磨光函数误差的几个估计

黄友谦

（计算机科学系）

摘　要

本文对磨光函数的连续形式及离散形式给出了各阶导数的誤差估计.

Ⅰ. 一般形式的误差分析

由平均函数发展起来的函数磨光法具有光滑性和逼近性的两大优点，当步长$h \to 0$时磨光函数及其各阶导数收歛到原函数的相应阶导数。Riemann在研究福氏级数求导时引出了“广义二次求导”概念[5,6]，其实质是函数的二次磨光。自从样条函数出现后，磨光函数与样条函数有着紧密联系[3,4]。

由[3]，在$[a, b]$上的可积函数$f(x)$其k次磨光函数

$$f_k(x) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)dt, \tag{1.1}$$

其中$\Omega_k(\xi)$即k次B样条(B－Spline)。

引理1　若$f(x) \in C^{2l+1}[0,n]$，n为正整数，则有下式成立

$$\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j+1}{2}\right) = \int_0^n f(t)dt - \sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left[\overset{(2j-1)}{f}(n) - \overset{(2j-1)}{f}(0)\right] \tag{1.2}$$

$$+ \int_0^n P_{2l+1}(t)\overset{(2l+1)}{f}(t)dt,$$

其中B_{2j}是贝努里(Bernoulli)数，

$$P_{2l+1}(x) = (-1)^{l-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2Sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{2l+1}}. \tag{1.3}$$

证明　作辅助函数

$$P_1(x) = \begin{cases} x - [x + \frac{1}{2}] & \text{当} x - [x] \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{当} x - [x] = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

其中$[x]$示x的整数部份。容易验证

$$\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2j+1}{2}\right) = \int_0^n f(t)dt + \int_0^n P_1(t)f'(t)dt.$$

另一方面将$P_1(x)$展开为Fourier级数有

$$P_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{Sin\ 2n\pi x}{n\pi}.$$

记

$$P_{2j}(x)=(-1)^{j-1}2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Cos\ 2n\pi x}{(2n\pi)^{2j}},$$

$$P_{2j+1}(x)=(-1)^{j-1}2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n Sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2j+1}}.$$

由于

$$P_{2j+1}(0)=P_{2j+1}(n)=0,$$

$$P_{2j}(0)=P_{2j}(n)=(-1)^{j-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n\pi)^{2j}}=\left(\frac{1}{2^{2j-1}}-1\right)\frac{B_{2j}}{(2j)!}.$$

反复运用分部积分法就可得到(1.2)。引理1证毕。

推论1 若$f(x)\epsilon^{2l+1}[a,b]$，将$[a,b]n$等分，记每一小区间(xi, x_{i+1})的中点为$x_{i+\frac{1}{2}}=a+(i+\frac{1}{2})h$，$h=\frac{b-a}{n}$。则有复化中矩形求积公式余项的渐近表达式

$$(1.4)\qquad h\sum_{j=0}^{n-1}f(a+(j+\frac{1}{2})h)=\int_a^b f(t)\,dt-\sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}h^{2j}}{(2j)!}\times\left[f^{(2j-1)}(b)-f^{(2j-1)}(a)\right]+O(h^{2l+1}).$$

在(1.2)中令$n=1$，并对函数$f(x-\frac{h}{2}+th)$关于t求和就可获得一次磨光函数的误差估计：

推论2 当$x\epsilon[a+\frac{h}{2}, b-\frac{h}{2}]$时有

$$(1.5)\qquad f(x)=\frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}f(t)dt-\sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}h^{2j-1}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(x+\frac{h}{2})-f^{(2j-1)}(x-\frac{h}{2})\right]+O(h^{2l+1}).$$

定理1 若$f(x)\epsilon C^{2l+1}[a,b]$，则在区间$[a+\frac{k}{2}h, b-\frac{k}{2}h]$上$k$次磨光$f_k(x)$有如下误差估计：

$$(1.6)\qquad f_k(x)-f(x)=\sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}h^{2j}}{(2j)!}\sum_{m=1}^{k}\frac{\delta_h^m f^{(2j-m)}(x)}{h^m}+O(h^{2l+1}).$$

证明 由(1.1)注意到k次磨光函数的磨光宽度，其存在域为$[a+\frac{k}{2}h, b-\frac{k}{2}h]$。

再由(1.5)有

$$f_m(x)-f_{m-1}(x)=\frac{1}{h}\int_{x-\frac{k}{2}}^{x+\frac{k}{2}} f_{m-1}(t)dt-f_{m-1}(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}h^{2j-1}}{(2j)!}\delta_h f_{m-1}^{(2j-1)}(x)+O(h^{2l+1})$$

$$=\sum_{j=1}^{l}\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)\frac{B_{2j}h^{2j}}{(2j)!}\frac{\delta_h^m f^{(2j-m)}(x)}{h^m}+O(h^{2l+1}).$$

从而利用关系式

$$f_k(x)-f(x)=\sum_{m=1}^{k}(f_m(x)-f_{m-1}(x)),$$

定理1得证。

定理2　若$f(x)\in C^{2l}[a,b]$，则在区间$\left[a+\frac{k}{2}h,\ b-\frac{k}{2}h\right]$上$k$次磨光函数$f_k(x)$有误差估计

$$f_k(x)-f(x)=\sum_{j=1}^{l-1}\frac{f^{(2j)}(x)(\delta^k x^{2j+k})_{x=0}}{(2j+k)!}h^{2j}+O(h^{2l}),\tag{1.7}$$

其中δ示以步长为1的对称差分。

证明　运用B样条性质和台罗展开式有

$$f_k(x)-f(x)=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2l-1}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)\frac{(t-x)^j}{j!}f^{(j)}(x)dt\tag{1.8}$$

$$+\frac{1}{h}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)\frac{(t-x)^{2l}}{(2l)!}f^{(2l)}(\xi_x)dt,$$

其中ξ_x是依赖于t、x的数。

运用B样条的局部非零和对称性及分部积分法有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)(t-x)^j dt=0,\ \text{当}j\text{是奇数时},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)(t-x)^{2j}dt=\frac{(-1)^k h^{2j+1}}{(2j+1)\cdots(2j+k)}\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}}\xi^{2j+k}\Omega_{k-1}^{(k)}(\xi)d\xi$$

$$=\frac{h^{2j+1}}{(2j+1)\cdots(2j+k)}(\delta^k x^{2j+k})_{x=0}.$$

将后二式代入(1.8)便得到(1.7)，定理2证毕。

由误差估计的渐近表达式及Richardson外推算法，我们有

定理3　记

$$(1.9)\quad \begin{cases} T_1(h)=f_k(x)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_{k-1}\left(\dfrac{x-t}{h}\right)f(t)dt \\ T_{m+1}(h)=\dfrac{T_m(\frac{h}{2})-(\frac{1}{2})^{2m}T_m(h)}{1-(\frac{1}{2})^{2m}},\ m=1,2,\cdots, \end{cases}$$

则$T_{m+1}(h)$逼近函数$f(x)$的精度为$h^{2(m+1)}$，即

$$(1.10)\quad T_{m+1}(h)-f(x)=O(h^{2(m+1)}),$$

且当$f(x)=x^{2m+1}$时恒有 $T_{m+1}(h)\equiv f(x)$。

Ⅱ. 折线的磨光函数

对于$f(x)\epsilon C^{m+1}[a,b]$，$[a,b]$的一个分划

Π： $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$，　$h=\underset{0\le i\le N-1}{Max}\ h_i, h_i=x_{i+1}-x_i$。

记$S_m(x)$为定义在分划Π的m次多项式样条函数，在样条节点x_k处的m阶导数规定为

$$(2.1)\quad S_m^{(m)}(x_k)=\frac{S_m^{(m)}(x_k+0)+S_m^{(m)}(x_k-0)}{2},\ k=1,2,\cdots,N-1,$$

$$S_m^{(m)}(a)=S_m^{(m)}(a+0),\quad S_m^{(m)}(b)=S_m^{(m)}(b-0).$$

引理2　如果在样条结点有估计

$$(2.2)\quad \left|S_m^{(r)}(x_k)-f^{(r)}(x_k)\right|=O(h^{p_r}),$$

$$r=0,1,\cdots,m-1;\ k=0,1,\cdots,N.$$

并且有

$$(2.3)\quad \left|S_m^{(m)}(x)-f^{(m)}(x)\right|=O(h),$$

$$x_k<x<x_{k+1},\ k=0,1,\cdots,N-1.$$

则有

$$(2.4)\quad \left\|f^{(l)}-S_m^{(l)}\right\|_\infty=\left|\underset{a\le x\le b}{Max}\left|f^{(l)}(x)-S_m^{(l)}(x)\right|\right|=O(h^{\alpha_l}),$$

$$(2.5)\quad \left\|f^{(m)}-S_m^{(m)}\right\|_\infty=O(h),$$

其中

$$(2.6)\quad \alpha_l=\underset{0\le r\le m-l}{Min}(r+p_{r+l}),\ p_m=1,\ l=0,1,\cdots,m-1.$$

证明　对于$x\epsilon(x_k,x_{k+1}]$有

$$f^{(l)}(x)=\sum_{r=0}^{m-l-1}\frac{1}{r!}(x-x_k)^r f^{(r+l)}(x_k)+\frac{1}{(m-l)!}(x-x_k)^{m-l}f^{(m)}(\xi)$$

$$S_m^{(l)}(x)=\sum_{r=0}^{m-l-1}\frac{1}{r!}(x-x_k)^r S_m^{(r+l)}(x_k)+\frac{1}{(m-l)!}(x-x_k)^{m-l}S_m^{(m)}(\xi)$$

其中

$$x_k<\xi<x\leqslant x_{k+1},\quad l=0,1,\cdots,m-1.$$

两式相减得

$$\left|f^{(l)}(x)-S_m^{(l)}(x)\right|\leqslant\left[\sum_{r=0}^{m-l-1}\frac{h^r}{r!}\left|f^{(r+l)}(x_k)-S_m^{(r+l)}(x_k)\right|\right]$$

$$+\frac{h^{m-l}}{(m-l)!}\left|f^{(m)}(\xi)-S_m^{(m)}(\xi)\right|$$

$$=\left[\sum_{r=0}^{m-l-1}O(h^{r+p_{r+l}})\right]+O(h^{m+1-l})=O(h^{\alpha_l}).$$

在端点x_k处有估计式(2.2)，因此对于$[a,b]$中的任意x均有

$$\left|f^{(l)}(x)-S_m^{(l)}(x)\right|=O(h^{\alpha_l}),$$

也即证得了(2.4)。

再考察$x=x_k$处的m阶导数逼近的状态。选取ε为足够小的正数，使得$x_k+\varepsilon\in(x_k,x_{k+1})$，$x_k-\varepsilon\in(x_{k-1},x_k)$，则由(2.1)、(2.2)及$f^{(m+1)}(x)$的连续性有

$$S_m^{(m)}(x_k)=\frac{1}{2}\left[S_m^{(m)}(x_k+\varepsilon)+S_m^{(m)}(x_k-\varepsilon)\right]$$

$$=f^{(m)}(x_k)+O(h),\quad k=1,2,\cdots,N-1.$$

结合(2.3)就证得了(2.5)。引理2证毕。

引理3　若对于子区间(x_k,x_{k+1})中某一点$\hat{x}_k(k=0,1,\cdots N-1)$，有估计式

$$S_m^{(r)}(\hat{x}_k)-f^{(r)}(\hat{x}_k)=O(h^{q_r}),\tag{2.6}$$

$$k=0,1,\cdots,N-1;\quad r=0,1,\cdots,m.$$

$$S_m^{(m)}(x_k)-f^{(m)}(x_k)=O(h),\tag{2.7}$$

$$k=0,1,\cdots,N.$$

则有

$$\left\|f^{(l)}(x)-S_m^{(l)}(x)\right\|_\infty=O(h^{\beta_l}),\quad l=0,1,\cdots,m.\tag{2.8}$$

其中

$$\beta_l=\mathop{Min}_{0\leqslant r\leqslant m+1-l}\{r+q_{r+l}\},\quad q_{m+1}=0.\tag{2.9}$$

证明　对于$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$类似于引理2有

$$\left|f^{(l)}(x)-S_m^{(l)}(x)\right|\leqslant\sum_{r=0}^{m-l}\frac{h^r}{r!}\left|f^{(r+l)}(\hat{x}_k)-S_m^{(r+l)}(\hat{x}_k)\right|$$

$$+\frac{h^{m+1-l}}{(m+1-l)!}\left|f^{(m+1)}(\xi)\right|$$

$$=\left[\sum_{r=0}^{m-l} O(h^{r+q_{r+l}})\right]+O(h^{m+1-l})$$

$$=O(h^{\beta_l}),\quad l=0,1,\cdots,m-1.$$

再考察m阶导数的情况，对于$x_k<x<x_{k+1}$有

$$f^{(m)}(x)-S_m^{(m)}(x)=f^{(m)}(\hat{x}_k)-S_m^{(m)}(\hat{x}_k)+(x-\hat{x}_k)f^{(m+1)}(\xi)$$

从而有

$$\left|f^{(m)}(x)-S_m^{(m)}(x)\right|\leqslant O(h^{\beta_m})$$

在区间$[x_k,x_{k+1}]$端点有(2.7)成立，因此(2.8)当$l=m$时也成立，引理3证毕

在〔3〕中导出折线磨光函数的概念。记折线表达式为$f_1(x)$，其$k-1$次磨光函数为$f_k(x)$有

$$f_k(x)=\sum_{j=0}^{N} y_j\Omega_k\left(\frac{x-x_j}{h}\right). \tag{2.10}$$

Ⅲ. 折线磨光函数的误差

定理4 假设$f(x)\in C^3$,$[a,b]$，则对于折线的一次磨光函数$f_2(x)$有误差估计

$$\|f(x)-f_2(x)\|_\infty=\max_{a+\frac{h}{2}<x<b-\frac{h}{2}}|f(x)-f_2(x)|=O(h^2), \tag{3.1}$$

$$\|f'(x)-f_2'(x)\|_\infty=O(h^2),\quad \|f''(x)-f_2''(x)\|_\infty=O(h).$$

证明 由于

$$f_2(x)=\sum_{j=0}^{N} y_j\Omega_2\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$$

是对应于分划

Π_1: $a=x_0<x_{\frac{1}{2}}<\cdots<x_{k+\frac{1}{2}}<\cdots<x_{N-\frac{1}{2}}<x_N=b$

的一个二次样条函数。不考虑区间$\left[a,a+\frac{h}{2}\right),\left(b-\frac{h}{2},b\right]$的逼近状态。在样条结点$x_{k+\frac{1}{2}}$($k=0,1,\cdots,N-1$)处有

$$f_2(x_{k+\frac{1}{2}})-y_{k+\frac{1}{2}}=\frac{h^2}{8}f''(\xi_1),\qquad x_k<\xi_1<x_{k+1}.$$

$$f_2'(x_{k+\frac{1}{2}})-y'_{k+\frac{1}{2}}=\frac{h^2}{24}f'''(\xi_2),\qquad x_k<\xi_2<x_{k+1}.$$

而对于$x_{k-\frac{1}{2}}<x<x_{k+\frac{1}{2}}$有

$$f_2''(x)-f''(x)=\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}-y_k''-(x-x_k)f'''(\xi_3)$$

$$=\frac{h}{6}\left[f'''(\xi_4)-f'''(\xi_5)\right]-(x-x_k)f'''(\xi_3),$$

$$\xi_3, \xi_4, \xi_5 \in (x_{k-1}, x_{k+1})$$

从而

$$|f_2''(x) - f''(x)| = O(h)$$

运用引理2求得

$$\alpha_0 = 2, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 1$$

故定理4得证。完全类似于定理4有

定理5　若 $f(x)\epsilon C^4[a,b]$，则对于折线的二次磨光函数 $f_3(x)$ 有估计

$$\|f(x) - f_3(x)\|_\infty = O(h^2), \qquad \|f'(x) - f_3'(x)\|_\infty = O(h^2),$$

(3.2)

$$\|f''(x) - f_3''(x)\|_\infty = O(h^2), \qquad \|f'''(x) - f_3'''(x)\|_\infty = O(h),$$

这时最大模在 $[a+h,\ b-h]$ 取值。

定理6　若 $f(x)\epsilon C^4[a,b]$，则折线的盈亏修改的一次磨光函数的误差有

$$\hat{f}_2(x_{k+\frac{1}{2}}) - f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1}) - y_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}(\Delta^2 y_{k-1} + \Delta^2 y_k) = O(h^4).$$

$$\hat{f}_2'(x_k) - f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - y_k' - \frac{1}{16h}(\Delta^3 y_{k-1} + \Delta^3 y_{k-2}) = O(h^2),$$

$$\hat{f}_2'(x_{k+\frac{1}{2}}) - f'(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - y'_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{8h}\Delta^3 y_{k-1} = O(h^2),$$

$$\hat{f}_2''(x_k) - f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} - y_k'' - \frac{1}{8h^2}\Delta^4 y_{k-2} = O(h^2),$$

$$\hat{f}_2''(x_{k+\frac{1}{2}}) - f''(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2h^2}\left[\Delta^2 y_k + \Delta^2 y_{k-1}\right] - y''_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{8h^2}(\Delta^4 y_{k-1} + \Delta^4 y_{k-2})$$
$$= O(h^2),$$

$$k = 2, 3, \cdots, N-2.$$

$$\|f - \hat{f}_2\|_\infty = O(h^3), \quad \|f' - \hat{f}_2'\|_\infty = O(h^2), \quad \|f'' - \hat{f}_2'\|_\infty = O(h).$$

其中最大模在区间 $[a+2h,\ b-2h]$ 取值。

定理7　若 $f(x)\epsilon C^4[a,b]$，则对于折线的盈亏修改的二次磨光函线有

$$\|f^{(l)} - \hat{f}_3^{(l)}\|_\infty \leqslant M_l \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-l}, \quad (l = 0, 1, 2, 3,). \tag{3.5}$$

其中 M_l 为常数，最大模在区间 $[a+2h,\ b-2h]$ 取值。

证明　对于 $k = 2, 3, \cdots N-2$ 可导得

$$\hat{f}_3(x_k) - f(x_k) = -\frac{1}{36}\Delta^4 y_{k-1},$$

$$\hat{f}_3'(x_k) - f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - y_k' - \frac{1}{12k}(y_{k+2} - y_{k-2} - 2(y_{k+1} - y_{k-1})),$$

$$\hat{f}_3''(x_k)-f''(x_k)=\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}-y_k''-\frac{1}{6h^2}\Delta^4 y_{k-2},$$

从而有

$$\|\hat{f}_3(x_k)-f(x_k)|\leqslant\frac{h^4}{36}\|f^{(4)}\|_\infty,\ |f_3'(x_k)-f'(x_k)|\leqslant\frac{h^3}{6}\|f^{(4)}\|_\infty,$$

$$|f_3''(x_k)-f''(x_k)|\leqslant\frac{h^2}{4}\|f^{(4)}\|_\infty,\ k=2,3,\cdots,N-2.$$

对于 $x_k<x<x_{k+1}$ 有 $\xi\epsilon(x_k,x_{k+1})$使得

$$\hat{f}_3'''(x)-f'''(x)=\hat{f}_3'''(x_{k+\frac{1}{2}})-f'''(x_{k+\frac{1}{2}})-(x-x_{k+\frac{1}{2}})f^{(4)}(\xi)$$

$$=-y_{k+\frac{1}{2}}'''+\frac{1}{h^3}\Big[y_{k+2}-y_{k-1}-3(y_{k+1}-y_k)\Big]-(x-x_{k+\frac{1}{2}})f^{(4)}(\xi)$$

$$-\frac{1}{6h^3}\Big[y_{k+3}-y_{k-2}-5(y_{k+2}-y_{k-1})+10(y_{k+1}-y_k)\Big]$$

从而有

$$|f_3'''(x)-f'''(x)|\leqslant A\|f^{(4)}\|h,\ A\text{ 为常数.}$$

注意到

$$\Big|f^{(l)}(x)-\hat{f}_3^{(l)}(x)\Big|\leqslant\Big[\sum_{r=0}^{3-l-1}\frac{1}{r!}h^r\Big|f^{(r+l)}(x_k)-\hat{f}_3^{(r+l)}(x_k)\Big|\Big]$$

$$+\frac{1}{(3-l)!}h^{3-l}\Big|f^{(3)}(\xi)-\hat{f}_3(\xi)\Big|,$$

就可得到定理的证明。

参 考 文 献

〔1〕F. R. Loscalzo and T. D. Talbot, Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 4 (1967).

〔2〕T. N. E. Greville, *Theory and Applications of Spline Functions*, 1969.

〔3〕李岳生、齐东旭，样条函数方法，科学出版社，1979.

〔4〕李岳生、黄友谦，数值逼近，人民教育出版社，1978.

〔5〕G. H. Hardy, W. W. Rogosinski, *Fourier Series*, 1956.

〔6〕E. C. Titchmarsh，函数论，科学出版社，1964.

Error Estimations for Smoothing Functions

Huang Youqian

Abstract

In this paper, error estimations on the derivatives of finite orders for continuous and discrete forms of smoothing functions, are given.