

多种地基假定下 弹性基础板的样条有限元计算

陈树坚

(中山大学数学力学系)

彭育池

(广东省建筑设计院)

一、前言

文⁽¹⁾曾讨论各向同性薄板的样条有限元计算。样条有限元法以变分原理和样条函数为基础,除具有有限元法中系数矩阵的对称、正定、稀疏性及不计自然边界条件等优点外,还具有计算精度高、储存量省、计算量少等特点,尤其适用于规则弹性薄板的计算。

本文着重讨论多种地基假定下,正交各向异性矩形薄板的样条有限元计算,地基模型包括文克尔地基(Winkler Base)、巴斯捷纳克地基(Pasternak Base)、广义地基(Generalized Base)和弹性半空间地基^{(2) (3)}。所编制的电子计算机计算程序(按TQ-16机ALGOL-60算法语言编制),可以计算单组荷载,也可以自动进行不利荷载组合。文中所给出的数值算例表明,本文方法适用于四边自由之船坞底板、机场刚性道面、公路刚性路面、建筑物基础板等工程的设计计算。

二、最小势能原理的应用

考虑均质等厚度正交各向异性矩形薄板 $R(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ 。 oxy 平面为变形前板的中性面。 N, M 分别为板在 x, y 方向的等分单元个数。 hx, hy 分别为板在 x, y 方向的单元宽度,详见(图1)。

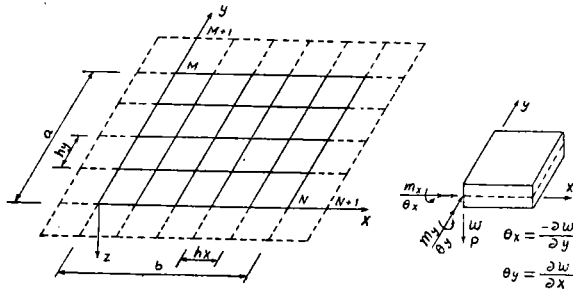


图 1

取左手系 $oxyz$, 令 $w = w(x, y)$ 表示中性面上点 (x, y) 的横向位移, $q(x, y)$ 表示作用在板面上的横向载荷集度, P_s 表示作用在板面上 S 点 (x_s, y_s) 的横向集中载荷, m_{x_s}, m_{y_s} 分别表示作用在板面上 S 点 (x_s, y_s) 沿 x 或 y 方向的集中力偶矩。在小挠度情况下, 板的应变能为

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{xy} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.1)$$

其中 D_x, D_y, D_1, D_{xy} 表示板体各向异性弹性系数。

外功势能为

$$G(w) = - \int_0^b \int_0^a q w dx dy - \sum_s P_s w(x_s, y_s) + \sum_s m_{x_s} \frac{\partial w}{\partial y}(x_s, y_s) - \sum_s m_{y_s} \frac{\partial w}{\partial x}(x_s, y_s). \quad (2.2)$$

弹性地基反力势能为

对文克尔地基模型:

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a K w^2 dx dy, \quad (2.3)$$

对巴斯捷纳克地基模型和“广义”地基模型(后者要把 G_x, G_y 分别换为 K_{2x}, K_{2y}):

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[K w^2 + G_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + G_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.4)$$

其中 G_x, G_y 表示地基剪切层的剪切模数, K_{2x}, K_{2y} 表示地基的反力矩系数, K 表示地基的反力系数。

对弹性半空间地基模型:

$$E(w) = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a P(w) w dx dy. \quad (2.5)$$

系统的总势能为

$$V(w) = J(w) + G(w) + E(w). \quad (2.6)$$

应用最小势能原理, 系统平衡时的挠度应使总势能 $V(w)$ 取最小值

$$\min_{w \in H_E^2} V(w), \quad (2.7)$$

其中 H_E^2 是矩形 R 上具有有限能量并满足位移约束条件的函数集。

三、三次B样条函数的应用

选三次B样条基函数 $\Phi_i(x), \Psi_j(y)$ 。在局部坐标下, $\Phi_i(x)$ 的函数表达式为^[4]

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (2+x)^3 & x \in [-2, -1], \\ (2+x)^3 - 4(1+x)^3 & x \in [-1, 0], \\ (2-x)^3 - 4(1-x)^3 & x \in [0, 1], \\ (2-x)^3 & x \in [1, 2], \\ 0 & |x| > 2. \end{cases} \quad (3.1)$$

$\Psi_j(y)$ 的表达式与式(3.1)相似, 只需将 i 换成 j , x 换成 y 即可。

从式(3.1)及其导数表达式可见, 基函数为四段三次式, 在节点处保持自身及其一阶导数, 二阶导数的连续性。

位移函数 $w(x, y)$ 可表达为基函数的线性组合

$$w(x, y) = \sum_{j=-1}^{M+1} \sum_{i=-1}^{N+1} C_{ij} \Phi_i(x) \Psi_j(y) \quad (3.2)$$

$$= [N] \{C\}, \quad (3.3)$$

其中 C_{ij} 为未知系数, $\{C\}$ 为未知系数列阵。

$$[N] = [\Phi_{-1}(x)\Psi_{-1}(y), \Phi_{-1}(x)\Psi_0(y), \dots, \Phi_{-1}(x)\Psi_M(y), \Phi_{N+1}(x)\Psi_{M+1}(y)], \quad (3.4)$$

$$\{C\} = \{C_{-1,-1}, C_{-1,0}, \dots, C_{N+1,M}, C_{N+1,M+1}\}, \quad (3.5)$$

利用式(3.3)可以通过未知系数列阵 $\{C\}$ 表示板中任一点的挠度值。例如节点 (x_i, y_j) 的挠度值为

$$\begin{aligned} w_{ij} &= w(x_i, y_j) \\ &= [\Phi_{-1}(x_i)\Psi_{-1}(y_j), \Phi_{-1}(x_i)\Psi_0(y_j), \dots, \\ &\quad \Phi_{N+1}(x_i)\Psi_{M+1}(y_j)] \{C\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

记位移列阵为

$$\{w\} = \{w_{00}, \dots, w_{N-1,M-1}, w_{NM}\}, \quad (3.7)$$

则由式(3.6)、(3.7)可得 $\{w\}$ 与 $\{C\}$ 之间的关系

$$\{w\} = [G] \{C\}, \quad (3.8)$$

式中 $[G]$ 为 $(N+1)(M+1) \times (N+3)(M+3)$ 的矩阵, 反映第 $Q = (k+1)(M+3) + l + 2$ 个未知系数对第 $P = i(M+1) + j + 1$ 个位移的影响,

$$G_{PQ} = \Phi_k(x_i) \Psi_l(y_j). \quad (3.9)$$

由式(3.1)得知

$$\Phi_k(x_i) = \begin{cases} 2/3 & \text{当 } k=i, \\ 1/6 & \text{当 } |k-i|=1, \\ 0 & \text{当 } |k-i|>1, \end{cases}$$

$$\Psi_l(y_j) = \begin{cases} 2/3 & \text{当 } l=j, \\ 1/6 & \text{当 } |l-j|=1, \\ 0 & \text{当 } |l-j|>1. \end{cases}$$

故

$$G_{PC} = \begin{cases} 4/9 & \text{当 } k=i, l=j, \\ 1/9 & \text{当 } k=i, |l-j|=1 \text{ 或 } |k-i|=1, l=j, \\ 1/36 & \text{当 } |k-i|=1 \text{ 且 } |l-j|=1, \\ 0 & \text{当 } |k-i|>1 \text{ 或 } |l-j|>1. \end{cases} \quad (3.10)$$

四、代数方程组的建立

把式(3.3)代入式(2.6), 记

$$\left. \begin{aligned} A_{ik}^{rs} &= \int_0^a \Phi_i^{(r)}(x) \Phi_k^{(s)}(x) dx, \\ B_{jl}^{rs} &= \int_0^b \Psi_j^{(r)}(y) \Psi_l^{(s)}(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

则有

$$J(w) = \frac{1}{2} \{C\}^T [K]_J \{C\}, \quad (4.2)$$

$$E(w) = \frac{1}{2} \{C\}^T [K]_E \{C\}, \quad (4.3)$$

$$G(w) = - \{C\}^T \{F\}. \quad (4.4)$$

[注1]

其中

$$\begin{aligned} [K]_J &= D_x [A^{22}] \otimes [B^{00}] + D_y [A^{00}] \otimes [B^{22}] + D_1 ([A^{20}] \otimes [B^{02}] \\ &\quad + [A^{02}] \otimes [B^{20}]) + 4D_{xy} [A^{11}] \otimes [B^{11}], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= \left(\int_0^a \int_0^b q [N]^T dx dy + \sum_s P_s [N]^T (x_s, y_s) - \sum_s m_{x_s} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]^T (x_s, y_s) \right. \\ &\quad \left. \sum_s m_{y_s} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]^T (x_s, y_s) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

至于 $[K]_E$, 则分两类地基模型加以讨论: 对文克尔地基、巴斯捷纳克地基和广义地基等模型有

$$[K]_E = K [A^{00}] \otimes [B^{00}] + G_x [A^{11}] \otimes [B^{00}] + G_y [A^{00}] \otimes [B^{11}]. \quad (4.7)$$

应用于文克尔克地基模型时置 $G_x = G_y = 0$.

应用于“广义”地基模型时置 $K_1 = K, K_{2x} = G_x, K_{2y} = G_y$.

[注2]

对弹性半空间地基模型有

$$[K]_E = [G]^T [K_P]^{-1} [G], \quad (4.8)$$

[注1], 记号 $[A] \otimes [B]$ 表示矩阵 $[A]$ 与 $[B]$ 的Kronecker乘积, $[A] \otimes [B] = [a_{ij} [B]]$.

[注2]: 编制电子计算机计算程序时, 为了节省存储单元, 可以先利用 $[K]_E$ 的存储单元存储 $[K_P]^{-1}$, 然后逐个形成 $[K]_E$ 的元素, 注意利用公式(3.10), $[G]^T$ 及 $[G]$ 的元素可以边计算边赋值, 因此 $[G]^T$ 及 $[G]$ 不必占用存储单元.

$$R_{ij} = Kw_{ij} . \quad (5.2)$$

对弹性半空间地基模型, 地基反力 $\{R\}$ 按式(4.10), 即

$$\{R\} = [K_p]^{-1} \{w\}$$

计算。其中 $[K_p]$ 的计算见式(4.11)。

六、弯矩及剪力的近似计算

节点弯矩

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{ij} &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{ij} , \\ (M_y)_{ij} &= - \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{ij} . \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{ij} &= h_x^{-2} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k''(x_i) \Psi_l(y_j) , \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{ij} &= h_y^{-2} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k(x_i) \Psi_l''(y_j) . \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

节点剪力

$$\left. \begin{aligned} (Q_x)_{ij} &= - \left[D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{ij} , \\ (Q_y)_{ij} &= - \left[D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{ij} . \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_{ij} &= h_x^{-3} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k'''(x_i) \Psi_l(y_j) , \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)_{ij} &= h_y^{-3} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k(x_i) \Psi_l'''(y_j) , \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{ij} &= h_x^{-1} h_y^{-2} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k'(x_i) \Psi_l''(y_j) , \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{ij} &= h_x^{-2} h_y^{-1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \Phi_k''(x_i) \Psi_l'(y_j) . \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

七、计算实例

例一

某机场道面板, 分仓尺寸 $3.5^M \times 4^M$ (图2), 按四边自由计算, $E = 3.5 \times 10^6 T/M^2$, $\mu = 0.15$, $h = 0.34^M$, 按文克尔地基模型计算, $K = 14000 T/M^3$, 协和机型的其中一种

轮迹分布如(图 2)所示, $q = 129T/M^2$ 。

(图 3)表示 10×10 网格划分时所算出的若干点的挠度值。为了便于比较,图中同时列出用混合型有限元法^[6]和有限元位移法(“非保续”矩形薄板单元)计算的结果。从图中可见,样条有限元的计算结果和每个节点三个未知量的其他有限元结果相当吻合。然而前者的总未知量个数只有169个,后者的总未知量个数却有363个。

(表 1)列出板体中心的挠度和弯矩 M_x 值随网格细分而变化的情况并与差分法进行比较。

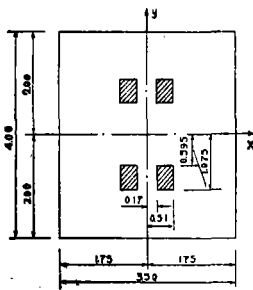


图 2

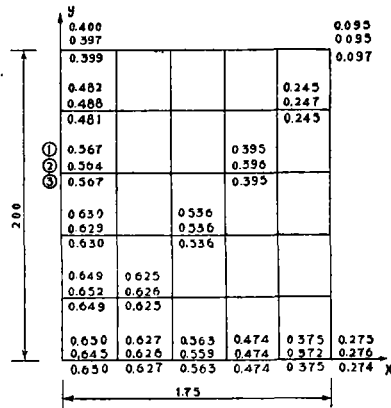


图 3 节点挠度值(MM)

注:
 ①样条有限元结果
 ②混合型有限元法结果。
 ③有限元位移法结果

表 1 中心挠度和弯矩 M_x 值

网格划分	中心挠度 (MM)		中心弯矩 M_x (T-M/M)	
	样条有限元	差分法	样条有限元	差分法
4 × 4	0.651	0.595	5.196	4.006
6 × 6	0.649	0.666	4.606	3.962
8 × 8	0.650	0.642	4.589	3.947
10 × 10	0.650	0.645	4.533	4.283

例二

某弹性基础板 $4^M \times 4^M$, 板体厚 $h = 0.2^M$, $E_p = 3.5 \times 10^6 T/M^2$, $\mu_p = 0.167$ 。采用弹性半空间地基模型, 地基的 $E_0 = 35000 T/M^2$, $\mu_0 = 0.4$ 。

(表 2)列出均布荷载和集中荷载时的中心挠度和弯矩值。为了比较,同时列出同一例题位移法所得的结果*。从表中可见二者的结果是十分相近的。

• 位移法结果是西安空军军事工程学院姚炳卿同志计算的。

表2 中心挠度和弯矩 M_x 值

网格划分	均布荷载 $q = 100T/M^2$				集中荷载 $P = 100T$			
	中心挠度(MM)		中心弯矩(T-M/M)		中心挠度(MM)		中心弯矩(T-M/M)	
	样条有限元	位移法	样条有限元	位移法	样条有限元	位移法	样条有限元	位移法
4×4	10.5405	10.5441	3.0264	3.1648	1.6925	1.7467	8.5195	9.6019
6×6	10.5913	10.5932	3.5209	3.5267	1.8062	1.8533	12.9724	15.0085
8×8	10.6214	10.6223	3.6238	3.6224	1.8459	1.8883	16.0826	18.5314
10×10	10.6400	10.6402	3.6585	3.6569	1.8650	1.8982	18.4018	21.0593

(图4a)表示均布荷载作用(网格划分为 6×6)时图示位置上的 p/q 计算值。其中 p 为单位面积上的反力, q 为荷载集度。(图4b)表示沿板中心线 p/q 值的变化情况。所得结果和位移法的结果一致。

(表3)列出了集中荷载作用(网格划分为 6×6) (图5)所示位置上的 pl^2/P (单位面积上的反力与平均接触压力之比)的计算值。为了比较,同时列出位移法的结果。式中 p 为单位面积上的反力, l 为板宽, P 为板中集中荷载。

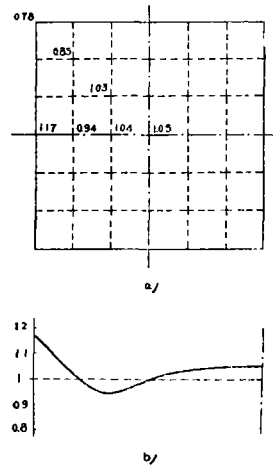


图4 均布荷载作用时 p/q 值

表3 集中荷载作用时 pl^2/P 的计算值

节点号	样条有限元	位移法
1	-0.87	-0.93
2	0.17	0.21
3	2.02	2.08
4	9.62	10.29
5	3.69	3.54
6	0.77	0.61
7	-0.34	-0.37

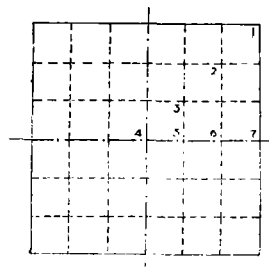


图5

结 束 语

上述各例表明：应用样条有限元法解算多种地基假定下的弹性基础板是非常有效的。由于各点弯矩都连续，因此它可以像差分法和有限元混合法一样，直接给出节点弯矩，而用不着像有限元位移法那样取相邻节点弯矩值的平均值。然而它和有限元混合法相比，具有总刚系数矩阵正定的优点；和差分法相比，具有总刚系数矩阵对称的优点。此外，它有着较高的精度^[1]： $J[w^* - w_h] = O(h^4)$ ，这里 w^* 为真解， w_h 为依赖于分格 h 的近似解。

样条有限元法每个节点一个参数，而有限元位移法和混合法每个节点三个参数。这样，应用样条有限元法，就可比后者大为节省存储单元和减少计算时间。

参 考 文 献

- [1] 石钟慈, 样条有限元, 计算数学, 1979, 1, 50—72.
- [2] Kerr, A.D., Elastic and viscoelastic foundation models, *J. Appl. Mech.*, 1964, 31—491.
- [3] Timoshenko, S., Woinowsky—Krieger, S., Theory of plates and shells, 1959, 板壳理论, 《板壳理论》翻译组译, 科学出版社, 1977, 295, 391—394.
- [4] 李岳生、黄有谦编, 数值逼近, 人民教育出版社, 1979.
- [5] Cheung, Y.K., and Zienkiewicz, O.C., Plates and tanks on elastic foundations—on application of finite element method, *Internat. J. Solids and Struct.* Vol. I, 1965, 451—461.
- [6] 蔡承武、陈树坚、刘世宁, 薄板混合型有限单元体及其在船坞底板计算中的应用, 中山大学学报(自然科学版), 1975, 1.
- [7] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method in Engineering*. Mc Graw-Hill, London, 1971.

On Spline Finite Element Computation of Plates on Elastic Foundations for Various Base-models

Chen Shujian

Peng Yuchi

Abstract

In this paper, a general method of spline finite element computation of orthotropic rectangular plates on elastic foundations is discussed. The base-models involve the Winkler base, the Pasternak base, the Generalized base, the isotropic elastic half-space. The results of the calculation of dock plates, airport rigid pavement and plates under building, etc. are given.