非对称矩陣广义特征值问题的同步迭代法

蔡承武　陈树輝
（数学力学系）

一、前　　言

有粘性阻尼的结构振动与旋转结构的振动，其振动频率与振型的计算，归结为求解

$$AX + \omega BX + \omega^2 CX = 0 \tag{1—1}$$

的特征值与特征向量。一般情形，A、B、C均为对称稀疏矩阵，对于旋转结构的振动，B为反对称矩阵，计算机贮存它们只需要较小的容量。寻求适合这一特点的计算方法，具有很大的实用意义。

令$Y = \omega X$，(1—1)就可化为阶数高一倍的广义特征值问题

$$KZ = \omega MZ, \tag{1—2}$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ I & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{1—3}$$

而I为单位矩阵。K、M仍保持稀疏的特点，但已失去对称性。

子空间迭代法[1]只能解决对称矩阵的广义特征值问题。Jennings等提出的实矩阵的同步迭代法[2]适用于求解非对称矩阵的标准特征值问题$AX = \lambda X$，如将(1—2)化为标准特征值问题，矩阵就不再是稀疏的了。本文应用相关分析的方法[2],[3],[4]，推广了子空间迭代法，使它适合于计算非对称矩阵广义特征值问题的部份模小的特征值及相应的特征向量，条件是K、M为实的非奇异矩阵。

二、特征值、右特征向量与左特征向量

设 K、M为$n \times n$的非奇异、实矩阵。满足

$$Kq = \lambda Mq \tag{2—1}$$

的非零向量q称右特征向量，λ称特征值。

类似地，满足

$$\bar{q}^T K = \lambda \bar{q}^T M \tag{2—2}$$

的非零向量$\bar{q}$称左特征向量，λ称特征值。

记

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}, \tag{2—3}$$

显然，A为n×n的非奇异、实矩阵，A在实数域上的广义约当(Jordan)标准型[5]为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_r \end{bmatrix} \tag{2—4}$$

其中$\Lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$为广义约当块，它们分别属于下列两种形式之一

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{2—5a}$$

或

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & & & & & & 0 \\ -\beta_i & \alpha_i & & & & & & \\ 0 & 1 & \alpha_i & \beta_i & & & & \\ 0 & 0 & -\beta_i & \alpha_i & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 & \alpha_i & \beta_i \\ 0 & & & & 0 & 0 & -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix} \tag{2—5b}$$

诸约当块阶数之和等于n。

设Λ为A的广义约当标准型，也就是说存在非奇异、实矩阵Q，使得

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda \tag{2—6}$$

以(2—3)代入上式，并以矩阵MQ左乘上式两端，可得

$$\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{M}\mathbf{Q}\Lambda. \tag{2—7}$$

Q的第j列记作$\mathbf{q}_j(j=1,2,\cdots n)$，即

$$\mathbf{Q} \equiv [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_n] \tag{2—8}$$

比较(2—1)，(2—7)两式，不难得出如下结论：

(1a)：对应于形如(2—5a)的约当块Λ_i，不妨设Λ_i的最后一列位于Λ的第j列，(2—1)有一实特征值λ_i及相应的右特征向量$\mathbf{q}_j$。

(2a)：对应于形如(2—5b)的广义约当块Λ_i，不妨设它的最后两列分别位于Λ的第$j-1$列与第j列；(2—1)有一对共轭的特征值$\alpha_i \pm i\beta_i$及相应的右特征向量$\mathbf{q}_{j-1} \pm i\mathbf{q}_j$。

事实上，从(2—7)展开可得

$$K[q_{j-1}\ q_j]=M[q_{j-1}q_j]\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i\end{bmatrix} \tag{a}$$

记
$$\left[\ \overset{*}{q}_{j-1}\ \ \overset{*}{q}_j\right]\equiv[q_{j-1}+iq_j,\ q_{j-1}-iq_j] \tag{b}$$

由(a)(b)两式可得

$$K\left[\ \overset{*}{q}_{j-1}\ \ \overset{*}{q}_j\right]=M\left[\ \overset{*}{q}_{j-1}\ \ \overset{*}{q}_j\right]\begin{bmatrix}\alpha_i+i\beta_i & 0\\ 0 & \alpha_i-i\beta_i\end{bmatrix} \tag{c}$$

这就证明了上述结论。

令

$$\bar{Q}=Q^{-1}M^{-1} \tag{2—9}$$

从(2—3)(2—6)两式可得

$$\bar{Q}^TKQ=\Lambda, \tag{2-10}$$

以Q^{-1} 右乘上式两端，注意到(2—9)后可得

$$\bar{Q}^TK=\Lambda\bar{Q}^TM \tag{2-11}$$

$$\bar{Q}\equiv[\bar{q}_1,\ \bar{q}_2,\cdots,\bar{q}_n] \tag{2-12}$$

将(2—11)展开，并与(2—2)比较，可以得出类似于(1a),(2a)的结论。

(1b)：对应于形如(2—5a)的约当块Λ_i，不妨设Λ_i的第一行位于Λ的第j行；(2-2)有一实特征值λ_i及相应的左特征向量$\overline{q_j}$。

(2b)：对应于形如(2—5b)的广义约当块Λ_i，不妨设它的最前两行分别位于Λ的第j行与第$j+1$行；(2—2)有一对共轭的特征值$\alpha_i\pm\beta_i$及相应的左特征向量$\bar{q}_j\mp i\bar{q}_{j+1}$。

以$\bar{Q}^T$左乘(2—7)两端，注意到(2—10)后可得

$$\bar{Q}^TMQ=I \tag{2-13}$$

其中 I 为单位矩阵。上式表达了左、右特征向量的正交条件。

我们规定Λ中的约当块按对应特征值的模的大小次序排列，与模最小的特征值对应的约当块排在左上角，与模最大的特征值对应的约当块排在右下角。作了这样的规定后，广义约当矩阵Λ就唯一确定了。特征向量尚不能完全确定，由于在 Q 中实特征向量所在的列只能相差一常数因子；而复特征向量的实部与虚部所在的列，虽可以变化很大，但由它们组成的复特征向量也只能相差一复的常数因子。我们规定右特征向量模最大的元素为 1，经这样正规化后，特征向量就完全确定了。

三、同步迭代算法

取 P 个线性无关的(右)初始向量$u_i(i=1.2,\cdots,P)$，一般P应大于待求特征向量的数目。

记

$$U\equiv[u_1,u_2,\cdots u_p] \tag{3—1}$$

由于 Q 是非奇异的，U 可表为

$$\mathbf{U}=\mathbf{Q}\mathbf{C} \tag{3-2a}$$

式中 C 为 $n\times p$ 的矩阵，C 的第 i 列$(1\leqslant i\leqslant p)$元素是 $\mathbf{u}_i$ 按右特征向量展开的系数。上式可写成

$$\mathbf{U}=\mathbf{Q}_A\mathbf{C}_A+\mathbf{Q}_B\mathbf{C}_B \tag{3-2b}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{Q}_A&\equiv[\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\cdots\mathbf{q}_p],\\ \mathbf{Q}_B&\equiv[\mathbf{q}_{p+1},\ \mathbf{q}_{p+2},\cdots,\mathbf{q}_n]\end{aligned}\right\} \tag{3—3}$$

而$\mathbf{C}_A$，$\mathbf{C}_B$ 分别是 $p\times p$，$(n-p)\times p$ 的系数矩阵，假定 $\mathbf{C}_A$ 非奇异。$\mathbf{Q}_A$ 的列向量包含全部待求的右特征向量。

假设Λ矩阵的对角元 λ_{pp}(p 行 p 列的元素)与 $\lambda_{p+1,\ p+1}$ 属于不同的约当块，并且两个约当块对应的特征值的模不等；Λ可写成

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_A & 0\\ 0 & \Lambda_B\end{bmatrix} \tag{3—4}$$

其中Λ_A，Λ_B 分别为P阶与$(n-p)$阶的广义约当标准型，将上式代入(2—7)可得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K}\mathbf{Q}_A&=\mathbf{M}\mathbf{Q}_A\Lambda_A\\ \mathbf{K}\mathbf{Q}_B&=\mathbf{M}\mathbf{Q}_B\Lambda_B\end{aligned}\right\} \tag{3—5}$$

将U代入如下矩阵方程

$$\mathbf{K}\mathbf{V}=\mathbf{M}\mathbf{U} \tag{3—6}$$

可解得V。应用(3-2b)，(3-5)，V可形式地表为

$$\mathbf{V}=\mathbf{Q}_A\Lambda_A^{-1}\mathbf{C}_A+\mathbf{Q}_B\Lambda_B^{-1}\mathbf{C}_B \tag{3—7}$$

根据本文规定的约当块在Λ中的排列规则，从上式可以看出，$\mathbf{Q}_B$ 对 V的贡献比对U的贡献相对地减小了。

类似地，取P个线性无关的(左)初始向量$\bar{\mathbf{u}}_1,\bar{\mathbf{u}}_2,\cdots,\bar{\mathbf{u}}_p$，记

$$\bar{\mathbf{U}}\equiv[\bar{\mathbf{u}}_1\bar{\mathbf{u}}_2\cdots\ \bar{\mathbf{u}}_p], \tag{3—8}$$

$\bar{\mathbf{U}}$ 一般可表为

$$\bar{\mathbf{U}}=\bar{\mathbf{Q}}_A\bar{\mathbf{C}}_A+\ \bar{\mathbf{Q}}_B\bar{\mathbf{C}}_B \tag{3—9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}_A&\equiv[\bar{\mathbf{q}}_1,\bar{\mathbf{q}}_2,\cdots,\bar{\mathbf{q}}_p],\\ \bar{\mathbf{Q}}_B&\equiv[\bar{\mathbf{q}}_{p+1},\bar{\mathbf{q}}_{p+2},\cdots,\bar{\mathbf{q}}_n];\end{aligned}\right\} \tag{3-10}$$

而$\bar{\mathbf{C}}_A$,$\bar{\mathbf{C}}_B$ 分别为 $p\times p$,$(n-p)\times p$ 的展开系数矩阵，假定 $\bar{\mathbf{C}}_A$ 非奇异。(2—11) 可写成

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}_A^T\mathbf{K}&=\Lambda_A\ \bar{\mathbf{Q}}_A^T\mathbf{M}\\ \bar{\mathbf{Q}}_B^T\mathbf{K}&=\Lambda_B\ \bar{\mathbf{Q}}_B^T\mathbf{M}\end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

当已知$\bar{\mathbf{U}}$ 后，可从方程

$$\overline{V}^T K = \overline{U}^T M \tag{3-12}$$

解得 $\overline{V}$，应用(3—9)、(3—11)，$\overline{V}$ 可形式上表为

$$\overline{V}^T = \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} \overline{Q}_A^T + \overline{C}_B^T \Lambda_B^{-1} \overline{Q}_B^T \tag{3—13}$$

令

$$\left.\begin{aligned} m &= \overline{V}^T M V \\ k &= \overline{V}^T k V \end{aligned}\right\} \tag{3—14}$$

m，k均为$p\times p$矩阵。

以(3—7)，(3—13)分别代入以上两式，应用关系式(2—10)，(2—13)便得：

$$\left.\begin{aligned} m &= \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-2} C_A + \overline{C}_B^T \Lambda_B^{-2} C_B \\ k &= \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} C_A + \overline{C}_B^T \Lambda_B^{-1} C_B \end{aligned}\right\} \tag{3—15}$$

随着迭代次数的增加，以上两式右端最后一项的贡献将趋于零。于是得近似关系式

$$\left.\begin{aligned} m &\doteq \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-2} C_A, \\ k &\doteq \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} C_A; \end{aligned}\right\} \tag{3—16}$$

求解如下广义特征值问题

$$kX = mX\Lambda_P \tag{3—17}$$

以近似关系式(3—16)代入上式，不难看出

$$\left.\begin{aligned} X &= C_A^{-1}\Lambda_A \\ \Lambda_P &= \Lambda_A \end{aligned}\right\} \tag{3—18}$$

是(3—17)的一个近似解。Λ_p给出了模最小的P个特征值的近似值。

令

$$W = VX, \tag{3—19}$$

以(3—7)与(3—18)的第一式代入上式，便得近似表达式

$$W \doteq Q_A + Q_B\Lambda_B^{-1} C_B C_A^{-1}\Lambda_A, \tag{3—20}$$

W的各列给出了改进后的近似右特征向量或右特征向量的实部与虚部。

令

$$B = mX \tag{3—21}$$

以(3—16),(3—18)的第一式代入上式，可得

$$B \doteq \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} \tag{3—22}$$

令

$$\overline{W}^T = B^{-1}\,\overline{V}^T \tag{3—23}$$

比较(3—21)、(2—9)，可知 $B^{-1} = \overline{X}^T$，而$\overline{X}$为相关矩阵 k,m 的左特征向量所构成的

矩阵。以(3—22)，(3—13)代入上式可得

$$\overline{\mathbf{W}}^T \doteq \overline{\mathbf{Q}}_A^T + \Lambda_A \mathbf{C}_A^{-T} \overline{\mathbf{C}}_B^T \Lambda_B^{-1} \overline{\mathbf{Q}}_B^T \tag{3—24}$$

$\overline{\mathbf{W}}$的各列给出了改进后近似左特征向量，或左特征向量的实部与虚部。

将$\mathbf{W}$，$\overline{\mathbf{W}}$正规化后，分别作为下一次迭代的$\mathbf{U}$与$\overline{\mathbf{U}}$，直至前后两次迭代所得的近似特征值或特征向量的相对偏差满足精度要求时为止。

由以上的分析可得，非对称矩阵广义特征值问题双迭代算法的步骤：

已知$\mathbf{K}$，$\mathbf{M}$，$\mathbf{U}_{(0)}$，　$\overline{\mathbf{U}}_{(0)}$；

(1) 解方程

$\mathbf{K}\mathbf{V}_{(i)} = \mathbf{M}\mathbf{U}_{(i-1)}$　解得 $\mathbf{V}_{(i)}$；

$\mathbf{K}^T\overline{\mathbf{V}}_{(i)} = \mathbf{M}^T\overline{\mathbf{U}}_{(i-1)}$　解得 $\overline{\mathbf{V}}_{(i)}$；

(2) 计算相关矩阵

$$\mathbf{k}_{(i)} = \overline{\mathbf{V}}_{(i)}^T \mathbf{M}\mathbf{U}_{(i-1)}$$

$$\mathbf{m}_{(i)} = \overline{\mathbf{V}}_{(i)}^T \mathbf{M}\mathbf{V}_{(i)}$$

(3) 解特征值问题

$\mathbf{k}_{(i)}\mathbf{X}_{(i)} = \mathbf{m}_{(i)}\mathbf{X}_{(i)}\Lambda_p^{(i)}$ 解得$\mathbf{X}_{(i)}$，$\Lambda_p^{(i)}$；

(4) 改进右特征向量的估计

$\mathbf{W}_{(i)} = \mathbf{V}_{(i)}\mathbf{X}_{(i)}$。

(5) 计算矩阵乘积

$\mathbf{B}_{(i)} = \mathbf{m}_{(i)}\mathbf{X}_{(i)}$

(6) 解方程

$\mathbf{B}_{(i)}\overline{\mathbf{W}}_{(i)}^T = \overline{\mathbf{V}}_{(i)}^T$　解得$\overline{\mathbf{W}}_{(i)}^T$；

(7) 特征向量正规化

$\mathbf{W}_{(i)} \to \mathbf{U}_{(i)}$，　$\overline{\mathbf{W}}_{(i)} \to \overline{\mathbf{U}}_{(i)}$；

设$\mathbf{W} \equiv [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots \mathbf{w}_p]$。若$\mathbf{W}_j$代表实特征向量，绝对值最大的元素为$d$，则 $\mathbf{u}_j = \frac{1}{d}\mathbf{w}_j$.

若$\mathbf{w}_j$，$\mathbf{w}_{j+1}$代表一对共轭的复特征向量的实部与虚部，特征向量$\mathbf{w}_j + i\mathbf{w}_{j+1}$模最大的元素记作$e+if$，则正规化后的特征向量为$(\mathbf{w}_j + i\mathbf{w}_{j+1})/(e+if)$，它的实部与虚部分别为

$$\mathbf{u}_j = (e\mathbf{w}_j + f\mathbf{w}_{j+1})/(e^2+f^2),$$

$$\mathbf{u}_{j+1} = (e\mathbf{w}_{j+1} - f\mathbf{w}_j)/(e^2+f^2).$$

(8) 检验收敛性。

第i次迭代得到的近似特征值记作$\lambda_1^{(i)}$，$\lambda_2^{(i)}$，$\cdots$，$\lambda_s^{(i)}$，

S为要求的特征值数目，一般$S<P$。

$$\text{若}\ \left|\frac{\lambda_j^{(i)}-\lambda_j^{(i-1)}}{\lambda_j^{(i)}}\right|<10^{-\rho}\quad(\text{可取}\rho=4\sim6)\ j=1,2,\cdots s,$$

则迭代结束。若不能满足以上不等式，则转向(1)，继续迭代。

归纳以上的迭代步骤可得

$$\mathbf{U}_{(i)}=(\mathbf{Q}_A\Lambda_A^{-i}\mathbf{C}_A+\mathbf{Q}_B\Lambda_B^{-i}\mathbf{C}_B)\mathbf{S}_i,\tag{3--25}$$

其中

$$\mathbf{S}_i=\mathbf{X}_{(1)}\mathbf{R}_{(1)}\mathbf{X}_{(2)}\mathbf{R}_{(2)}\cdots\mathbf{X}_{(i)}\mathbf{R}_{(i)}.\tag{3—26}$$

而$\mathbf{R}_{(j)}$是第j次迭代$\mathbf{W}_{(j)}$正规化时需要乘的矩阵，即$\mathbf{U}_{(j)}=\mathbf{W}_{(j)}\mathbf{R}_{(j)}(j=1,2,\cdots i)$.

类似地有

$$\bar{\mathbf{U}}^T_{(i)}=\bar{\mathbf{S}}_i(\bar{\mathbf{C}}_A^T\Lambda_A^{-i}\bar{\mathbf{Q}}_A^T+\bar{\mathbf{C}}_B^T\Lambda_B^{-i}\bar{\mathbf{Q}}_B^T)\tag{3—27}$$

其中

$$\bar{\mathbf{S}}_i=\bar{\mathbf{R}}^T_{(i)}\mathbf{X}^{-1}_{(i)}\mathbf{m}^{-1}_{(i)}\bar{\mathbf{R}}^T_{(i-1)}\mathbf{X}^{-1}_{(i-1)}\mathbf{m}^{-1}_{(i-1)}\cdots\bar{\mathbf{R}}^T_{(1)}\mathbf{X}^{-1}_{(1)}\mathbf{m}^{-1}_{(1)},\tag{3—28}$$

而$\bar{\mathbf{R}}_{(j)}$是第j次迭代$\overline{\mathbf{W}}_{(j)}$正规化时需要乘的矩阵，即$\bar{\mathbf{U}}_{(j)}=\overline{\mathbf{W}}_{(j)}\bar{\mathbf{R}}_{(j)}(j=1,2,\cdots i)$.

从(3—25)、(3—27)两式可以看出，随着迭代次数的增多，$\mathbf{Q}_B$对$\mathbf{U}_{(i)}$的贡献与$\bar{\mathbf{Q}}_B$对$\bar{\mathbf{U}}_{(i)}$的贡献将趋于零.当迭代多次以后，可以略去包含$\mathbf{C}_B$与$\bar{\mathbf{C}}_B$的项，(3—16)、(3—18)等近似关系式的误差将趋于零。$\mathbf{U}_{(i)}$趋于$\mathbf{Q}_A$，$\Lambda_p^{(i)}$趋于Λ_A。

如果Λ的对角元λ_{PP}与$\lambda_{P+1,\ P+1}$属于同一约当块，或虽属不同约当块，但两个约当块对应的特征值的模相等；这时Λ_A^{-i}与Λ_B^{-i}的非零元素比较，即i当使充分大时，也不能完全忽略Λ_B^{-i}的元素，$\mathbf{U}_{(i)}$不能收敛到$\mathbf{Q}_A$，$\Lambda_p^{(i)}$不能收敛到Λ_A。但所求得的前几个特征值与特征向量仍能收敛到准确值。因此，参加迭代的向量个数P一般应大于所需计算的特征值个数S。

从上述收敛性的讨论，可以发现，只要$\mathbf{Q}_B$对$\mathbf{U}_{(i)}$的贡献趋于零(当i趋于无穷时)就能保证特征值与右特征向量收敛。因此不必考虑左向量的改进。事实上(3—25)的成立并不依赖于$\overline{\mathbf{U}}_{(i)}$的改善。为了节约机器容量可用$\mathbf{V}$代替$\overline{\mathbf{V}}$，这时

$$\mathbf{U}=\mathbf{Q}_A\mathbf{C}_A+\mathbf{Q}_B\mathbf{C}_B$$

$$\mathbf{V}=\mathbf{Q}_A\Lambda_A^{-1}\mathbf{C}_A+\mathbf{Q}_B\Lambda_B^{-1}\mathbf{C}_B$$

$\mathbf{V}$也可按左特征向量展开，写为

$$\mathbf{V}^T=\bar{\mathbf{C}}_A^T\bar{\mathbf{Q}}_A^T+\bar{\mathbf{C}}_B^T\bar{\mathbf{Q}}_B^T$$

$$m = V^T M V = \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} C_A + \overline{C}_B^T \Lambda_B^{-1} C_B$$

$$k = V^T K V = \overline{C}_A^T C_A + \overline{C}_B^T C_B$$

当$C_B \longrightarrow 0$（Q_B对U的贡献趋于零）时有

$$\left.\begin{aligned} m &= \overline{C}_A^T \Lambda_A^{-1} C_A \\ k &= \overline{C}_A^T C_A \end{aligned}\right\} \tag{3—29}$$

由于不考虑左向量的改进，$\overline{C}_B$的元素并不是小量，故(3—29)的误差比(3—16)大，这将降低收敛率，但是绝不影响收敛性。双迭代法中的$\overline{V}$用V代替，就得到广义子空间迭代法，其迭代步骤大为简化。

已知K，M，$U_{(o)}$

（1）解方程

$K V_{(i)} = M U_{(i-1)}$　解得$V_{(i)}$；

（2）计算相关矩阵

$$k_{(i)} = V^T_{(i)} M U_{(i-1)}$$

$$m_{(i)} = V^T_{(i)} M V_{(i)}\quad ;$$

（3）解特征值问题

$k_{(i)} X_{(i)} = m_{(i)} X_{(i)} \Lambda_p^{(i)}$　解得 $X_{(i)}, \Lambda_p^{(i)}$；

（4）改进右特征向量的估计

$W_{(i)} = V_{(i)} X_{(i)}$；

（5）特征向量正规化

$W_{(i)} \longrightarrow U_{(i)}$；

（6）检验收敛性。

上述迭代算法包含了实对称矩阵广义特征值问题的子空间迭代法，后者是前者的特殊情况。

双迭代法与广义子空间迭代法每一次迭代均需要计算相关矩阵的广义特征值问题$kX = mX\Lambda$，可先将它化为标准特征值问题，然后采用双QR算法[6]。

四、算例与讨论

计值$KQ = MQ\Lambda$的前几个特征值与特征向量。

（1）　$K = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，　$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$。

选取

$$U_0 = \overline{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算结果见下表。

表　一

算　法	迭代次数	序号	特 征 值	特 征 向 量 q1	q2	q3
化成标准特征值問題后用双QR算法		λ_1	$0.15462371_{10}0$	$0.22129502_{10}0$	$0.52289016_{10}0$	略
		λ_2	$0.11751049_{10}1$	$0.53612884_{10}0$	$0.10000000_{10}1$	
		λ_3	$0.55036046_{10}1$	$0.10000000_{10}1$	$-0.39599022_{10}0$	
子空間迭代法	7	λ_1	$0.15462371_{10}0$	$0.22129502_{10}0$	$0.52289888_{10}0$	未求
				$0.53612884_{10}0$	$0.10000000_{10}1$	
		λ_2	$0.11751049_{10}1$	$0.10000000_{10}1$	$-0.39599086_{10}0$	
广义子空間迭代法	7	λ_1	$0.15462371_{10}0$	$0.22129502_{10}0$	$0.52289888_{10}0$	未求
				$0.53612884_{10}0$	$0.10000000_{10}1$	
		λ_2	$0.11751049_{10}1$	$0.10000000_{10}1$	$-0.39599086_{10}0$	
双迭代法	7	λ_1	$0.15462371_{10}0$	$0.22129502_{10}0$	$0.52289889_{10}0$	未求
				$0.53612884_{10}0$	$0.10000000_{10}1$	
		λ_2	$0.11751049_{10}1$	$0.10000000_{10}1$	$-0.39599088_{10}0$	

(2)
$$K=\begin{bmatrix}2&0&1&2\\0&3&0&2\\-1&0&3&1\\-2&-2&-1&5\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\-1&2&1&1\\-1&-1&2&1\\-1&-1&-1&2\end{bmatrix},$$

选取

$$U_0=\overline{U_0}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

计算结果列于表二，

从实际计算情况来看，特征值比特征向量收敛性好．广义子空间迭代法与双迭代法比较，前者对机器容量要求较低，程序简单，虽然收敛率比双迭代法低，但由于广义子空间迭代法每迭代一次所需计算时间较少，这可以弥补迭代次数较多的缺点。当K、M对称时，双迭代法，广义子空间迭代法与子空间迭代法，三种方法的计算结果与迭代次数完全相同，这是必然的。广义子空间迭代法的迭代步骤与子空间迭代法相同，本文的分析扩大了子空间迭代法的应用范围．

本节所举的两个算例，主要目的是考验双迭代法与广义子空间迭代法的收敛性．低阶特征值问题并不能体现这两种算法的优点．这两种算法特别适宜于计算高阶广义特征值问题少数几个模最小的特征值及相应的特征向量。一方面相关矩阵k,m的阶数较低，用双 QR算法解特征值问题花费机器时间不多。另一方面矩阵K，M均可变带宽储存，如K、M为(1—3)式所表达的形式，则只要变带宽储存A、B、C，十分节约内存，这对高阶矩阵来说，非常重要。一般来说，计算自由度数很高有粘性阻尼的结构或旋转结构的低阶自振频率，采用本文建议的方法是适宜的。

表二　特征值 λ

算法	迭代次数	特征值 序号	实部	虚部
化成标准特征值問題后用双QR算法		λ_1	$0.10667364_{10}1$	$0.63062220_{10}0$
		λ_2	$0.10667364_{10}1$	$-0.63062220_{10}0$
		λ_3	$0.12466174_{10}1$	$0.00000000_{10}0$
		λ_4	$0.22296656_{10}1$	$0.00000000_{10}0$
广义子空間迭代法	28 (16)	λ_1	$0.10667364_{10}1$ $(0.10667652_{10}1)$	$0.63062219_{10}0$ $(0.63061516_{10}0)$
		λ_2	$0.10667364_{10}1$ $(0.10667652_{10}1)$	$-0.63062219_{10}0$ $(-0.63061516_{10}0)$
		λ_3	$0.12466174_{10}1$ $(0.12466352_{10}1)$	$0.00000000_{10}0$ $(0.00000000_{10}0)$
双迭代法	16 (8)	λ_1	$0.10667364_{10}1$ $(0.10667533_{10}1)$	$0.63062220_{10}0$ $(0.63066879_{10}0)$
		λ_2	$0.10667364_{10}1$ $(0.10667533_{10}1)$	$-0.63062220_{10}0$ $(-0.63066879_{10}0)$
		λ_3	$0.12466174_{10}1$ $(0.12466730_{10}1)$	$0.00000000_{10}0$ $(0.00000000_{10}0)$

参考文献

〔1〕Bathe, K,J., Solution methods for large generalized eigenvalue problems in structural engineering, *SESM Report*, 1971, 71-20.

〔2〕Jennings, A., and Stewart, W. J., Simultaneous iteration for partial eigensolution of real matrices, *J.Inst. Maths Applics*, 15 (1975), 3.

〔3〕Jennings, A., A direct iteration method of obtaining latent roots and vectors of a symmetric matrix, *Proc. Camb. Phil, Soc.*, 63 (1967), 745-765.

〔4〕蔡承武、陈树輝，桨叶的耦合振动，中山大学学报(自然科学版)，1979，1，108-121.

〔5〕謝邦杰編，线性代数，人民教育出版社．1978.

〔6〕Wilkinson, J. H. and Reinsch, C., *Handbook for Automatic Computation*, Vol, 11, Linear Algebra, Springerverlay, 1971.

Simultaneous Iteration Methods for Generalized Eigenvalue Problems of Non-symmetrical Matrices

Cai Chengwu　　Chen Shuhui

Abstract

In this paper, the generalized eigenvalue problems $\mathbf{K}\mathbf{q}=\lambda\mathbf{M}\mathbf{q}$ are discussed, where $\mathbf{K}.\mathbf{M}$ are real non-singular matrices. Two simultaneous iteration methods are presented for obtaining the first few eigenvalues and corresponding eigenvectors. The results of some numerical tests are given. When $\mathbf{K}.\mathbf{M}$ are symmetric, these methods are identical with the subspace iteration method.