dfrac{k^2-1}{k}x\right)^\mu\right.\right. \\ \qquad \left.\left.-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right)\right\}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = C\left\{\left(\dfrac{1-k^2}{k}y\right)^\mu - (x-ky)^\mu + \left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right\}, \\ v = C\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-2b_1\right)(x-ky)^\mu\dfrac{1}{2}(k-2b_1)\left(\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}x\right)^\mu\right.\right. \\ \qquad \left.\left.-\left(x-\dfrac{y}{k}\right)^\mu\right)\right\}. \end{cases}$$

§4 方程组(H_1)、(H_2)的分析特征

引理 当$k\to 1$时，方程组(H_1)变成

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = 0, \quad (H_2)$$

$$b_3 = (b_1 - \tfrac{1}{2})^2 \neq 0,$$

而且由(H_1^*)取极限$k\to 1$可得(H_2)的一般解为

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2b_1}f_1(x-y)-\dfrac{1-2b_1}{2b_1}(xf_1'(x-y)+f_2(x-y))+f_3(y), \\ v=-\dfrac{b_3}{b_1}(f_2(x-y)+xf_1'(x-y))+f_4(x). \end{cases} \tag{H_2^*}$$

证　当$k\to 1$时，由(H_1)得

$$b_3=\lim_{k\to 1}\left[b_1^2-\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)b_1+\frac{1}{4}\right]=\left(b_1-\frac{1}{2}\right)^2\neq 0 .$$

故引理的前半部分得证。

无妨将(H_1^*)改写成

$$u=g_2(y)+g_3\left(\frac{x}{k}-y\right)+g_4(kx-y),$$

$$v=g_1(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)g_3\left(\frac{x}{k}-y\right)+\frac{1}{2}(k-2b_1)g_4(kx-y),$$

命

$$\begin{cases} g_1(x)=F_1(x),\quad g_2(y)=F_2(y), \\ g_3\left(\dfrac{x}{k}-y\right)=F_3\left(\dfrac{x}{k}-y\right)-\dfrac{F_4\left(\dfrac{x}{k}-y\right)}{1-k}, \\ g_4(kx-y)=\dfrac{F_4(kx-y)}{1-k}. \end{cases} \tag{4.1}$$

则(H_1^*)可以写成

$$u=F_2(y)+F_3\left(\frac{x}{k}-y\right)+\frac{F_4(kx-y)-F_4\left(\frac{x}{k}-y\right)}{1-k},$$

$$v=F_1(x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)F_3\left(\frac{x}{k}-y\right)+\frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{2}(k-2b_1)F_4(kx-y)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-2b_1\right)F_4\left(\frac{x}{k}-y\right)\right].$$

当$k\to 1$时，

$$u(x,y)=F_2(y)+F_3(x-y)-2xF_4'(x-y),$$

$$v(x,y)=F_1(x)+\frac{1-2b_1}{2}F_3(x-y)-(F_4(x-y)+(1-2b_1)x$$
$$\times F_4'(x-y)).$$

又命

$$F_1(x)=f_4(x),\quad F_2(y)=f_3(y),$$

$$F_3(x-y)=\frac{1}{2b_1}f_1(x-y)-\frac{1-2b_1}{2b_1}f_2(x-y),$$

$$F_4(x-y)=\frac{1-2b_1}{4b_1}f_1(x-y).$$

即得所证。

由引理可见，方程组(H_1)，当$k\to1$时，它变成(H_2)而且(H_1^*)变成(H_2^*)，而特征线族$x=C_1$，$y=C_2$，$x-ky=C_3$，$x-\frac{y}{k}=C_4$ 变成$x=C_1$，$y=C_2$，$x-y=C_3$ 。

由上所述可知，方程组(H_2)的第二特征问题的解的唯一性证明，可从方程组(H_1)的相应特征问题取极限$(k\to1)$而获得。

§5　(H_2)的第二特征问题

方程组(H_2)的第二特征问题是求方程组(H_2)的解，使它们适合

$$\begin{cases} u|_{l_1}=\varphi_1(t),\ u|_{l_2}=\varphi_2(t), \\ u|_{l_3}=\varphi_3(t),\ v|_{l_1}=\phi_1(t) \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty,$$

及

$$\begin{cases} u|_{l_1}=\varphi_1(t),\ v|_{l_1}=\phi_1(t), \\ u|_{l_2}=\varphi_2(t),\ v|_{l_3}=\phi_2(t), \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty$$

这里，l_1，l_2，l_3 是特征线$x=0,y=0,x-y=0$等等。假设$\varphi_i'(t)$、$\phi_i'(t)$在$t=0$的邻域存在连续，而且适合$O(|t|^{\mu-1})$的估计，$\mu\geqslant1$。称这一假设为条件(C)。方程组(H_2)的第二特征齐次条件有下列的情形：

序号＼特征	x = 0	y = 0	x − y = 0	
1	u = 0	u = 0, v = 0	u = 0	
2	u = 0	u = 0	u = 0, v = 0	
3	u = 0, v = 0	u = 0	u = 0	
4	v = 0	u = 0	u = 0, v = 0	
5	v = 0	u = 0, v = 0	u = 0	
6	u = 0, v = 0	u = 0	v = 0	

注u和v可互调

定理11　方程组(H_2)适合序号1、2的特征问题的解在域内属于C^1函数类，而且在特征上给出的函数适合条件C。则序号1、2的齐次特征问题解不唯一的充要条件是$\mu=1$，而其不唯一解按序为

$$u=0,\ v=2c'b_1y\ , \tag{5.2}$$

$$u=0,\ v=-2C'b_1(x-y). \tag{5.3}$$

证　由引理 3 得知，当$k\to 1$时，$(H_1)\to(H_2)$，$(H_1^*)\to(H_2^*)$，而且方程组(H_2)中的两特征线 $x-ky=0$，$x-\frac{y}{k}=0$重合为$x-y=0$。由§2序号1和2的不唯一解为

$$u=0,\quad v=cb_1\left(\frac{1-k^2}{k}\right)y, \tag{5.4}$$

$$u=0,\quad v=cb_1(k^2-1)\left(x-\frac{y}{k}\right). \tag{5.5}$$

由本文(Ⅰ)的定理1的函数方程和引理 3 的式(4.1)，得知$C=\frac{C'}{1-k}$，当$k\to 1$时，由(5.4)和(5.5)得方程组(H_2)适合序号1、2的齐次问题的不唯一解为(5.2)和(5.3)。

对于序号 3 的情形，解是不存在的，因为$f_4(x)$无法确定。这和§2序号10的结果相一致。

同理可证明：

定理12　方程组(H_2)适合序号 4，5，6 的特征问题的解在域内属于C^1函数类，而且在特征上给出的函数适合条件(C)。序号 4，5，6 的特征问题解不唯一的充要条件是存在$\mu>\frac{1}{1-2b_1}>1$。而且其不唯一解按序为

$$\begin{cases} u=-\dfrac{2C'}{1-2b_1}y(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}, \\ v=-C'x(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=-\dfrac{2C'}{1-2b_1}(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}, \\ v=-C'x(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}+C'x^{\frac{1}{1-2b_1}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{2C'y}{1-2b_1}(-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}-\dfrac{2C'}{1-2b_1}y(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}}, \\ v=-C'x(x-y)^{\frac{2b_1}{1-2b_1}} \end{cases}$$

参考文献

〔1〕华罗庚、吳兹潜、林　伟，二阶兩个自变数兩个未知函数的常系数线性偏微分方程組，科学出版社，1979。
〔2〕吳兹潜、林　伟，双曲方程組的第一特征問題，中山大学学报（自然科学版），1980，1.
〔3〕林　伟、吳兹潜，双曲方程組的第三特征問題，中山大学学报(自然科学版)，(待发表).

The Second Characteristic Problem for the Systems of the Hyperbolic Equations

Wu Ciqian (Wu Tzechine) Lin Wei

Abstract

What we call the second characteristic problem for the system of the hyperbolic equatioms

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0, \qquad (H_1)$$

$$b_3=b_1^2-\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)b_1+\frac{1}{4}\neq 0, \quad b_1\neq 0, \quad 0<k<1$$

or

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x}+2\begin{pmatrix}b_1 & 1\\ (b_1-\frac{1}{2})^2 & b_1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\ u\end{pmatrix}=0, b_1\neq 0, \qquad (H_2)$$

is to look for the unknown functions u, v, satisfying the characteristic conditions, which are given at three characteristic lines of (H_1) or (H_2).

The sufficient and necessary conditions for the uniqueness of the second characteristic problem, as we know, is still left open. In this paper we completely solve the above-mentioned problem. Further, we also find out all trivial solutions for (H_1) and (H_2).